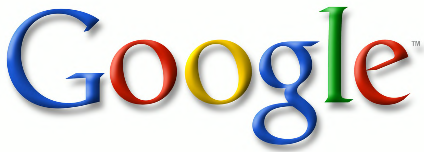




HANDBUCH

DER THEORIE

DER LINEAREN

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

PROFESSOR DR. LUDWIG SCHLESINGER,
PRIVATDOCENTEN AN DER UNIVERSITÄT ZU BERLIN.

IN ZWEI BÄNDEN.

ZWEITEN BANDES ERSTER THEIL.

MIT FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1897.

Vorbemerkung.

Die Fülle des zu bearbeitenden Materials hat eine Theilung des zweiten Bandes nothwendig gemacht. Der vorliegende erste Theil behandelt die Gruppentheorie, die Umkehrprobleme im Allgemeinen, und diejenigen speciellen Theorieen, die sich an die Integration einer linearen Differentialgleichung durch bestimmte Integrale mit Hülfe der Euler'schen Transformirten angliedern lassen. Der zweite Theil wird die Theorie der eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunctionen (insbesondere der elliptischen Modulfunction), der allgemeinen Fuchs'schen Functionen und die linearen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten zum Gegenstande haben.

Für die Anordnung und Darstellung des Stoffes sind, ebenso wie für die Form der Litteraturangaben, die im Vorworte zum ersten Bande dargelegten Gesichtspunkte massgebend geblieben.

Einige Nachträge und Berichtigungen zum ersten Bande sind am Schlusse des vorliegenden Theiles zusammengestellt.

Ausser den im Vorworte zum ersten Bande genannten Herren waren diesmal noch die Herren Oberlehrer Dr. G. Wallenberg und Cand. H. Lemke so freundlich, mich bei der Revision der Druckbogen zu unterstützen; es ist mir eine angenehme Pflicht, ihnen auch an dieser Stelle den wärmsten Dank für ihre Bemühungen auszusprechen.

Berlin, im October 1896.

Ludwig Schlesinger.

a*

Berichtigungen.

S. 9, Zeile 22 v. o. ist zwischen „seine“ und „Grenzstellen“ einzuschalten „sämmtlichen“.

S. 265 fehlt vor der ersten Gleichung die Bezeichnung (1).

S. 292, Zeile 15 v. o. statt „des folgenden Abschnittes“ lies „der folgenden Kapitel“.

Inhaltsverzeichniss und Litteraturnachweis.

Inhaltsverzeichniss. — Litteraturnachweis.

Neunter Abschnitt.

Allgemeine Theorie der bei linearen Differentialgleichungen auftretenden Gruppen.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Sechstes Kapitel.

Siebentes Kapitel.

Zehnter Abschnitt.

Specielle Probleme der Gruppentheorie. Invarianten.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Sechstes Kapitel.

Elfter Abschnitt.

Formulirung und allgemeine Discussion der Umkehrprobleme.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Sechstes Kapitel.

Siebentes Kapitel.

Achtes Kapitel.

Neuntes Kapitel.

Zwölfter Abschnitt.

Theorie und Anwendungen der Euler'schen Transformirten.

Erstes Kapitel.

Euler, Institutiones calculi integralis, Band 2 (1827), S. 230ff.;
Pincherle, Memorie della R. Accad. di Bologna, Serie 5, Band 2, S. 523ff.;
Mellin, a. a. O.;
Arbeit des Verfassers, Crelle's Journal, Band 116, S. 101ff.;
Jordan, Cours d'Analyse, Band 3 (1887), S. 242ff.;
Pochhammer, Math. Annalen, Band 35, S. 470ff.;
Nekrassoff, ebenda, Band 38, S. 513ff.

Zweites Kapitel.

Fuchs, Crelle's Journal, Band 71, S. 91ff.;
Hossenfelder, Math. Ann., Band 4, S. 202ff.;
Goursat, Acta Mathem., Band 2, S. 1ff.;
Jordan, a. a. O., S. 247ff.;
Pochhammer, Crelle's Journal, Band 104, S. 152ff.; Mathematische Annalen, Band 37, S. 500ff.;
Nekrassoff, a. a. O., S. 538ff.;
Pincherle, a. a. O.;
Arbeiten des Verfassers, Crelle's Journal, Band 116, S. 114ff.; Band 117, S. 150ff.

Poincaré, American Journal, Band 7, S. 222ff.;
Arbeiten des Verfassers, Crelle's Journal, Band 116, S. 125ff.; Band 117, S. 152ff.;
vergl. Pincherle, a. a. O., S. 540;
Nekrassoff, a. a. O., S. 536.

Drittes Kapitel.

Arbeit des Verfassers, Crelle's Journal, Band 116, S. 117ff.; S. 128ff.;
vergl. Pochhammer, ebenda, Band 71, S. 345ff.

Arbeit des Verfassers, a. a. O.;
vergl. Hankel, Schlömilch's Zeitschr., Band 9, S. 12ff.;
Jordan, a. a. O., S. 259;
Pochhammer, Mathem. Annalen, Band 35, S. 495ff.;
Klein, hypergeom. Function, S. 143.

Pochhammer, Crelle's Journ., Band 71, S. 316ff.; Band 73, S. 135ff.;
Hossenfelder, a. a. O., S. 197ff.;
Fuchs, Crelle's Journal, Band 72, S. 255ff.; Sitzungsberichte 1888 II, S. 1285;

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Sechstes Kapitel.

Neunter Abschnitt.

Allgemeine Theorie der bei linearen Differentialgleichungen auftretenden Gruppen.

Erstes Kapitel.

131. Der allgemeine Gruppenbegriff.

Die analytische Natur der durch eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$\text{(A)} \qquad P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_0(x)y = 0$$

definirten Functionen wird, im Sinne der von Riemann in die Analysis eingeführten Principien, bestimmt durch die Art ihres Verhaltens in der Umgebung der singulären Stellen. Wenn die Coefficienten von (A) z. B. ganze rationale Functionen sind und wenn wir, wie im achten Abschnitte, mit $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ die im Endlichen gelegenen wesentlichen, mit $a_{\varrho+1}, a_{\varrho+2}, \cdots a_\sigma$ die ausserwesentlichen singulären Stellen der Differentialgleichung bezeichnen, so beherrschen wir vollständig die analytische Beschaffenheit des allgemeinen Integrals von (A), wenn wir im Stande sind, für ein durch seine Anfangswerthe gegebenes Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ die Fundamentalsubstitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\varrho$ anzugeben, die das Fundamentalsystem $[y_\varkappa]$ bei einfachen positiven Umläufen der unabhängigen Variabeln x um die wesentlichen singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ erfährt.

In der That gewährt uns die Kenntniss dieser Fundamentalsubstitutionen eine vollständige Einsicht in den gesammten Werthevorrath, dessen die Elemente des Fundamentalsystems $[y_\varkappa]$ in einem beliebigen Punkte der x-Ebene fähig sind.

Denken wir uns nämlich die x-Ebene durch Aussonderung der Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ in einen $(\varrho + 1)$-fach zusammenhängenden Bereich T und diesen durch ϱ von den Punkten $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ nach dem Unendlichen hin gelegte Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\varrho$ wieder in einen

einfach zusammenhängenden Bereich $\overline{T}$ verwandelt, so sind die Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ innerhalb $\overline{T}$ eindeutig determinirt, und der gesammte Werthevorrath dieser Integrale wird erhalten, indem wir auf die innerhalb $\overline{T}$ eindeutig bestimmten Werthe derselben alle möglichen in der Form

(1) $$S = A_{i_1}^{\lambda_1} A_{i_2}^{\lambda_2}, \cdots A_{i_\alpha}^{\lambda_\alpha}$$

darstellbaren Substitutionen anwenden, wo die

$$i_1, i_2, \cdots i_\alpha$$

alle Combinationen mit beliebiger Wiederholung der Zahlen $1, 2, \cdots \varrho$, die

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\alpha$$

alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen (vergl. Nr. 102, Bd. I, S. 369). Die Gesammtheit der Werthesysteme

(2) $$S[y_\varkappa]$$

geniesst nun eine ausgezeichnete Eigenschaft.

Greifen wir nämlich irgend ein bestimmtes derselben, etwa

(3) $$A[y_\varkappa]$$

heraus, so ist dies auch wieder ein innerhalb T eindeutig definirtes Fundamentalsystem. Die zu demselben gehörigen Fundamentalsubstitutionen lauten (vergl. Nr. 121, Bd. I, S. 439)

$$A A_\varkappa A^{-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho)$$

und der gesammte Werthevorrath von $A[y_\varkappa]$ geht aus dem innerhalb T eindeutig definirten Werthesystem durch Anwendung der Substitutionen

(4) $$A S A^{-1}$$

hervor, die aber in ihrer Gesammtheit offenbar mit der Gesammtheit der Substitutionen S identisch sind. Andererseits ist der Werthevorrath von $A[y_\varkappa]$ auch mit dem Werthevorrath von $[y_\varkappa]$ identisch, wir können also sagen:

Wir erhalten allemal dieselbe Gesammtheit von Werthesystemen (2), wenn wir auf ein beliebiges derselben die sämmtlichen Substitutionen (1) anwenden.

Als Eigenschaft der Substitutionen (1) lässt sich dies so ausdrücken, dass die Composition beliebig vieler dieser Substitutionen stets immer wieder eine schon in der Gesammtheit (1) enthaltene Substitution ergiebt.

Die angegebene Eigenschaft des Werthevorraths (2) wird seit Galois dadurch ausgedrückt, dass man sagt, dieser Werthevorrath

bilde eine Gruppe; die correspondirende Eigenschaft der Substitutionen (1), die den Uebergang zwischen den einzelnen „Elementen“ der Gruppe (2) vermitteln, bezeichnet man nach Cauchy, indem man die Gesammtheit (1) ein System conjugirter Substitutionen nennt. In der neueren Zeit wird diese letztere Bezeichnung seltener angewandt, man spricht gewöhnlich auch von einer Gruppe von Substitutionen. Dabei ist noch hervorzuheben, dass der Gruppenbegriff bei Galois und Cauchy nur für solche Zusammenfassungen von Werthesystemen beziehungsweise Operationen vorkommt, die wie die Permutationen einer endlichen Anzahl unbestimmter Grössen nur aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehen. Um die weitere Entwickelung der Gruppentheorie, besonders auch um die Darlegung ihrer Beziehungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, hat sich Herr C. Jordan bedeutende Verdienste erworben. Allgemein lässt sich der Gruppenbegriff wie folgt fassen.

Man sagt von dem Inbegriffe gewisser Operationen $\omega, \omega', \omega'', \cdots$ sie seien einer Composition fähig, wenn sich aus irgend zweien derselben, etwa ω, ω', in eindeutiger Weise wieder eine Operation bilden lässt, die dann als die componirte Operation $\omega\omega'$ bezeichnet wird. Für diese Composition möge das associative Gesetz

$$\omega(\omega'\omega'') = (\omega\omega')\omega''$$

gültig sein, während die Gültigkeit des commutativen nicht erforderlich ist.

Wenn dann jede durch Composition zweier Operationen der Gesammtheit $\omega, \omega', \omega'', \cdots$ entstehende Operation selbst in dieser Gesammtheit enthalten ist, so bilden die $\omega, \omega', \omega'', \cdots$ eine Gruppe.

Denkt man sich die Operationen einer solchen Gruppe Ω auf ein Object o angewandt, so erhält man eine Reihe anderer Objecte

$$(5) \qquad \omega o, \quad \omega' o, \quad \omega'' o, \cdots\cdots,$$

und es entstehen allemal Objecte, die dieser Reihe angehören, wenn wir auf irgend ein Object derselben die Operationen der Gruppe anwenden. Wir werden uns nur mit solchen Gruppen zu beschäftigen haben, die so beschaffen sind, dass zu jeder Operation ω derselben eine Substitution ϖ der Gruppe gefunden werden kann, die nach ω auf das Object o angewandt, dasselbe reproducirt, für welche also

$$\varpi\omega o = o,$$

oder wie wir kurz schreiben wollen

$$\varpi\omega = 1$$

ist. Diese Operation $\varpi = \omega^{-1}$ heisst dann die zu ω inverse, und $\varpi\omega$ die identische Operation. Wenn die Gruppe nur aus einer endlichen Anzahl von Operationen besteht, so enthält sie nothwendig zu jeder Operation die inverse und folglich auch die identische Operation. Für eine aus unendlich vielen Operationen bestehende Gruppe ist das Auftreten der inversen Operationen keine nothwendige Folge des Gruppenbegriffs, sondern es muss ausdrücklich gefordert werden. Wir setzen im Folgenden stets voraus, dass diese Forderung erfüllt sei.

Dann enthält die Reihe (5) auch das Object o selbst, und sie reproducirt sich vollständig, wenn wir auf irgend ein Object von (5) die sämmtlichen Operationen der Gruppe Ω anwenden.

Denken wir uns nun an Stelle von o ein anderes Object o' eingeführt, welches aus o durch eine gewisse Operation $\bar{\omega}$ hervorgehen mag,

$$o' = \bar{\omega} o,$$

von der übrigens dahingestellt bleibt, ob sie der Gruppe Ω angehört oder nicht. Wenden wir auf o die sämmtlichen Operationen ω der Gruppe Ω an, so ist

$$\bar{\omega}\omega o = \bar{\omega}\omega\bar{\omega}^{-1} o',$$

d. h. der Anwendung von ω auf o entspricht die Anwendung der Operation

$$\bar{\omega}\omega\bar{\omega}^{-1}$$

auf das Object o'. Wir sagen von dieser Operation, dass sie aus ω durch Transformation mit $\bar{\omega}$ hervorgegangen sei (vergl. Nr. 31, Bd. I, S. 101). Die Gesammtheit der aus allen Operationen von Ω durch Transformation mit $\bar{\omega}$ hervorgehenden Operationen bildet dann offenbar wiederum eine Gruppe Ω', sie bezieht sich ebenso auf das Object o', wie sich Ω auf das Object o bezieht; wir nennen diese beiden Gruppen Ω, Ω' einander ähnlich und sagen Ω' gehe aus Ω durch Transformation mit der Operation $\bar{\omega}$ hervor.

Mit Hülfe dieser Bezeichnungen können wir die Eigenschaft einer Gruppe mit einander paarweise inversen Operationen durch den Satz ausdrücken: Eine so beschaffene Gruppe reproducirt sich, wenn man dieselbe mit irgend einer in ihr enthaltenen Operation transformirt.

132. Gruppen mit endlicher Basis. Gruppe der Differentialgleichung.

In den eingangs angestellten, auf die Differentialgleichung (A) bezüglichen Betrachtungen ist das Object o nichts anderes wie das Fundamentalsystem $[y_x]$, die Operationen ω sind die Substitutionen, die

dieses Fundamentalsystem bei allen möglichen Umläufen von x erfährt, die von denselben gebildete Gruppe Ω soll (vergl. Nr. 130) als die Gruppe der Differentialgleichung (A) bezeichnet werden.

Diese Gruppe erfüllt offenbar die Forderung, dass ihre Operationen paarweise zu einander invers sind, denn mit jeder einem gewissen Umlaufe von x entsprechenden Substitution S ist auch die dem in entgegengesetztem Sinne beschriebenen Umlaufe entsprechende Substitution S^{-1} in der Gruppe enthalten. Die oben zur Erläuterung des Gruppencharakters herangezogene Eigenschaft, dass die Gesammtheit der Substitutionen (4) mit der Gesammtheit der Substitutionen S selbst identisch sei, erscheint also jetzt als Folge des Auftretens der zu jeder Substitution inversen in der Gruppe Ω.

Wählen wir an Stelle von $[y_x]$ ein anderes Fundamentalsystem $[z_x]$, welches mit $[y_x]$ durch die Substitution

$$[z_x] = B[y_x]$$

verknüpft ist, so erfährt $[z_x]$ bei den Umläufen von x die Substitutionen der aus Ω durch Transformation mit B entstehenden Gruppe, die wir durch das Symbol

$$B\Omega B^{-1}$$

darstellen wollen, und die also ebensowohl wie Ω selbst als die Gruppe der Differentialgleichung (A) angesehen werden kann.

Man kann auch die Gesammtheit der Umläufe, die die Variable x in der Fläche T vollzieht, als eine Gruppe ansehen, wenn man einen solchen Umlauf als Operation auffasst, die auf einen Punkt x der Ebene, der dann als Object fungirt, ausgeübt wird. Man kann dann sagen, die zu dem Fundamentalsystem $[y_x]$ gehörige Gruppe Ω sei aus dieser Gruppe der Umläufe transformirt mittelst einer Operation, die darin besteht, dass wir das Werthesystem der $[y_x]$ berechnen, welches zu dem Punkte x der Ebene gehört. Diese Operation ist also nichts anderes wie die Integration der Differentialgleichung (A).

Die Gruppe der Umläufe sowohl, wie die aus den Substitutionen (1) gebildete Gruppe Ω besitzt aber noch eine ausgezeichnete Eigenschaft.

Wir erhalten nämlich alle Substitutionen dieser Gruppe, wenn wir die ϱ Fundamentalsubstitutionen der Differentialgleichung und ihre inversen auf alle möglichen Arten mit einander componiren, ebenso entsteht die Gruppe der Umläufe von x innerhalb T durch wiederholte Ausführung der einfachen positiven und negativen Umkreisungen um die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$.

Allgemein können wir uns vorstellen, dass man von einer gewissen endlichen Anzahl von Operationen

(6) $$\omega_1, \ \omega_2, \cdots \omega_p$$

ausgeht und diese auf alle möglichen Arten mit einander componirt; die Gesammtheit der auf diese Weise entstehenden Operationen bildet dann offenbar eine Gruppe. Wenn in dem Systeme (6) zu jeder der darin vorkommenden Operationen auch ihre inverse enthalten ist, so genügt die aus (6) entspringende Gruppe der Forderung, dass ihr auch die inversen Operationen sämmtlicher in der Gruppe vorkommenden Operationen angehören. Es kann aber die Gruppe diese Forderung erfüllen, auch ohne dass das System (6) die inversen Operationen aller darin vorkommenden $\omega_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots p)$ in sich schliesst; dieser Fall tritt nämlich ein, wenn z. B. die zu einem $\omega_\varkappa$ inverse Operation $\omega_\varkappa^{-1}$ durch Composition der Operationen (6) erzeugt werden kann.

Wenn eine Gruppe durch Composition aus dem Systeme einer endlichen Anzahl von Operationen entspringt, so nennen wir dieses System eine Basis oder ein System erzeugender Operationen der Gruppe, und sagen von der Gruppe selbst, sie besitze eine endliche Basis. Die Basis einer solchen Gruppe ist nicht eindeutig bestimmt, sondern es kann verschiedene Systeme, die ihrerseits eine verschiedene Anzahl von Operationen enthalten können, geben, welche als Basis aufgefasst dieselbe Gruppe erzeugen. Hat man eine Basis vorgelegt, so kann dieselbe überflüssige Elemente enthalten, indem nämlich einzelne in der Basis auftretende Operationen schon durch Composition der übrigen erzeugt werden können. Enthält die Basis kein in diesem Sinne überflüssiges Element, so wollen wir sie eine reducirte Basis nennen.

Für die Gruppe der Differentialgleichung (A) erhalten wir also stets eine Basis, wenn wir ein System von Fundamentalsubstitutionen nebst ihren inversen betrachten. Ist der Punkt $x = \infty$ eine wesentliche singuläre Stelle von (A) und bezeichnet A_0 die Substitution, welche das Fundamentalsystem $[y_\varkappa]$ bei einem einfachen positiven Umlaufe von x um den unendlich fernen Punkt erfährt, so bilden auch die $\varrho + 1$ Substitutionen

(7) $$A_0, \ A_1, \cdots A_\varrho$$

eine Basis der Gruppe der Differentialgleichung, denn da (vergl. Nr. 122)

$$A_0 = (A_1 A_2 \cdots A_\varrho)^{-1} = A_\varrho^{-1} A_{\varrho-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}$$

ist, so hat man

$$A_\varkappa^{-1} = A_{\varkappa+1} \cdots A_\varrho A_0 A_1 \cdots A_{\varkappa-1}.$$

Ist $x = \infty$ keine wesentliche singuläre Stelle, also $A_0 = 1$, so bilden die ϱ Fundamentalsubstitutionen selbst schon eine Basis. Wir bemerken

aber gleich hier, dass die Basis (7), auch wenn A_0 nicht die identische Substitution bedeutet, nicht nothwendig eine reducirte sein muss.

Wir hatten den allgemeinen Gruppenbegriff formulirt, nachdem wir an der Gesammtheit der Substitutionen, die ein Fundamentalsystem bei allen möglichen Umläufen der unabhängigen Variabeln erfährt, den Gruppencharakter beobachtet hatten. Die Gesammtheit dieser Substitutionen, die Gruppe der Differentialgleichung, kann nun auch aufgefasst werden als der Inbegriff aller linearen Substitutionen, die ein Fundamentalsystem mit seinen sämmtlichen Zweigen verknüpfen. Wenn wir jetzt allgemein den Inbegriff aller Substitutionen betrachten, die ein beliebiges Fundamentalsystem nicht nur in seine Zweige, sondern überhaupt in alle anderen möglichen Fundamentalsysteme überführen, so gelangen wir zu einer neuen Gruppe, die in ihrem Charakter von der Gruppe Ω der Differentialgleichung wesentlich verschieden ist.

Der Uebergang von $[y_\varkappa]$ zu einem beliebigen anderen Fundamentalsysteme wird vermittelt durch die allgemeinste lineare Substitution

$$(8) \qquad y_i' = \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{i\varkappa} y_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

deren Coefficienten willkürliche nur der Ungleichheitsbedingung

$$(9) \qquad |\alpha_{i\varkappa}| \neq 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

unterworfene Constanten sind. Die Gesammtheit aller dieser linearen Substitutionen bildet offenbar auch eine Gruppe, da die Composition zweier derselben wieder eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante liefert. Diese Gruppe enthält auch die identische Substitution, und ihre Operationen sind paarweise invers, überdies enthält sie natürlich auch sämmtliche Operationen von Ω, oder wie wir sagen wollen, sie enthält die Gruppe Ω selbst. Es besteht aber zwischen der Natur der Gruppe Ω und der der Gruppe, die durch die Gesammtheit der Substitutionen (8) gegeben wird, ein tiefgreifender Unterschied; um denselben darzulegen, müssen wir an einige einfache Begriffe der Functionenlehre erinnern.

133. Allgemeines über Punktmengen. Abzählbare und continuirliche Gruppen.

Betrachtet man eine endliche Anzahl von complexen Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots x_n$, so soll ein System von Werthen dieser Veränderlichen als ein Punkt oder eine Stelle bezeichnet werden. Die Gesammtheit aller Stellen, die einer gewissen Definition gemäss bestimmt

werden, fassen wir in den Begriff einer **Punktmenge** P zusammen. Unter der **Umgebung** einer Stelle $(a_1, a_2, \cdots a_n)$ verstehen wir die Gesammtheit aller Stellen $(x_1, x_2, \cdots x_n)$, für welche

$$|x_1 - a_1| < \delta, \quad |x_2 - a_2| < \delta, \quad \cdots \quad |x_n - a_n| < \delta,$$

wo δ eine bestimmte positive reale Grösse bedeutet; oder wenn

$$x_\varkappa = x_\varkappa' + i x_\varkappa'', \quad a_\varkappa = a_\varkappa' + i a_\varkappa'' \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

gesetzt, und unter den $x_\varkappa'$, $x_\varkappa''$, $a_\varkappa'$, $a_\varkappa''$ reale Grössen verstanden werden, so kann als die Umgebung der Stelle $(a_1, a_2, \cdots a_n)$ auch die Gesammtheit derjenigen Stellen $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ definirt werden, für welche

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \{(x_\varkappa' - a_\varkappa')^2 + (x_\varkappa'' - a_\varkappa'')^2\} < \varrho^2,$$

wo ϱ eine positive reale Grösse bedeutet.

Man sagt von einer Stelle

$$x = (x_1, x_2, \cdots x_n),$$

sie liege **innerhalb** einer gewissen Punktmenge P, wenn nicht nur x selbst, sondern auch jede Stelle in einer gewissen Umgebung von x der Punktmenge angehört; ebenso sagt man, die Stelle x liege **ausserhalb** der Punktmenge P, wenn weder x noch die Stellen einer gewissen Umgebung von x zur Punktmenge P gehören.

Eine Stelle x heisst eine **Grenzstelle** von P, wenn sich in jeder noch so kleinen Umgebung von x Stellen befinden, die der Punktmenge P angehören. Von einer Grenzstelle bleibt es dahingestellt, ob sie selbst zur Punktmenge gehört oder nicht.

Es kann Punktmengen geben, die keine einzige innerhalb derselben gelegene Stelle besitzen, solche Punktmengen heissen **discrete (Punktmengen)**. Dagegen besitzt jede aus unendlich vielen Punkten bestehende Punktmenge nothwendig Grenzstellen. Die Gesammtheit der Grenzstellen einer Punktmenge P bildet ihrerseits wieder eine Punktmenge, die man nach Herrn G. **Cantor** die **erste Ableitung** der Punktmenge P nennt und durch P' bezeichnet. Wenn jeder Punkt der ersten Ableitung P' selbst zu P gehört, so heisst P eine **abgeschlossene**, im entgegengesetzten Falle eine **unabgeschlossene Punktmenge**.

Ist P eine abgeschlossene Punktmenge, so liegt jeder nicht zu P gehörige Punkt A ausserhalb P. Es giebt also eine gewisse Umgebung von A, die so beschaffen ist, dass auch kein Punkt dieser Umgebung zu P gehört. Nimmt man diese Umgebung möglichst gross, so bezeichnet man sie als die **absolute Umgebung** von A in Bezug auf P.

Sei A_1 ein Punkt der absoluten Umgebung von A, so liegt auch A_1 ausserhalb P und besitzt folglich ebenfalls eine bestimmte absolute Umgebung; sei A_2 ein Punkt dieser absoluten Umgebung von A_1, so liegt auch A_2 ausserhalb P u. s. w. Von der Gesammtheit der Punkte, zu denen man auf diese Weise von A ausgehend gelangen kann, sagt man, sie hängen mit A zusammen. Diese Gesammtheit bildet ein Continuum. Man kann das Continuum auch wie folgt definiren.

Jede aus lauter inneren Punkten bestehende Punktmenge, die so beschaffen ist, dass sich zwischen irgend zwei Punkten derselben eine endliche Anzahl von Punkten so einschalten lässt, dass jeder dieser Punkte in der Umgebung des vorhergehenden liegt, d. h. mit anderen Worten, jede aus lauter inneren Punkten bestehende Punktmenge, deren sämmtliche Stellen unter einander zusammenhängen, bildet ein Continuum.

Eine aus lauter inneren Punkten bestehende Punktmenge, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Gesammtheit aller Stellen, die nicht zu einer gewissen abgeschlossenen Punktmenge P gehören, zerfällt in eine endliche oder unendliche Anzahl von Continuis, von denen man sagt, sie seien durch die Punktmenge P begrenzt. Ueberhaupt heisst ein jedes Continuum, welches nicht aus der Gesammtheit aller Punkte $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ besteht, ein begrenztes, und zwar ein abgeschlossenes oder unabgeschlossenes, je nachdem seine Grenzstellen dem Continuum hinzugezählt werden oder nicht*). Bei Festhaltung der vorhin gegebenen Definition des Continuums ist also stets ein unabgeschlossenes Continuum gemeint.

Die Gesammtzahl der Stellen einer complexen Variabeln x, an denen sich ein System von n monogenen Functionen $y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x)$ dieser Variabeln bestimmt verhält (Nr. 7, Bd. I, S. 16) bildet ein im Allgemeinen unabgeschlossenes Continuum, welches von den Unbestimmtheitsstellen jener Functionen begrenzt wird; die Gesammtheit der Stellen, wo sich jene Functionen regulär verhalten, bildet stets ein unabgeschlossenes Continuum, dessen Begrenzung von der Punktmenge der singulären Stellen gebildet wird.

Wenn man die Elemente einer irgendwie definirten Menge P so anordnen kann, dass jedes Element dieser Menge einer der Zahlen $1, 2, 3, \cdots\cdots$ eindeutig zugeordnet erscheint, so sagt man, die Menge P sei abzählbar. Ein Continuum kann niemals eine abzählbare Punktmenge bilden, sondern jede abzählbare Punktmenge ist discret.

---

*) Wir machen ausdrücklich auf den Unterschied zwischen „Grenzstellen" und „Punkten der Begrenzung" aufmerksam.

Hat man ein System von n monogenen Functionen

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots\ y_n(x)$$

einer complexen Variabeln x und betrachtet die Gesammtheit der Werthesysteme oder Punkte $(y_1, y_2, \cdots y_n)$, die zu einem regulären Werthe x der unabhängigen Variabeln gehören, so ist die von diesen Werthesystemen gebildete Punktmenge P stets abzählbar, wenn sich das von den regulären Stellen der Functionen $y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x)$ in der x-Ebene gebildete Continuum durch eine abzählbare Menge von Querschnitten $l_1, l_2, l_3, \cdots\cdots$ in ein einfach zusammenhängendes $\overline{T}$ verwandeln lässt, innerhalb dessen die Functionen $y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x)$ eindeutig definirt sind.

Wir wollen diesen Satz nur in dem für uns allein in Betracht kommenden Falle beweisen, wo die Anzahl der Querschnitte $l_1, l_2, \cdots$ eine endliche ist. Sei ϱ diese Anzahl, dann entsteht also jedes System von Zweigen der Functionen $y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x)$ aus einem solchen innerhalb $\overline{T}$ eindeutig definirten Systeme, indem man x Wege beschreiben lässt, die die Querschnitte beliebig oft und in beliebiger Aufeinanderfolge überschreiten. Wir betrachten zwei Wege von x, die durch stetige Deformation innerhalb $\overline{T}$ aus einander hervorgehen, als nicht verschieden und bezeichnen mit $\omega_\varkappa$ einen von x ausgehenden geschlossenen Weg, der den Querschnitt $l_\varkappa$ einmal in positivem Sinne überschreitet, mit $\omega_\varkappa^{-1}$ den in entgegengesetztem Sinne durchlaufenen Weg $\omega_\varkappa$. Dann bildet die Gesammtheit aller für die Fortsetzung unseres Functionssystems in Betracht kommenden geschlossenen Wege von x eine Gruppe (vergl. Nr. 132, S. 5), für welche die 2ϱ Operationen

$$\omega_\varkappa,\quad \omega_\varkappa^{-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho)$$

eine Basis darstellen. Wenn wir nachweisen, dass die Gesammtheit der Operationen dieser Gruppe Ω eine abzählbare Menge ist, so ist damit auch unser Satz bewiesen.

Wir führen diesen Nachweis, indem wir eine Methode angeben, mit Hülfe deren sich die Operationen der Gruppe Ω den ganzen Zahlen 1, 2, 3, $\cdots\cdots$ eindeutig zuordnen lassen. Jede Operation von Ω lässt sich in der Form

$$\omega = \omega_\alpha^{\lambda_\alpha} \omega_\beta^{\lambda_\beta} \cdots \cdot \omega_\nu^{\lambda_\nu}$$

darstellen, wo $\alpha, \beta, \cdots \nu$ Zahlen der Reihe $1, 2, \cdots \varrho$ bedeuten, von denen nicht zwei unmittelbar aufeinander folgende einander gleich sind, während die $\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \cdots \lambda_\nu$ irgendwelche ganzzahlige positive oder negative Werthe haben. Man nennt die Summe

$$|\lambda_\alpha| + |\lambda_\beta| + \cdots + |\lambda_\nu|$$

das Gewicht der Operation ω. Wir denken uns nun zunächst die Operationen von Ω nach Classen geordnet, so dass in einer Classe alle Operationen mit demselben Gewicht vereinigt sind; die Anzahl der Operationen innerhalb einer Classe ist dann eine endliche, wir können dieselben also in einer bestimmten Reihenfolge anordnen. Durch die Anordnung der Classen einerseits nach der wachsenden Höhe der Gewichte, und die Anordnung der Operationen innerhalb einer Classe andererseits, ist aber die gesammte Anordnung aller Operationen der Gruppe Ω gegeben.

Wir sagen von einer Gruppe überhaupt, sie sei eine abzählbare, wenn die Menge ihrer Operationen eine abzählbare ist; die eben durchgeführte Betrachtung lehrt, dass jede Gruppe, die eine endliche Basis hat (Nr. 132, S. 6), eine abzählbare Gruppe ist. Die Bezeichnung abzählbare Gruppe ist nur als Abkürzung für das schwerfällige aber genauere: „Gruppe einer abzählbaren Menge von Operationen“ anzusehen, ebenso wie man eine Gruppe, deren Operationen nur in endlicher Anzahl vorhanden sind, schlechtweg eine endliche Gruppe nennt.

Kehren wir zu der Betrachtung der Gruppe Ω von linearen Substitutionen zurück, durch deren Operationen ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ der Differentialgleichung (A) mit seinen sämmtlichen Zweigen verknüpft ist, so können wir sagen:

Die Gruppe Ω unserer Differentialgleichung (A) ist eine abzählbare.

Hierzu ist noch Folgendes zu bemerken.

Wenn wir, der bequemeren Ausdrucksweise wegen, die complexen Grössen $y_1, y_2, \cdots y_n$ als die Coordinaten eines Punktes oder einer Stelle in der complexen n-fachen Mannigfaltigkeit auffassen, so wird in dieser Mannigfaltigkeit dadurch, dass wir für die $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem unserer Differentialgleichung (A) nehmen, ein eindimensionales Gebilde, oder wie man sich auch ausdrückt, ein Gebilde $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe fixirt. Wir wollen dieses Gebilde als ein Integralgebilde, oder wohl auch als eine Integralcurve $[y_x]$ bezeichnen und sagen, das zu einem regulären Punkte x gehörige Werthesystem des Fundamentalsystems $[y_n]$ stelle einen Punkt dieser Integralcurve dar.

Durch die Substitutionen der Gruppe Ω wird dann jeder Punkt der Integralcurve $[y_x]$ in eine Reihe gewisser anderer Punkte derselben Curve transformirt, und die so auf der Integralcurve entstehende Punktmenge ist eine abzählbare.

Bezeichnet $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$ irgend eine Stelle der n-fachen complexen Mannigfaltigkeit, so können wir offenbar durch diesen Punkt unzählig

viele Integralcurven hindurchlegen, sofern nicht alle $\zeta_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots n)$ gleich Null sind, d. h. falls der betrachtete Punkt nicht der Nullpunkt ist. Wir haben zu dem Ende nur ein Fundamentalsystem $z_1, z_2, \cdots z_n$ herzustellen, dessen Elemente in einem noch beliebig zu wählenden regulären Punkte $x = x_0$ die Werthe

$$z_\varkappa = \zeta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

annehmen; solcher Fundamentalsysteme giebt es dann noch unendlich viele, da ja für die $(n - 1)$ ersten Ableitungen der $z_\varkappa$ im Punkte $x = x_0$ noch willkürliche Werthe vorgeschrieben werden können.

Wenn für das Fundamentalsystem $[z_\varkappa]$

$$[z_\varkappa] = B[y_\varkappa]$$

ist, wo B eine lineare Substitution bedeutet, so transformiren die Substitutionen der Gruppe

$$B\Omega B^{-1}$$

jeden Punkt der Integralcurve $[z_\varkappa]$ in eine Reihe von Punkten, die auch wieder eine abzählbare Punktmenge bilden, und ebenso ist die Punktmenge, welche aus irgend einem Punkte der Integralcurve $[z_\varkappa]$ durch die Substitutionen der Gruppe Ω selbst hervorgeht, eine abzählbare. Die Substitutionen von Ω erzeugen also nicht nur aus den Punkten der Integralcurve $[y_\varkappa]$, sondern ebenso auch aus jedem beliebigen anderen Punkte der complexen n-fachen Mannigfaltigkeit — den Nullpunkt ausgeschlossen — eine abzählbare Menge von Punkten, diese liegen aber nicht immer mit dem Ausgangspunkte auf derselben Integralcurve.

Die Substitutionen (8), deren Coefficienten der Ungleichung (9) (Nr. 132, S. 7) Genüge leisten, sind so beschaffen, dass man mit Hülfe derselben von jeder Integralcurve zu jeder anderen übergehen kann. Man kann demnach durch die Operationen der von der Gesammtheit der Substitutionen (8) gebildeten Gruppe auch aus jedem Punkte der complexen n-fachen Mannigfaltigkeit — den Nullpunkt immer ausgeschlossen — jeden beliebigen anderen Punkt dieser Mannigfaltigkeit und somit ein Continuum von Punkten erzeugen. Diese Gruppe ist also jedenfalls nicht abzählbar, man sagt von derselben, sie sei continuirlich.

Zweites Kapitel.

134. Begriff der continuirlichen Transformationsgruppe.

Die Theorie der continuirlichen Gruppen ist in der neueren Zeit besonders von Herrn Lie ausgebildet und mit der Theorie der Differentialgleichungen in enge Beziehung gesetzt worden. Wir werden im Folgenden einiges aus den Grundlagen der Lie'schen Theorie zu entwickeln haben und machen uns darum zunächst mit den hauptsächlichen Bezeichnungen, deren sich Herr Lie bedient, bekannt.

Ist ein System von n Functionen $f_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots n)$ der n veränderlichen Grössen $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ gegeben, welches überdies noch von gewissen ebenfalls veränderlichen Parametern $p_1, p_2, \cdots p_r$ abhängt, so definiren die Gleichungen

$$(10) \qquad \bar{\eta}_\varkappa = f_\varkappa(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n \,|\, p_1, p_2, \cdots p_r) = f_\varkappa(\eta \,|\, p) \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

eine **Transformation** der $[\eta_\varkappa]$ in die $[\bar{\eta}_\varkappa]$, wenn wir uns die $p_1, p_2, \cdots p_r$ fest, und eine **continuirliche Schaar von Transformationen**, wenn wir uns die Parameter veränderlich denken.

Damit es möglich sei, die $[\eta_\varkappa]$ auch umgekehrt durch die $[\bar{\eta}_\varkappa]$ darzustellen, d. h. also damit die Gleichungen (10) eine Auflösung nach den $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ zulassen,

$$(11) \qquad \eta_\varkappa = F_\varkappa(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \cdots \bar{\eta}_n \,|\, p_1, p_2, \cdots p_r), \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

ist bekanntlich nothwendig und hinreichend, dass die Functionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial f_\varkappa}{\partial \eta_i} \right| \qquad (\varkappa, i = 1, 2, \cdots n)$$

nicht identisch verschwindet.

Die n Functionen $f_\varkappa$ hängen von den r Parametern $p_1, p_2, \cdots p_r$ **wesentlich** ab, d. h. sie lassen sich nicht als Functionen von weniger als r Functionen der $p_1, p_2, \cdots p_r$ darstellen, wenn sie nicht sämmtlich einer partiellen Differentialgleichung von der Form

$$\sum_{i=1}^{r} \varphi_i(p_1, p_2, \cdots p_r) \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0$$

genügen, deren Coefficienten φ_i blosse Functionen der $p_1, p_2, \cdots p_r$ sind. Denn damit eine Function $f(p_1, p_2, \cdots p_r)$ der r Grössen p_i nur von $r - \varrho$ Functionen dieser Grössen

$$q_\lambda(p_1, \cdots p_r) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots r - \varrho)$$

abhängt, d. h. in der Form

$$f(p_1, \cdots p_r) = g(q_1, \cdots q_{r-\varrho})$$

darstellbar sei, ist erforderlich, dass $f(p_1, \cdots p_r)$ die ϱ Gleichungen

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{r} \varphi_{i\lambda}(p_1, p_2 \cdots p_r) \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \varrho)$$

erfüllt, wo die $\varphi_{i\lambda}(p_1, p_2, \cdots p_r)$ wohlbestimmte Functionen ihrer Argumente bedeuten, die sich aus den Determinanten des rechteckigen Systems

$$\left(\frac{\partial q_i}{\partial p_\lambda}\right) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots r - \varrho \\ \lambda = 1, 2, \cdots r \end{pmatrix}$$

in einfacher Weise zusammensetzen.

Bemerken wir gleich, dass wenn $f(p_1, \cdots p_r)$ auch nicht als Function von weniger als $r - \varrho$ Functionen der $p_1, \cdots p_r$ dargestellt werden kann, keine von den Gleichungen (12) unabhängige lineare partielle Differentialgleichung derselben Form durch $f(p_1, \cdots p_r)$ befriedigt werden darf, so dass also in diesem Falle die Gleichungen (12) ein sogenanntes vollständiges System bilden müssen; wir kommen später auf den von Jacobi und Clebsch herrührenden Begriff des vollständigen Systems noch ausführlicher zurück.

Es mögen in den Gleichungen (10) die r Parameter $p_1, p_2, \cdots p_r$ wesentliche sein. Seien

$$\left.\begin{aligned} \eta_\varkappa' &= f_\varkappa(\eta \mid p') \\ \eta_\varkappa'' &= f_\varkappa(\eta \mid p'') \end{aligned}\right\} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

irgend zwei Transformationen der Schaar (10); denken wir uns dieselben hintereinander ausgeführt, d. h. bilden wir

$$(13) \qquad \eta_\varkappa^{(3)} = f_\varkappa(\eta' \mid p'') \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

so werden die Transformationen der Schaar (10) eine Gruppe bilden, wenn die componirte Transformation (13) allemal auch der Schaar selbst angehört, d. h. wenn man hat

$$f_\varkappa(\eta' \mid p'') = f_\varkappa(\eta \mid p^{(3)}) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo die $p_1^{(3)}, p_2^{(3)}, \cdots p_r^{(3)}$ wohlbestimmte Functionen der $p_1', p_2', \cdots p_r'$, $p_1'', p_2'', \cdots p_r''$ sind. Diese Gruppe heisst dann nach Herrn Lie eine r-gliedrige continuirliche Transformationsgruppe, und es stellen dann, wie leicht einzusehen ist, auch die durch Auflösung der Gleichungen (10) entstandenen Gleichungen (11) eine r-gliedrige continuirliche Transformationsgruppe dar. Wenn insbesondere diese letztere Gruppe mit der ursprünglichen identisch ist, so enthält also die durch die Gleichungen (10) dargestellte Gruppe zu jeder ihrer Transformationen auch deren inverse, sie besteht aus paarweise inversen Transformationen, und enthält folglich auch die identische Transformation

$$\bar{\eta}_\varkappa = \eta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n).$$

Mit Benutzung dieser Terminologie können wir also sagen: Die Gleichungen (8) (S. 7) stellen uns (falls die $\alpha_{i\varkappa}$ durch die Ungleichung (9) beschränkt werden, was wir im Folgenden stets stillschweigend voraussetzen, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich hervorgehoben wird) eine n^2-gliedrige continuirliche Transformationsgruppe L mit paarweise inversen Transformationen dar.

An dieser Gruppe, der sogenannten allgemeinen (homogenen) linearen Gruppe von n Veränderlichen, lassen sich einige der fundamentalen Begriffe, deren Einführung man Herrn Lie verdankt, in besonders einfacher Weise erläutern; wir brauchen die Gruppe L zu diesem Zwecke nur mit den Entwickelungen des zweiten Abschnittes in Verbindung zu setzen.

135. Die allgemeine lineare homogene Gruppe. Erweiterung. Differentialinvarianten. Infinitesimale Transformation.

Indem wir vorläufig von der Differentialgleichung (A) mit rationalen Coefficienten abstrahiren, betrachten wir, wie in der Nr. 14, die $y_1, y_2, \cdots y_n$ als irgendwie gegebene monogene Functionen von x, zwischen denen keine homogene lineare Beziehung mit von x unabhängigen Coefficienten besteht.

Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(1) \qquad (-1)^n D(y, y_1, y_2, \cdots y_n) = 0,$$

der (vergl. Nr. 14) die $y_1, y_2, \cdots y_n$ Genüge leisten, wird dann auch durch alle Functionen $[\eta_\varkappa]$ befriedigt, die aus den $[y_\varkappa]$ durch die Transformationen der Gruppe L hervorgehen, und wir wissen überdies, dass die Coefficienten von (1), d. h. die Determinantenquotienten

(2) $$p_\varkappa = (-1)^n \frac{D_\varkappa(y_1, y_2, \cdots y_n)}{D(y_1, y_2, \cdots y_n)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

absolut ungeändert bleiben, wenn wir auf die $[y_\varkappa]$ irgend eine Transformation der Gruppe L ausüben, d. h. wenn wir das Fundamentalsystem $[y_\varkappa]$ durch irgend ein anderes Fundamentalsystem $[\eta_\varkappa]$ ersetzen. Diese Determinantenquotienten sind also Invarianten und zwar Differentialinvarianten n^{ter} Ordnung unserer Gruppe L, weil sie nicht nur die Grössen $[y_\varkappa]$ selbst, sondern auch noch deren Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung enthalten. Aus dem in der Nr. 15 bewiesenen Appell'schen Satze folgt, dass jede rationale Function der $[y_\varkappa]$ und ihrer Ableitungen, die bei den Transformationen von L ungeändert bleibt, d. h. also jede Differentialinvariante der Gruppe L, als rationale Function der $p_1, p_2, \cdots p_n$ und ihrer Ableitungen dargestellt werden kann. Es werden also die n Determinantenquotienten als ein System unabhängiger Differentialinvarianten von L bezeichnet werden müssen.

Wir können aber die Gruppe L leicht durch eine andere ersetzen, für welche die Ausdrücke (2) nicht mehr Differentialinvarianten, sondern wirkliche Invarianten sind. Differentiiren wir nämlich die Gleichungen

(3) $$\eta_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{i\varkappa} y_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

die uns die Gruppe L darstellen, ν-mal nach x, so bestimmen die Gleichungen

(4) $$\eta_i^{(\lambda)} = \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{i\varkappa} y_\varkappa^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots \nu)$$

eine Gruppe, die wir nach Herrn Lie die ν-mal erweiterte Gruppe L nennen und durch $L^{(\nu)}$ bezeichnen wollen. Die Operationen der Gruppe $L^{(\nu)}$ sind also Transformationen des Systems der $n(\nu + 1)$ Grössen

$$y_i^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots \nu;\ i = 1, 2, \cdots n),$$

eine Differentialinvariante ν^{ter} Ordnung von L ist demnach eine einfache Invariante von $L^{(\nu)}$, d. h. eine Function der durch die Operationen von $L^{(\nu)}$ transformirten Grössen, die bei Ausübung irgend einer Transformation dieser Gruppe in sich selbst übergeht.

Bedeutet

$$R\left(y_1, \cdots y_n, y_1', \cdots y_n', \cdots, y_1^{(\nu)}, \cdots y_n^{(\nu)}\right) = R(y)$$

eine solche Differentialinvariante ν^{ter} Ordnung von L, so besteht die Identität

(5) $$R(y) = R(\eta),$$

wenn die $\eta_i^{(\lambda)}$ mit den $y_i^{(\lambda)}$ durch die Gleichungen (4) verknüpft sind. Es muss sich folglich die Gleichung (5) durch Elimination der $\alpha_{i\varkappa}$ aus den Gleichungen (4) ergeben. Da aber diese Gleichungen für Werthe der $\alpha_{i\varkappa}$, die der Ungleichung (9) der Nr. 132 (S. 7) Genüge leisten, offenbar algebraisch unabhängig von einander sind, so ist eine Elimination der n^2 Grössen $\alpha_{i\varkappa}$ nicht möglich, wenn $\nu < n$ ist, d. h. es kann keine Differentialinvariante von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung geben. Für $\nu = n$ ergiebt die Elimination der $\alpha_{i\varkappa}$ zwischen je n^2+1 der $n(n+1)$ Gleichungen (4) genau n von einander unabhängige Beziehungen zwischen den $y_i^{(\lambda)}$ und den $\eta_i^{(\lambda)}$, entsprechend den n unabhängigen Differentialinvarianten n^{ter} Ordnung (2).

Wir können nun leicht ein System partieller Differentialgleichungen aufstellen, welches durch jede Differentialinvariante ν^{ter} Ordnung $R(y)$ befriedigt wird, und dessen jede Lösung umgekehrt auch eine solche Differentialinvariante darstellt.

Soll nämlich $R(y)$ eine Differentialinvariante ν^{ter} Ordnung bedeuten, so muss $R(\eta)$ mit $R(y)$ identisch, d. h. also von den $\alpha_{i\varkappa}$ unabhängig sein. Nun ist aber

$$\frac{\partial R(\eta)}{\partial \alpha_{i\varkappa}} = y_\varkappa \frac{\partial R(\eta)}{\partial \eta_i} + y_\varkappa' \frac{\partial R(\eta)}{\partial \eta_i'} + \cdots + y_\varkappa^{(\nu)} \frac{\partial R(\eta)}{\partial \eta_i^{(\nu)}},$$

diese Ausdrücke müssen also für $i, \varkappa = 1, 2, \cdots n$ verschwinden. Das auf diese Weise entstehende Gleichungssystem ist aber offenbar dem folgenden äquivalent:

(6) $$y_\varkappa \frac{\partial R(y)}{\partial y_i} + y_\varkappa' \frac{\partial R(y)}{\partial y_i'} + \cdots + y_\varkappa^{(\nu)} \frac{\partial R(y)}{\partial y_i^{(\nu)}} = 0, \quad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

und dieses System partieller Differentialgleichungen ist also dasjenige, dessen Existenz wir behauptet hatten. Die Thatsache, dass die Invariante $R(y)$ der Gruppe $L^{(r)}$ den Gleichungen (6) genügt, können wir aber noch etwas anders aussprechen.

Wenn den Coefficienten $\alpha_{i\varkappa}$ der Transformation (4) Werthe beigelegt werden, die sich von den der identischen Transformation entsprechenden Werthen

$$\alpha_{i\varkappa} = \delta_{i\varkappa},$$

wo wie gewöhnlich

$$\delta_{i\varkappa} = 0 \quad \text{für } i \neq \varkappa, \quad \delta_{ii} = 1, \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

gesetzt wurde, nur unendlich wenig unterscheiden, so gehen die $y_i^{(\lambda)}$ in unendlich wenig von denselben verschiedene Grössen über, oder wie

wir sagen wollen, die $y_i^{(\lambda)}$ erfahren eine **infinitesimale Transformation**.

Sei

$$\bar{\eta}_i^{(\lambda)} = \sum_{x=1}^{n} (\delta_{ix} + d\alpha_{ix}) y_x^{(\lambda)} \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \cdots \nu \\ i = 1, 2, \cdots n \end{pmatrix}$$

eine solche infinitesimale Transformation, also die $d\alpha_{ix}$ unendlich kleine Grössen, so ist

$$dy_i^{(\lambda)} = \bar{\eta}_i^{(\lambda)} - y_i^{(\lambda)} = \sum_{x=1}^{n} y_x^{(\lambda)} d\alpha_{ix},$$

und irgend eine Function $f(y)$ der $y_i^{(\lambda)}$ verwandelt sich bei Anwendung dieser Transformation in

$$f(\bar{\eta}) = f(y) + \sum_{i,x=1}^{n} d\alpha_{ix} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} y_x + \frac{\partial f}{\partial y_i'} y_x' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_i^{(\nu)}} y_x^{(\nu)} \right).$$

Das Bestehen der partiellen Differentialgleichungen (6) besagt also, dass die Function $R(y)$, die denselben Genüge leistet, bei den infinitesimalen Transformationen der Gruppe $L^{(\nu)}$ ungeändert bleibt, und zwar sehen wir zugleich, dass sich alle infinitesimalen Transformationen der Gruppe aus den n^2 besonderen zusammensetzen lassen, die wir erhalten, wenn wir der Reihe nach immer nur ein $d\alpha_{ix}$ von Null verschieden und alle übrigen streng gleich Null wählen. Wir bezeichnen mit Herrn Lie diese besonderen n^2 infinitesimalen Transformationen durch die Symbole

(7) $$\mathfrak{X}_{ix}^{(\nu)} f = \sum_{\lambda=0}^{\nu} y_x^{(\lambda)} \frac{\partial f}{\partial y_i^{(\lambda)}} \qquad (i, x = 1, 2, \cdots n),$$

die infinitesimalen Transformationen der ursprünglichen Gruppe L werden also insbesondere durch die Symbole

(8) $$\mathfrak{X}_{ix} f = y_x \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

darzustellen sein.

Wir werden sehr bald die Begriffe infinitesimale Transformation und Differentialinvariante auch für die allgemeinen continuirlichen Gruppen von Transformationen, wie wir sie in der Nr. 134 (S. 13) definirt hatten, zu erörtern haben, vorher wollen wir aber auch den daselbst dargelegten Gruppenbegriff noch in einem wesentlichen Punkte verallgemeinern. Zu einer solchen Verallgemeinerung gelangen wir ganz naturgemäss, wenn wir unter dem jetzt gewonnenen Gesichtspunkte der Gruppentheorie die Analogie einer Differentialgleichung von der Form (1) mit einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades, die uns schon im zweiten Abschnitte geleitet hatte, näher in's Auge fassen.

136. Analogie mit algebraischen Gleichungen. Rationale Differentialfunctionen der Elemente eines Fundamentalsystems.

Wir hatten schon in den Nrn. 14 ff. darauf hingewiesen, dass die Determinantenquotienten (2), oder wie wir jetzt allgemein sagen können, die Differentialinvarianten der Gruppe L in Bezug auf die n Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ eine ähnliche Rolle spielen, wie die symmetrischen Functionen von n unbestimmten Grössen in der Algebra. Weiter können wir jetzt die Gruppe L der Gruppe der $n!$ Permutationen von n Unbestimmten gegenüberstellen und dann Folgendes erwägen.

Für die Theorie der algebraischen Gleichungen war es von ausserordentlicher Wichtigkeit, dass Lagrange, Vandermonde und Cauchy nebst den symmetrischen Functionen noch andere Functionen der n unbestimmten Grössen in den Kreis ihrer Betrachtungen zogen, solche Functionen nämlich, die nicht bei allen Permutationen ungeändert bleiben. Betrachtet man eine derartige Function, so scheiden sich die $n!$ Permutationen in solche, die eine Aenderung der Function bewirken und in solche, bei denen die Function invariant bleibt. Die letzteren bilden dann wieder eine Gruppe, die als Untergruppe in der Gruppe der $n!$ Permutationen enthalten ist, und die Anzahl der Permutationen dieser Untergruppe ist ein Theiler r von $n!$. Die betrachtete Function genügt dann nebst allen aus ihr durch die $n!$ möglichen Permutationen hervorgehenden Functionen einer Gleichung vom Grade $\frac{n!}{r}$, deren Coefficienten symmetrische Functionen sind, und man nennt dann diese Gleichung eine Resolvente der Gleichung, deren Wurzeln die n unbestimmten Grössen sind, von denen man ausging.

Wollen wir diesen Gedankengang auf unsere Theorie der linearen Differentialgleichungen übertragen, so können wir mit Herrn Vessiot an Stelle der invarianten Functionen (2) andere Functionen der $y_1, y_2, \cdots y_n$ und ihrer Ableitungen betrachten, und dann nach derjenigen Untergruppe der Gruppe L fragen, die dieselben ungeändert lässt. Indem wir in die Erörterung dieser Frage eintreten, können wir zunächst eine Vereinfachung derselben Platz greifen lassen.

Sei nämlich

$$\Re\left(y_1, \cdots y_n; \cdots; y_1^{(\nu)}, \cdots y_n^{(\nu)}\right) = \Re(y)$$

irgend eine rationale Function der $y_\varkappa$ und ihrer Ableitungen bis zur ν^{ten} Ordnung oder, wie wir kurz sagen wollen, eine rationale Differentialfunction der $y_\varkappa$, dann können wir uns, falls $\nu > n - 1$ ist, die Ableitungen von höherer als der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung durch die

Ableitungen bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung und die $p_1, \cdots p_n$ nebst deren Ableitungen ausgedrückt denken. Auf diese Weise werde

$$\mathfrak{R}(y) = R\left(y_1, \cdots y_n, \cdots y_1^{(n-1)}, \cdots y_n^{(n-1)}; p_1, \cdots p_n\right) = R(y; p),$$

wo also jetzt $R(y; p)$ die Ableitungen der $y_\varkappa$ nur bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, dagegen im Allgemeinen noch die $p_\varkappa$ und ihre Ableitungen enthält.

Da es sich wesentlich um die Untersuchung derjenigen Transformationen

$$\eta_i^{(\lambda)} = \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{i\varkappa} y_\varkappa^{(\lambda)} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots n \\ \lambda = 0, 1, \cdots \nu \end{pmatrix} \tag{9}$$

handeln wird, die eine solche rationale Differentialfunction ungeändert lassen, so wollen wir annehmen, die Transformation (9) habe in Bezug auf $\mathfrak{R}(y)$ diese Eigenschaft, so dass also

$$\mathfrak{R}(\eta) = \mathfrak{R}(y)$$

ist. Dann ist aber, da die $p_1, \cdots p_n$ nebst ihren Ableitungen bei allen Transformationen der Gruppe L ungeändert bleiben, auch

$$R(y; p) = R(\eta; p), \tag{10}$$

und zwar muss diese Gleichung eine in den $y_\varkappa$ nebst ihren Ableitungen, sowie in den $p_\varkappa$ nebst ihren Ableitungen identische sein. Wäre das nämlich nicht der Fall, so könnte die Gleichung (10) als eine Differentialgleichung von $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung etwa für y_1 aufgefasst werden, d. h. aber, da y_1 ein sonst willkürliches Integral der Differentialgleichung (1) ist, es gäbe eine Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, der sämmtliche Integrale, also auch das allgemeine Integral von (1) Genüge leisten. Das ist aber nicht möglich, da das allgemeine Integral von (1) n wesentliche willkürliche Constanten enthält.

Wenn also $\mathfrak{R}(y)$ bei Ausübung der Transformation (9) ungeändert bleibt, so gilt das Gleiche auch von $R(y; p)$, und zwar ist es dabei gleichgültig, ob wir die in dem letzteren Ausdrucke auftretenden $p_1, \cdots p_n$ und deren Ableitungen wirklich als Functionen von x auffassen, oder ob wir dieselben durch irgendwelche Constanten ersetzen.

Hierauf und auf die in der Nr. 135 (S. 17) gemachte Bemerkung, dass es keine Differentialinvariante von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung der allgemeinen linearen homogenen Gruppe L geben könne, lässt sich ein einfacher Beweis des bereits an derselben Stelle (S. 16) erwähnten Satzes gründen, des Satzes nämlich, dass jede Differentialinvariante von L rational durch die $p_1, p_2, \cdots p_n$ und deren Ableitungen dargestellt werden kann.

Sei nämlich $\mathfrak{R}(y)$ eine Differentialinvariante von L, dann gilt, wie oben gezeigt wurde, das Gleiche auch von dem Ausdrucke

$$R(y;\,p);$$

dieser enthält aber die Ableitungen der $y_1, y_2, \cdots y_n$ höchstens bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, er wäre also eine Differentialinvariante $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von L und eine solche kann es nicht geben. Also darf $R(y;\,p)$ die $y_1, y_2, \cdots y_n$ und ihre Ableitungen überhaupt nicht mehr enthalten, das heisst, dieser Ausdruck ist eine rationale Function der $p_1, p_2, \cdots p_n$ und ihrer Ableitungen.

Wir lernen dadurch zugleich eine Methode kennen, um für eine vorgelegte Differentialinvariante von L ihren Ausdruck in den $p_1, p_2, \cdots p_n$ wirklich herzustellen. Man hat nämlich nur die Ableitungen der y_x von höherer als der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung wegzuschaffen, dann müssen die Ableitungen niedrigerer Ordnung von selbst herausfallen.

Zufolge der vorhin angestellten Erwägungen können wir uns auf die Untersuchung von Differentialfunctionen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung beschränken, deren Abhängigkeit von den $p_1, \cdots p_n$ bei vielen Fragen auch ausser Betracht gelassen werden kann.

Die Gesammtheit der Transformationen (9), die eine solche rationale Differentialfunction $R(y)$ ungeändert lassen, bildet offenbar eine Gruppe $\mathfrak{G}$. Um die Transformationen dieser Gruppe zu charakterisiren, denken wir uns in die Gleichung

$$R(y) = R(\eta) \tag{11}$$

für die $\eta_i^{(\lambda)}$ ihre Ausdrücke (9) eingesetzt und dann nach den y_x und deren Ableitungen geordnet. Da die Gleichung identisch bestehen soll, so müssen die einzelnen Coefficienten verschwinden, es wird sich also eine gewisse Anzahl von einander unabhängiger algebraischer Beziehungen zwischen den α_{ix} ergeben, deren Bestehen nothwendig und hinreichend dafür ist, dass die Transformation (9) die Function $R(y)$ ungeändert lässt.

In dem n^2-fach ausgedehnten Gebiete der α_{ix} bestimmen diese Beziehungen ein gewisses algebraisches Gebilde, welches seinerseits in gewisse irreductible Theilgebilde zerfallen kann. Die Anzahl dieser irreductiblen Theilgebilde ist jedenfalls eine endliche und jedem einzelnen entspricht eine bestimmte Stufenzahl. Das heisst, wenn wir ein solches irreductibles Gebilde herausgreifen, so können wir uns dasselbe dadurch gegeben denken, dass die n^2 Grössen α_{ix} als algebraische Functionen von gewissen unabhängigen Parametern dargestellt sind;

die Anzahl dieser Parameter bestimmt die Dimension, diese Anzahl von n^2 subtrahirt, die Stufenzahl des Gebildes.

Von vorneherein müssen wir die Möglichkeit zulassen, dass das Gesammtgebilde in irreductible Theile von verschiedener Stufenzahl zerfällt. Seien

$$(12) \qquad \alpha_{i\varkappa} = A_{i\varkappa}^{(j)}\left(\mathfrak{a}_1^{(j)}, \cdots \mathfrak{a}_{r_j}^{(j)}\right) \qquad (j = 1, 2, \cdots \nu) \quad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

die Gleichungen, die uns jene sämmtlichen irreductiblen Theilgebilde darstellen, so dass also ν die Anzahl der Theilgebilde und $n^2 - r_j$ die Stufenzahl des dem Index j entsprechenden Gebildes ist. Dann sind die ν Schaaren von linearen Transformationen

$$(13) \qquad \eta_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{i\varkappa}^{(j)}\left(\mathfrak{a}_1^{(j)}, \cdots \mathfrak{a}_{r_j}^{(j)}\right) y_\varkappa \qquad (j = 1, 2, \cdots \nu) \quad (i = 1, 2, \cdots n)$$

diejenigen, bei welchen die Differentialfunction $R(y)$ ungeändert bleibt; natürlich hat man sich dieselben noch durch die analogen Transformationen für die Ableitungen der $y_\varkappa$ erweitert zu denken. Diese Transformationen (13) bilden nun die Gruppe $\mathfrak{G}$, und zwar ist dies offenbar eine Gruppe mit paarweise inversen Transformationen. Da die sämmtlichen Transformationen von $\mathfrak{G}$ in der allgemeinen linearen Gruppe L enthalten sein müssen, so sagen wir, $\mathfrak{G}$ sei eine Untergruppe von L, und da ferner in den Definitionsgleichungen von $\mathfrak{G}$ die Parameter $\mathfrak{a}_h^{(j)}$ algebraisch eingehen, so sprechen wir von einer algebraischen Untergruppe $\mathfrak{G}$ von L.

Wir gelangen auf diese Weise zu Gruppen von Transformationen, die nicht mehr durch ein Gleichungssystem dargestellt werden können, sondern zu deren Definition eine endliche Anzahl von Gleichungssystemen erforderlich ist. Für den so verallgemeinerten Gruppenbegriff wollen wir nun einige der fundamentalen Lie'schen Sätze kennen lernen.

Drittes Kapitel.

137. Lie'sche Sätze über Transformationsgruppen. Anzahl der wesentlichen Parameter und infinitesimale Transformationen.

Wir legen den folgenden Betrachtungen eine durch die ν Gleichungssysteme

$$\eta_i = f_i^{(j)}\left(y_1, \cdots y_n \middle| \mathfrak{a}_1^{(j)}, \cdots \mathfrak{a}_{r_j}^{(j)}\right) = f_i^{(j)}(y|\mathfrak{a}) \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \quad (j = 1, 2, \cdots \nu) \tag{14}$$

definirte Gruppe G zu Grunde, deren Transformationen einander paarweise als inverse zugeordnet sein mögen, wobei wir natürlich voraussetzen, dass in jeder dieser ν Schaaren von Transformationen die geschriebenen Parameter wesentliche sind, und dass keine dieser Schaaren schon in einer anderen derselben enthalten ist.

Denken wir uns die beiden Transformationen unserer Gruppe

$$\begin{cases} \eta_i = f_i^{(\varkappa)}\left(y_1, \cdots y_n \middle| \mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_{r_\varkappa}^{(\varkappa)}\right), \\ \zeta_i = f_i^{(h)}\left(\eta_1, \cdots \eta_n \middle| \mathfrak{a}_1^{(h)}, \cdots \mathfrak{a}_{r_h}^{(h)}\right), \end{cases}$$

hintereinander ausgeführt, so gehört die so entstehende Transformation

$$\zeta_i = f_i^{(h)}\left(f_1^{(\varkappa)}, \cdots f_n^{(\varkappa)} \middle| \mathfrak{a}_1^{(h)}, \cdots \mathfrak{a}_{r_h}^{(h)}\right) \tag{15}$$

ebenfalls zur Gruppe und enthält scheinbar $r_h + r_\varkappa$ Parameter. Die Anzahl der wesentlichen Parameter der Transformation (15) kann aber nicht grösser sein, wie die grösste der Zahlen $r_1, r_2, \cdots r_\nu$ und nicht kleiner wie die grössere der beiden Zahlen $r_\varkappa, r_h$. Wenn also $r_\varkappa$ und r_h beide gleich der grössten unter den Zahlen $r_1, r_2, \cdots r_\nu$ sind, so hängt die Transformation (15) auch genau von $r_\varkappa = r_h$ Parametern ab. Bezeichnet also r diese grösste Zahl, so bilden diejenigen Transformationsschaaren von G, die von r wesentlichen Parametern abhängen, schon für sich eine Gruppe Γ mit paarweise inversen Transformationen, die demnach eine Untergruppe von G ist.

Seien die den Werthen $j = 1, 2, \cdots \mu$ entsprechenden Schaaren (14) diejenigen, aus denen sich Γ zusammensetzt, also

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_\mu = r,$$

dann betrachten wir zuvörderst diese Gruppe genauer.

Sei

(16) $$\eta_i = f_i^{(x)}(y\,\mathfrak{a})$$

eine Transformation von Γ, dann gehört auch die inverse Transformation

(17) $$y_i = F_i^{(x)}(\eta\,\mathfrak{a})$$

zu dieser Gruppe. Bilden wir nun

$$\zeta_i = f_i^{(x)}\left(y_1, \cdots y_n\, \mathfrak{a}_1^{(x)} + \varepsilon_1, \cdots \mathfrak{a}_r^{(x)} + \varepsilon_r\right),$$

wo $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_r$ irgendwelche hinreichend kleine Grössen bedeuten, so gehört auch die Transformation

$$\zeta_i = f_i^{(x)}\left(F_1^{(x)}(\eta\,\mathfrak{a}), \cdots F_n^{(x)}(\eta\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{a}_1^{(x)} + \varepsilon_1, \cdots \mathfrak{a}_r^{(x)} + \varepsilon_r\right)$$

zur Gruppe Γ. Entwickeln wir die rechten Seiten dieser Transformation nach Potenzen von $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_r$ und bezeichnen den Ausdruck, der aus

$$\frac{\partial f_i^{(x)}(y\,\mathfrak{a})}{\partial \mathfrak{a}_h} \qquad (h = 1, 2, \cdots r)$$

entsteht, wenn wir für die y_i ihre Ausdrücke (17) einsetzen, durch

$$\varphi_{hi}^{(x)}\left(\eta_1, \cdots \eta_n\, \mathfrak{a}_1^{(x)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(x)}\right) = \varphi_{hi}^{(x)}(\eta\,\mathfrak{a}),$$

so erhalten wir

(18) $$\zeta_i = \eta_i + \sum_{h=1}^{r} \varphi_{hi}^{(x)}(\eta\,\mathfrak{a})\varepsilon_h + [\varepsilon_h]_2,$$

wo $[\varepsilon_h]_2$ einen Ausdruck andeutet, der in den $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_r$ von zweiter oder höherer Dimension ist. Nehmen wir die ε_h unendlich klein, so stellen die Gleichungen (18) eine infinitesimale Transformation dar, die zur Gruppe Γ gehört; wir schreiben dieselbe, indem wir

$$\varepsilon_h = d\mathfrak{a}_h^{(x)} \qquad (h = 1, 2, \cdots r)$$

$$\zeta_i - \eta_i = d\eta_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

setzen, in der Form

$$d\eta_i = \sum_{h=1}^{r} \varphi_{hi}^{(x)}(\eta\,\mathfrak{a})\,d\mathfrak{a}_h^{(x)}.$$

Diese infinitesimale Transformation lässt sich aus den r einfacheren

(19) $$d\eta_i = \varphi_{hi}^{(x)}(\eta\,\mathfrak{a})\,d\mathfrak{a}_h^{(x)} \qquad (h = 1, 2, \cdots r)$$

zusammensetzen. Wenden wir diese auf irgend eine Function $f(\eta_1, \cdots \eta_n)$ an, so verwandelt sich $f(\eta_1, \cdots \eta_n)$ in

$$f(\eta_1, \cdots \eta_n) + d\mathfrak{a}_h^{(x)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \eta_i}\varphi_{hi}^{(x)}(\eta\,\mathfrak{a}),$$

wir werden darum mit Herrn Lie die Ausdrücke

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \eta_i} \varphi_{hi}^{(\varkappa)}(\eta \mid \mathfrak{a}) \qquad (h = 1, 2, \cdots r)$$

als Symbole der infinitesimalen Transformationen (19) ansehen.

Hat man überhaupt r infinitesimale Transformationen, die die $y_1, y_2, \cdots y_n$ in unendlich wenig davon verschiedene Grössen

$$y_1 + dy_1, \quad y_2 + dy_2, \cdots y_n + dy_n$$

verwandeln und für welche

$$dy_i = \psi_{hi}(y_1, \cdots y_n) d\mathfrak{a}_h \qquad (h = 1, 2, \cdots r)$$

ist, wo die $d\mathfrak{a}_h$ irgendwelche unendlich kleine Grössen bedeuten, so kann man diese Transformationen durch die Symbole

$$\mathfrak{X}_h f = \sum_{i=1}^{n} \psi_{hi}(y_1, \cdots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (h = 1, 2, \cdots r)$$

darstellen, welche den jenen Transformationen entsprechenden Aenderungen einer beliebigen Function $f(y_1, \cdots y_n)$ proportional sind. Man sagt dann, diese r infinitesimalen Transformationen seien von einander unabhängig, wenn kein System von Gleichungen der Form

$$\sum_{h=1}^{r} e_h \psi_{hi}(y_1, y_2, \cdots y_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

besteht, in welchem die e_h constante, d. h. von den $y_1, \cdots y_n$ unabhängige Grössen bedeuten, die nicht sämmtlich verschwinden, oder was dasselbe ist, wenn die $\mathfrak{X}_h f$ keiner Relation von der Form

$$\sum_{h=1}^{r} e_h \mathfrak{X}_h f = 0$$

genügen. Bedeuten dann $l_1, l_2, \cdots l_r$ willkürliche von den y_i unabhängige Parameter und setzen wir

$$Cf = \sum_{h=1}^{r} l_h \mathfrak{X}_h f,$$

so stellen uns die Gleichungen

(20) $$\eta_i = y_i + tC(y_i) + \frac{t^2}{1.2} C(Cy_i) + \cdots, \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

wo t eine unabhängig veränderliche Grösse bedeutet, eine Schaar von Transformationen dar, die scheinbar von den Parametern $t, l_1, l_2, \cdots l_r$ abhängt. Da diese $r + 1$ Parameter aber nur in den Verbindungen $tl_1, tl_2, \cdots tl_r$ auftreten, so hängen die Transformationen (20) in Wirklichkeit nur von r Parametern ab, wir können also unbeschadet der

Allgemeinheit $t = 1$ wählen und die Gleichungen (20) in der Form schreiben

$$(21)\qquad \eta_i = y_i + \sum_{h=1}^{r} l_h \psi_{hi}(y) + \sum_{h=1}^{r}\sum_{g=1}^{r} \frac{l_h l_g}{1\cdot 2}\mathfrak{X}_h(\psi_{gi}(y)) + \cdots.$$

Aus der Unabhängigkeit der infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ folgert man nun leicht, dass die r Parameter in der Transformationsschaar (21) wesentlich sind.

Hieraus erschliesst Herr Lie den für die folgende Untersuchung wichtigen Satz:

Enthält eine Schaar von Transformationen die r willkürlichen Parameter $l_1, l_2, \cdots l_r$ und lauten die Gleichungen dieser Transformationen, nach Potenzen der $l_1, l_2, \cdots l_r$ entwickelt,

$$\eta_i = y_i + \sum_{h=1}^{r} l_h \psi_{hi}(y_1, \cdots y_n) + [l_h]_2,$$

haben ferner die $\psi_{hi}(y_1, \cdots y_n)$ die Eigenschaft, dass die r infinitesimalen Transformationen

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_{hi}(y_1, \cdots y_n)\frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (h = 1, 2, \cdots r)$$

von einander unabhängig sind, so sind die r Parameter $l_1, l_2, \cdots l_r$ in den gegebenen Transformationen wesentlich.

138. Sätze über Transformationsschaaren, die gewissen partiellen Differentialgleichungen genügen.

Zu den in unserer Gruppe Γ enthaltenen infinitesimalen Transformationen (19) zurückkehrend, beweisen wir zunächst, dass dieselben für willkürliche Werthe der Parameter $\mathfrak{a}_h^{(\varkappa)}$ von einander unabhängig sind.

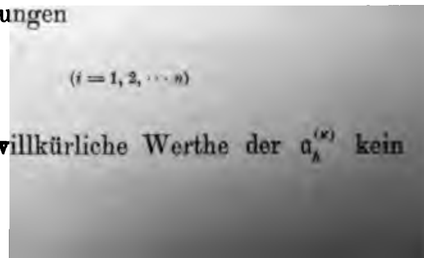
Wäre das nämlich nicht der Fall, so müssten sich r von den $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ unabhängige Grössen $e_1, e_2, \cdots e_r$ finden lassen, für welche die Beziehung

$$\sum_{h=1}^{r} e_h \sum_{i=1}^{n} \varphi_{hi}^{(\varkappa)}(\eta|\mathfrak{a})\frac{\partial f}{\partial \eta_i} = 0,$$

d. h. mit anderen Worten die Gleichungen

$$(22)\qquad \sum_{h=1}^{r} e_h \varphi_{hi}^{(\varkappa)}(\eta|\mathfrak{a}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

erfüllt sind. Nun kann aber für willkürliche Werthe der $\mathfrak{a}_h^{(\varkappa)}$ kein Gleichungssystem von der Form



$$\sum_{k=1}^{r} \chi_k\left(\mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}\right) \varphi_{ki}^{(\varkappa)}\left(\eta_1, \cdots \eta_n \middle| \mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}\right) = 0$$
$$(i = 1, 2, \cdots n)$$

bestehen, in welchem die χ_k von den $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ unabhängige Functionen der $\mathfrak{a}_k^{(\varkappa)}$ bedeuten; denn setzte man darin für die η_i ihre Werthe aus den Gleichungen (16) ein, so wäre

$$\sum_{k=1}^{r} \chi_k\left(\mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}\right) \frac{\partial f_i^{(\varkappa)}(y|\mathfrak{a})}{\partial \mathfrak{a}_k^{(\varkappa)}} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

d. h. aber nach Nr. 134 (S. 14), die $\mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}$ wären keine wesentlichen Parameter.

Bedeutet also

$$\mathfrak{a}_1^{(\varkappa)} = \mathfrak{a}_1^{(0)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)} = \mathfrak{a}_r^{(0)}$$

ein allgemeines Werthesystem der Parameter $\mathfrak{a}_k^{(\varkappa)}$, so sind die r infinitesimalen Transformationen

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ki}^{(\varkappa)}\left(\eta_1, \cdots \eta_n \middle| \mathfrak{a}_1^{(0)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(0)}\right) \frac{\partial f}{\partial \eta_i} \qquad k = 1, 2, \cdots r)$$

für jeden Werth $\varkappa = 1, 2, \cdots \mu$ von einander unabhängig.

Setzen wir nun z. B. für $\varkappa = 1$

$$\varphi_{ki}^{(1)}\left(\eta_1, \cdots \eta_n\, \mathfrak{a}_1^{(0)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(0)}\right) = \xi_{ki}(\eta_1, \cdots \eta_n),$$

so sind die r infinitesimalen Transformationen

(23) $$\mathfrak{X}_k f(\eta_1, \cdots \eta_n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(\eta_1, \cdots \eta_n) \frac{\partial f}{\partial \eta_i} \qquad [illegible]$$

von einander unabhängig.

Nehmen wir ferner die Transformation [illegible], wenn daselbst

$$\varkappa = 1, \quad \mathfrak{a}_1^{(1)} = \mathfrak{a}_1^{(0)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(1)} = \mathfrak{a}_r^{(0)} [illegible]$$

gesetzt wird,

$$\zeta_i = \eta_i + \sum_{k=1}^{r} \xi_{ki}(\eta) \varepsilon_k + [illegible]$$

und componiren dieselbe mit der willkürlichen [illegible]

$$\vartheta_i = f_i^{(\varkappa)}\left(F_1^{(\varkappa)}(\zeta\,\bar{\mathfrak{a}}), \cdots F_r^{(\varkappa)}(\zeta\,\bar{\mathfrak{a}}) [illegible]\right)$$
$$(i = 1, 2, \cdots [illegible])$$

von Γ, wo $\bar{\mathfrak{a}}_1^{(\varkappa)}, \cdots \bar{\mathfrak{a}}_r^{(\varkappa)}$ ein willkürliches [illegible]
der $\mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}$ und $\delta_1, \cdots \delta_r$ beliebige [illegible]

bedeuten, so können wir die ϑ_i nach Potenzen der $\delta_1, \cdots \delta_r$ entwickeln und erhalten (vergl. S. 24)

$$\vartheta_i = \xi_i + \sum_{k=1}^{r} \varphi_{ki}^{(\varkappa)}(\eta | \bar{\mathfrak{a}})\, \delta_k + [\delta_k]_2,$$

so dass also die componirte Transformation, die offenbar auch zur Gruppe Γ gehören muss, die Form

$$(24) \qquad \vartheta_i = \eta_i + \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k \xi_{ki}(\eta) + \sum_{k=1}^{r} \delta_k \varphi_{ki}^{(\varkappa)}(\eta | \bar{\mathfrak{a}}) + [\varepsilon_k, \delta_k]_2$$

annimmt. Diese Transformation enthält die $2r$ Parameter $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_r$, $\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_r$, von diesen können aber, da (24) zur Gruppe Γ gehört, nur r wesentlich sein.

Auf Grund des in der vorigen Nummer (S. 26) erörterten Satzes schliessen wir hieraus, dass unter den $2r$ infinitesimalen Transformationen

$$\mathfrak{X}_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(\eta) \frac{\partial f}{\partial \eta_i}, \quad \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ki}^{(\varkappa)}(\eta | \bar{\mathfrak{a}}) \frac{\partial f}{\partial \eta_i} \qquad (k = 1, 2, \cdots r)$$

nur r von einander unabhängige sein können; da aber die $\mathfrak{X}_k f$, wie wir bewiesen haben, unabhängig sind, so folgt, dass sich die

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ki}^{(\varkappa)}(\eta | \mathfrak{a}) \frac{\partial f}{\partial \eta_i} \qquad (k = 1, 2, \cdots r)$$

für alle Werthe von $\varkappa = 1, 2, \cdots \mu$ und für jedes beliebige Werthesystem, welches den Parametern $\mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}$ zuertheilt wird, durch die r infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_k f$ in der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ki}^{(\varkappa)}(\eta, \mathfrak{a}) \frac{\partial f}{\partial \eta_i} = \sum_{g=1}^{r} \chi_{kg}^{(\varkappa)}\left(\mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}\right) \mathfrak{X}_g f$$

darstellen lassen müssen; hierin sind die $\chi_{kg}^{(\varkappa)}\left(\mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}\right)$ bestimmte Functionen der Parameter $\mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}$.

Mit Rücksicht auf die Bedeutung der $\varphi_{ki}^{(\varkappa)}(\eta | \mathfrak{a})$ können diese Gleichungen in der Form

$$\frac{\partial f_i^{(\varkappa)}(y | \mathfrak{a})}{\partial \mathfrak{a}_k^{(\varkappa)}} = \sum_{g=1}^{r} \chi_{kg}^{(\varkappa)}\left(\mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}\right) \xi_{gi}\left(f_1^{(\varkappa)}(y | \mathfrak{a}), \cdots f_n^{(\varkappa)}(y | \mathfrak{a})\right)$$
$$(i = 1, 2, \cdots n)$$

oder endlich, mit Rücksicht auf die Gleichungen (16), in der Form

$$(25)\qquad \frac{\partial \eta_i}{\partial \mathfrak{a}_h^{(\varkappa)}} = \sum_{g=1}^{r} \chi_{hg}^{(\varkappa)}\left(\mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}\right) \xi_{gi}(\eta_1, \cdots \eta_n) \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

geschrieben werden. Das heisst:

Die Gruppe Γ enthält genau r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen

$$\mathfrak{X}_h f(y_1, \cdots y_n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{hi}(y_1, \cdots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (h = 1, 2, \cdots r),$$

und diese sind so beschaffen, dass jede der Schaaren

$$\eta_i = f_i^{(\varkappa)}\left(y_1, \cdots y_n \middle| \mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \mu),$$

aus denen sich Γ zusammensetzt, Differentialgleichungen von der Form (25) erfüllt.

Wir müssen nun eine Reihe von Sätzen kennen lernen, die sich auf Schaaren von Transformationen beziehen, welche Differentialgleichungen von der Form (25) erfüllen. Sei also

$$\eta_i = f_i(y_1, y_2, \cdots y_n | \mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r) \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

eine Schaar von Transformationen mit den r wesentlichen Parametern $\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r$, die ein System von Differentialgleichungen der Form

$$(26)\qquad \frac{\partial \eta_i}{\partial \mathfrak{a}_h} = \sum_{g=1}^{r} \chi_{hg}(\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r) \xi_{gi}(\eta_1, \cdots \eta_n) \qquad \binom{i = 1, 2, \cdots n}{h = 1, 2, \cdots r}$$

befriedigen; dann lässt sich zunächst zeigen, dass die Determinante

$$|\chi_{hg}(\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r)| \qquad (h, g = 1, 2, \cdots r)$$

nicht identisch verschwinden kann.

Wäre nämlich diese Determinante gleich Null, so müsste ein System von Gleichungen der Form

$$\sum_{h=1}^{r} \psi_h(\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r) \frac{\partial \eta_i}{\partial \mathfrak{a}_h} = 0$$

für $i = 1, 2, \cdots n$ bestehen; dies widerspräche aber der Voraussetzung, dass die $\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r$ wesentliche Parameter sind. Es lassen sich also die Gleichungen (26) nach den ξ_{gi} auflösen; sei

$$(27)\qquad \xi_{gi}(\eta_1, \cdots \eta_n) = \sum_{h=1}^{r} \alpha_{gh}(\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r) \frac{\partial \eta_i}{\partial \mathfrak{a}_h} \qquad \binom{g = 1, 2, \cdots r}{i = 1, 2, \cdots n},$$

dann ist natürlich auch

$$|\alpha_{gh}(\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r)| \neq 0$$
$$(g, h = 1, 2, \cdots r).$$

Hieraus allein folgt schon, dass die r infinitesimalen Transformationen

$$\mathfrak{X}_h f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{hi}(\eta_1, \cdots \eta_n) \frac{\partial f}{\partial \eta_i} \qquad (h = 1, 2, \cdots r)$$

von einander unabhängig sind, da sich aus dem Bestehen von Gleichungen

$$\sum_{h=1}^{r} e_h \xi_{hi}(\eta_1, \cdots \eta_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

mit von den $\eta_1, \cdots \eta_n$ unabhängigen Coefficienten e_h die partielle Differentialgleichung

$$\sum_{g=1}^{r} \sum_{h=1}^{r} e_g \alpha_{gh}(\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r) \frac{\partial \eta_i}{\partial \mathfrak{a}_h} = 0$$

für die n Functionen $\eta_1, \cdots \eta_n$ ergeben würde, im Widerspruche mit der Voraussetzung, dass diese die $\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r$ als wesentliche Parameter enthalten.

Denken wir uns nun die Gleichungen

$$\eta_i = f_i(y|\mathfrak{a}) \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

nach den y_i aufgelöst:

$$y_i = F_i(\eta|\mathfrak{a}),$$

dann ist identisch

$$y_i = F_i\big(f_1(y|\mathfrak{a}), \cdots f_n(y|\mathfrak{a}) \,|\, \mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r\big).$$

Differentiiren wir diese Gleichungen nach $\mathfrak{a}_h$, so kommt

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i(\eta|\mathfrak{a})}{\partial \eta_j} \frac{\partial f_j(y|\mathfrak{a})}{\partial \mathfrak{a}_h} + \frac{\partial F_i(\eta|\mathfrak{a})}{\partial \mathfrak{a}_h} = 0;$$

multipliciren wir mit $\alpha_{gh}(\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r)$ und summiren über $h = 1, 2, \cdots r$, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (27)

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_{gj}(\eta_1, \cdots \eta_n) \frac{\partial F_i(\eta|\mathfrak{a})}{\partial \eta_j} + \sum_{h=1}^{r} \alpha_{gh}(\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r) \frac{\partial F_i(\eta|\mathfrak{a})}{\partial \mathfrak{a}_h} = 0.$$

Diese Gleichungen sind Identitäten, wenn man in denselben die η_i durch $f_i(y|\mathfrak{a})$ ersetzt; da sie aber die $y_1, y_2, \cdots y_n$ gar nicht enthalten, so sind sie an sich, d. h. in den $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ selbst identisch.

Die Functionen $F_1, F_2, \cdots F_n$ befriedigen also das System von r partiellen Differentialgleichungen

$$(28) \qquad \sum_{j=1}^{n} \xi_{gj}(\eta_1, \cdots \eta_n) \frac{\partial F}{\partial \eta_j} + \sum_{h=1}^{r} \alpha_{gh}(\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r) \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{a}_h} = 0 \qquad (g = 1, 2, \cdots r).$$

Diese Differentialgleichungen sind zunächst von einander unabhängig, denn sie gestatten zufolge von

$$|\alpha_{gh}(\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r)| \neq 0 \qquad (g, h = 1, 2, \cdots r)$$

eine Auflösung nach den

$$\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{a}_1}, \cdots \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{a}_r},$$

ferner sind auch die n Lösungen $F_1, F_2, \cdots F_n$ derselben unabhängig, da die Functionaldeterminante dieser Lösungen nach den $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$

$$\left|\frac{\partial F_i}{\partial \eta_j}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial f_i}{\partial \eta_j}\right|} \neq 0 \qquad (i, j = 1, 2, \cdots n)$$

ist. Um diese Eigenschaft der partiellen Differentialgleichungen (28) gehörig verwerthen zu können, müssen wir einige Bemerkungen über die sogenannten vollständigen Systeme, von denen schon oben (S. 14, Nr. 134) vorübergehend die Rede war, einschalten.

139. Vollständige Systeme. Continuirliche Gruppen werden durch infinitesimale Transformationen erzeugt.

Seien q_0 Gleichungen gegeben von der Form

$$\text{(I)} \qquad Z_h f = Z_{h1}\frac{\partial f}{\partial u_1} + Z_{h2}\frac{\partial f}{\partial u_2} + \cdots + Z_{hs}\frac{\partial f}{\partial u_s} = 0 \qquad (h = 1, 2, \cdots q_0),$$

wo die Z_{hg} wohlbestimmte Functionen der $u_1, u_2, \cdots u_s$ bedeuten. Diese Gleichungen seien von einander unabhängig, d. h. das rechteckige System der Coefficienten

$$(Z_{hg}) \qquad \binom{h = 1, 2, \cdots q_0}{g = 1, 2, \cdots s}$$

sei vom Range q_0 (es muss natürlich $q_0 \leq s$ vorausgesetzt werden).

Befriedigt eine Function $f(u_1, \cdots u_s)$ die Gleichungen (I), so muss sie offenbar auch den Gleichungen

$$Z_h\big(Z_g(f)\big) = 0 \qquad (g, h = 1, 2, \cdots q_0)$$

und folglich auch den Gleichungen

$$\text{(II)} \qquad Z_h\big(Z_g(f)\big) - Z_g\big(Z_h(f)\big) = 0 \qquad \binom{g, h = 1, 2, \cdots q_0}{g \neq h}$$

Genüge leisten. Nun sind aber die linken Seiten der letzteren Gleichungen, die wir kürzer durch die Symbole

$$(Z_h, Z_g)f = Z_h\big(Z_g(f)\big) - Z_g\big(Z_h(f)\big)$$

bezeichnen wollen, auch wieder homogene lineare Differentialausdrücke erster Ordnung, da die Ableitungen zweiter Ordnung sich wegheben,

und es kann nun möglich sein, dass sich unter den Gleichungen (II) gewisse finden, die von einander und von den Gleichungen (I) unabhängig sind. Wenn das der Fall ist, so fügen wir diese Gleichungen

$$Z_{q_0+1}(f) = 0, \cdots \quad Z_{q_0+q_1}(f) = 0$$

dem Systeme (I) hinzu und verfahren mit dem so gebildeten Systeme von $q_0 + q_1$ Gleichungen ebenso wie vorher mit dem Systeme (I). Setzen wir diesen Process fort, so muss sich, da nicht mehr wie s dieser Gleichungen von einander unabhängig sein können, endlich ein System

(III) $$Z_1(f) = 0, \quad Z_2(f) = 0, \quad \cdots \quad Z_q(f) = 0$$

ergeben, welches so beschaffen ist, dass alle Gleichungen

$$(Z_g, Z_h)f = 0 \qquad (g, h = 1, 2, \cdots q;\ g \neq h)$$

schon eine Folge der Gleichungen (III) selbst sind, d. h. also, dass

$$(Z_g, Z_h)f = \sum_{i=1}^{q} \psi_{ghi}(u_1, \cdots u_s)\, Z_i(f)$$

ist, wo die ψ_{ghi} wohlbestimmte Functionen der $u_1, \cdots u_s$ bedeuten.

Ein solches System von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung nennt man nach Clebsch ein q-gliedriges vollständiges System. Die von Jacobi begründete Theorie dieser Systeme lehrt nun den folgenden Fundamentalsatz:

Ein q-gliedriges vollständiges System in s unabhängigen Variabeln besitzt stets genau $s - q$ unabhängige Lösungen

$$f_1, \ f_2, \cdots \ f_{s-q};$$

eine willkürliche Function $\Phi(f_1, f_2, \cdots f_{s-q})$ dieser Lösungen genügt dann auch dem vollständigen Systeme, und umgekehrt lässt sich auch jede Lösung desselben als Function der $f_1, f_2, \cdots f_{s-q}$ darstellen. Haben andererseits q von einander unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung in s unabhängigen Variabeln genau $s - q$ unabhängige Lösungen gemein, so bilden sie ein q-gliedriges vollständiges System, und sind $s - q$ von einander unabhängige Functionen von s Variabeln vorgelegt, so giebt es stets ein q-gliedriges vollständiges System, dessen Lösungen diese Functionen sind.

Die in der Nr. 138 (S. 31) ausgesprochene Eigenschaft des Systems (28) partieller Differentialgleichungen, welchem die Functionen $F_1, F_2, \cdots F_n$ genügen, bedingt also, dass die Gleichungen (28), in

denen die $n + r$ unabhängigen Variabeln $\eta_1, \cdots \eta_n, \alpha_1, \cdots \alpha_r$ vorkommen, ein r-gliedriges vollständiges System bilden.

Setzen wir

$$\sum_{h=1}^{r} \alpha_{gh}(\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_h} = A_g f,$$

so sind die Gleichungen (28) in der Form

$$\Omega_g F = \mathfrak{X}_g F + A_g F = 0 \qquad (g = 1, 2, \cdots r)$$

darstellbar. Da sie ein vollständiges System bilden, müssen Gleichungen

$$(\Omega_g, \Omega_h) F = \sum_{\sigma=1}^{r} \vartheta_{gh\sigma}(\eta_1, \cdots \eta_n, \mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r) \Omega_\sigma F$$
$$(g, h = 1, 2, \cdots r;\ g \neq h),$$

wo die $\vartheta_{gh\sigma}$ wohlbestimmte Functionen ihrer Argumente sind, für jede Function F der $r + n$ unabhängigen Variabeln $\eta_1, \cdots \eta_n, \mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r$ bestehen.

Schreiben wir diese Gleichungen in der Gestalt

$$(\mathfrak{X}_g, \mathfrak{X}_h) F + (A_g, A_h) F = \sum_{\sigma=1}^{r} \vartheta_{gh\sigma} \mathfrak{X}_\sigma F + \sum_{\sigma=1}^{r} \vartheta_{gh\sigma} A_\sigma F,$$

so zerfallen dieselben in die beiden Systeme

$$(29) \qquad (\mathfrak{X}_g, \mathfrak{X}_h) F = \sum_{\sigma=1}^{r} \vartheta_{gh\sigma} \mathfrak{X}_\sigma F,$$

$$(30) \qquad (A_g, A_h) F = \sum_{\sigma=1}^{r} \vartheta_{gh\sigma} A_\sigma F.$$

Die letzteren Gleichungen (30) zerfallen weiter in

$$A_g(\alpha_{h\mu}) - A_h(\alpha_{g\mu}) = \sum_{\sigma=1}^{r} \vartheta_{gh\sigma} \alpha_{\sigma\mu} \qquad (g, h, \mu = 1, 2, \cdots r),$$

und aus diesen lassen sich, da die Determinante

$$|\alpha_{\sigma\mu}| \neq 0 \qquad (\sigma, \mu = 1, 2, \cdots r)$$

ist, die $\vartheta_{gh\sigma}$ ausrechnen; wir erkennen hieraus, dass die $\vartheta_{gh\sigma}$ nur blosse Functionen der $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots \mathfrak{a}_r$ sein können, d. h. dass sie von den $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ unabhängig sind. Dies festgestellt, differentiiren wir die Gleichungen (29) nach den $\mathfrak{a}_\mu$, so kommt

$$0 = \sum_{\sigma=1}^{r} \frac{\partial \vartheta_{gh\sigma}}{\partial \mathfrak{a}_\mu} \mathfrak{X}_\sigma F \qquad (g, h, \mu = 1, 2, \cdots r);$$

da aber die $\mathfrak{X}_\sigma F$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen sind, so müssen die Coefficienten dieser Relationen

$$\frac{\partial \vartheta_{gh\sigma}}{\partial \mathfrak{a}_\mu} = 0$$

sein, d. h. die $\vartheta_{gh\sigma}$ sind auch von den $\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r$ unabhängig, sie sind folglich einfach Constanten.

Hat man also eine Schaar von Transformationen

$$\eta_i = f_i(y|\mathfrak{a}) \qquad (i=1,2,\cdots n)$$

mit den r wesentlichen Parametern $\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_r$, die Differentialgleichungen von der Form (26) (S. 29) befriedigen, so bestehen zwischen den infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ Relationen

$$(31) \qquad (\mathfrak{X}_g, \mathfrak{X}_h)f = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{gh\sigma}\mathfrak{X}_\sigma f \qquad (g, h = 1, 2, \cdots r)$$

mit constanten Coefficienten $c_{gh\sigma}$.

Herr Lie hat nun den folgenden wichtigen Satz bewiesen. Wenn r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ $(h=1,2,\cdots r)$ vorgelegt sind, die Relationen von der Form (31) mit constanten Coefficienten erfüllen, und wir bilden (vergl. S. 26, Gl. (21)) die r wesentliche Parameter $l_1, l_2, \cdots l_r$ enthaltende Schaar von Transformationen

$$\eta_i = y_i + \sum_{h=1}^{r} l_h \xi_{hi}(\eta) + \sum_{h=1}^{r}\sum_{g=1}^{r} \frac{l_h l_g}{1\cdot 2}\mathfrak{X}_g(\xi_{hi}(\eta)) + \cdots \qquad (i=1,2,\cdots n),$$

so constituiren diese eine r-gliedrige continuirliche Gruppe mit paarweise inversen Transformationen, von der man sagt, sie sei durch die r infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ erzeugt. Wenden wir diesen Satz, auf dessen Beweis wir nicht eingehen, auf unsere Gruppe Γ an, so können wir Folgendes erschliessen.

Wir haben bewiesen, dass die aus den μ Schaaren (16) (Nr. 137, S. 24) gebildete Gruppe Γ, deren Transformationen paarweise zu einander invers sind, genau r unabhängige infinitesimale Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ $(h=1,2,\cdots r)$ enthält; diese müssen, wie wir aus dem Bestehen der Differentialgleichungen (25) auf Grund der eben gewonnenen Ergebnisse schliessen können, Relationen von der Form (31) erfüllen. Also erzeugen dieselben eine r-gliedrige continuirliche Gruppe H mit paarweise inversen Transformationen, und diese muss folglich in der Gruppe Γ als Untergruppe enthalten sein; d. h. eine der μ Schaaren (16) muss geradezu mit dieser r-gliedrigen continuirlichen Gruppe H übereinstimmen.

Ist insbesondere $\mu = 1$, d. h. wird die Gruppe Γ durch eine einzige Schaar von Transformationen definirt, so ist Γ mit H identisch, d. h.

jede r-gliedrige continuirliche Gruppe mit paarweise inversen Transformationen enthält genau r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen, von denen sie erzeugt wird.

So wird z. B. die allgemeine lineare Gruppe L von den n^2 infinitesimalen Transformationen (vergl. S. 18)

$$y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

erzeugt.

Im allgemeinen Falle $\mu > 1$ ist H offenbar die einzige in Γ enthaltene n-gliedrige Gruppe, die von infinitesimalen Transformationen erzeugt wird.

140. Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe. Ausgezeichnete Untergruppen. Fundamentaleigenschaft der betrachteten allgemeinen Transformationsgruppen.

Ehe wir nun weiter auf die Erörterung der Gruppe G eingehen, machen wir noch einige auf r-gliedrige continuirliche Gruppen mit paarweise inversen Transformationen bezügliche Bemerkungen.

Sei H eine solche Gruppe und seien $\mathfrak{X}_h f$ $(h = 1, 2, \cdots r)$ die dieselbe erzeugenden infinitesimalen Transformationen, zwischen denen die Gleichungen (31) bestehen.

Je drei der infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ erfüllen, wie leicht einzusehen ist, die sogenannte Jacobi'sche Identität:

$$\big((\mathfrak{X}_g, \mathfrak{X}_h), \mathfrak{X}_j\big) + \big((\mathfrak{X}_h, \mathfrak{X}_j), \mathfrak{X}_g\big) + \big((\mathfrak{X}_j, \mathfrak{X}_g), \mathfrak{X}_h\big) = 0$$
$$(g, h, j = 1, 2, \cdots r).$$

Hieraus folgen durch zweimalige Benutzung der Gleichungen (31) die Formeln

$$\sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{\tau=1}^{r} (c_{gh\sigma} c_{\sigma j\tau} + c_{hj\sigma} c_{\sigma g\tau} + c_{jg\sigma} c_{\sigma h\tau}) \mathfrak{X}_\tau f = 0;$$

also bestehen, da die $\mathfrak{X}_\tau f$ von einander unabhängig sind, zwischen den Constanten $c_{gh\sigma}$ die Beziehungen

$$\sum_{\sigma=1}^{r} (c_{gh\sigma} c_{\sigma j\tau} + c_{hj\sigma} c_{\sigma g\tau} + c_{jg\sigma} c_{\sigma h\tau}) = 0,$$

zu denen noch die unmittelbar evidenten

$$c_{gh\tau} + c_{hg\tau} = 0 \qquad (\tau = 1, 2, \cdots r)$$

hinzutreten. Wie Herr Lie gezeigt hat, gilt auch der umgekehrte

Satz, dass, wenn gewisse Constanten $c_{gh\sigma}$ bekannt sind, die diese Relationen befriedigen, auch stets r infinitesimale Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ $(h = 1, 2, \cdots r)$ gefunden werden können, die die Beziehungen (31) erfüllen und folglich eine r-gliedrige Gruppe erzeugen.

Die Constanten $c_{gh\sigma}$ bestimmen die Zusammensetzung der r-gliedrigen Gruppe H. Die Bedeutung derselben tritt in den folgenden Lie'schen Sätzen hervor, die wir ebenfalls ohne Beweis anführen.

Die $m < r$ von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen von H,

$$Y_h f = \sum_{g=1}^{r} e_{hg} \mathfrak{X}_g f \qquad (h = 1, 2, \cdots m),$$

wo die e_{hg} Constanten bedeuten, erzeugen dann und nur dann eine m-gliedrige Untergruppe von H, wenn sich alle

$$(Y_h, Y_j) \qquad (h, j = 1, 2, \cdots m;\ h \neq j)$$

durch die Y_h allein homogen linear mit constanten Coefficienten darstellen lassen. Die Werthesysteme e_{hg}, für welche dies der Fall ist, setzen sich aus den $c_{gh\sigma}$ mittelst algebraischer Operationen zusammen.

Wir führen hier einen für die ganze Gruppentheorie fundamentalen Begriff, den der ausgezeichneten oder invarianten Untergruppe ein. Hat man irgend eine Gruppe g von irgendwelchen Operationen und ist γ eine Untergruppe von g, transformirt man dann die Operationen von γ durch alle möglichen Operationen S von g, d. h. bildet man

$$\gamma_S = S^{-1} \gamma S,$$

so gehören die sämmtlichen Operationen der Gesammtheit γ_S der Gruppe g an, und bilden offenbar auch wieder eine Gruppe, also eine Untergruppe von g. Diese sämmtlichen Untergruppen γ_S nennt man mit γ gleichberechtigt innerhalb der Gruppe g. Wenn nun insbesondere jede der mit γ gleichberechtigten Untergruppen mit γ selbst identisch ist, d. h. wenn γ durch Transformation mit allen Operationen von g immer in sich selbst übergeht, so heisst γ eine ausgezeichnete oder invariante Untergruppe von g. Eine Gruppe g heisst einfach, wenn sie ausser der identischen Operation keine ausgezeichnete Untergruppe enthält, im entgegengesetzten Falle heisst sie zusammengesetzt.

Seien nun $Y_h f$ $(h = 1, 2, \cdots m)$ m unabhängige infinitesimale Transformationen unserer r-gliedrigen Gruppe H, die eine Untergruppe H' derselben erzeugen; denken wir uns die $Y_h f$ $(h = 1, 2, \cdots m)$ durch gewisse

$$Y_{m+1} f, \quad \cdots \quad Y_r f$$

zu einem System von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen von H ergänzt, dann ist die Untergruppe H' innerhalb H ausgezeichnet, wenn die sämmtlichen

$$(Y_g, Y_h) \qquad (g = 1, 2, \cdots m;\ h = 1, 2, \cdots r)$$

durch die Y_g $(g = 1, 2, \cdots m)$ allein ausdrückbar sind, d. h. also in der Form

$$(Y_g, Y_h)f = \sum_{\sigma=1}^{m} \delta_{gh\sigma} Y_\sigma f$$

dargestellt werden können.

Wir kehren jetzt zu der aus den ν Schaaren (14) gebildeten Gruppe G zurück, in der Γ als Untergruppe enthalten war. Da Γ die r-gliedrige continuirliche Gruppe H enthält, so ist H auch in G enthalten. Mögen die Transformationen

$$\eta_i = f_i^{(1)}\left(y_1, \cdots y_n \,|\, \mathfrak{a}_1^{(1)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(1)}\right) \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

diejenigen sein, die die Gruppe H definiren.

Führen wir nach einer Transformation von H die nicht zu H gehörige Transformation

(32) $$\zeta_i = f_i^{(\varkappa)}\left(\eta_1, \cdots \eta_n \,|\, \mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_{r_\varkappa}^{(\varkappa)}\right) \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

von G aus, so erhalten wir in

(33) $$\zeta_i = f_i^{(\varkappa)}\left(f_1^{(1)}(y\,|\,\mathfrak{a}), \cdots f_n^{(1)}(y\,|\,\mathfrak{a}) \,\middle|\, \mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_{r_\varkappa}^{(\varkappa)}\right)$$

wieder eine Transformation von G, die scheinbar von den $r + r_\varkappa$ Parametern

$$\mathfrak{a}_1^{(1)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(1)}, \quad \mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_{r_\varkappa}^{(\varkappa)}$$

abhängt, in Wirklichkeit aber nur r wesentliche Parameter enthalten kann (vergl. Nr. 137, S. 23). Da die Gruppe H die identische Transformation enthält, reduciren sich für besondere Werthe der $\mathfrak{a}_1^{(1)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(1)}$ die $f_i^{(1)}(y\,|\,\mathfrak{a})$ auf y_i $(i = 1, 2, \cdots n)$. Die Transformationsschaar (32) ist also unter der Schaar (33) enthalten, und es muss folglich nothwendig (32) mit (33) identisch sein, d. h. es ist $r_\varkappa = r$.

Also ist in allen ν Schaaren der Gruppe G, (wenn wir uns eben solche Schaaren, die schon unter anderen enthalten sind, von vornherein weggelassen denken) die Anzahl der wesentlichen Parameter gleich r, d. h. G ist mit Γ identisch.

Sei nun T irgend eine Transformation von G; betrachten wir die Transformationen

$$T^{-1}HT,$$

so ist die von denselben gebildete Gruppe auch r-gliedrig und von

infinitesimalen Transformationen erzeugt, sie ist also mit H identisch, d. h. H ist eine ausgezeichnete Untergruppe von G.

Die Gruppe G hat also die folgende Gestalt: Sie besteht erstens aus den Transformationen der continuirlichen Gruppe H und ferner noch aus $\nu - 1$ Schaaren von der Form

$$T_1 H, \quad T_2 H, \quad \cdots \quad T_{\nu-1} H,$$

wo $T_1, T_2, \cdots T_{\nu-1}$ Transformationen bedeuten, für welche

$$T_\varkappa^{-1} H T_\varkappa = H \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu - 1)$$

ist.

Wir behalten die Bezeichnung continuirliche Gruppe, in dem Sinne wie sie in der Nr. 134 (S. 15) eingeführt wurde, bei, verstehen also unter einer continuirlichen Gruppe stets nur eine solche, die durch ein System von Gleichungen, welche von gewissen stetig veränderlichen Parametern abhängen, definirt wird. Die allgemeinen Gruppen, zu deren Definition $\nu > 1$ Systeme von Gleichungen erforderlich sind, hat man wohl auch als gemischte Gruppen bezeichnet; wenn es sich darum handeln wird, eine derartige Gruppe etwa im Gegensatze zu einer abzählbaren Gruppe zu charakterisiren, so werden wir einfach von einer Gruppe sprechen, die continuirliche Schaaren von Transformationen enthält. Die charakteristische Eigenschaft einer continuirlichen Gruppe (mit paarweise inversen Transformationen) besteht darin, dass sie aus infinitesimalen Transformationen erzeugt wird. Diese infinitesimalen Transformationen spielen für die betreffende continuirliche Gruppe eine analoge Rolle, wie für eine Gruppe mit endlicher Basis die Elemente dieser Basis. Wir heben noch ausdrücklich hervor, dass eine continuirliche Gruppe niemals abzählbar sein kann, es sei denn, dass sie sich auf die identische Transformation reducirt.

141. Allgemeiner Begriff der Invarianten einer continuirlichen Gruppe. Transitivität und Intransitivität.

Wenden wir die bisher erlangten Ergebnisse auf die lineare Gruppe $\mathfrak{G}$ an, die durch die ν Transformationsschaaren (13) (Nr. 136, S. 22) definirt worden war, so ersehen wir also, dass die Anzahlen $r_1, r_2, \cdots r_\nu$ der Parameter einander gleich, etwa gleich r sein müssen, und dass eine der Gleichungen (13) eine r-gliedrige continuirliche Gruppe darstellt, die von r infinitesimalen Transformationen erzeugt wird. Um nun die Beziehung, in der die Differentialfunction $R(y)$, von der wir ausgegangen waren, zu der Gruppe $\mathfrak{G}$ steht, darlegen zu können, wollen wir für unsere aus den ν allgemeinen Transformationsschaaren

(34) $$\eta_i = f_i^{(\varkappa)}\left(y_1, \cdots y_n \middle| \mathfrak{a}_1^{(\varkappa)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(\varkappa)}\right) \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu) \quad (i = 1, 2, \cdots n)$$

gebildete Gruppe G den Begriff der Invariante bez. Differentialinvariante erörtern.

Eine Function $U(y_1, y_2, \cdots y_n)$ der unbestimmten Grössen y_i heisst eine Invariante von G, wenn für die durch die Gleichungen (34) definirten η_i die identische Gleichung

$$U(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n) = U(y_1, y_2, \cdots y_n)$$

besteht. Da diese Gleichung auch bestehen muss, wenn die η_i aus den y_i durch eine der r infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ hervorgehen, so muss jede Invariante von G den r partiellen Differentialgleichungen

(35) $$\mathfrak{X}_h f = 0 \quad (h = 1, 2, \cdots r)$$

Genüge leisten.

In der That verwandelt sich (vergl. Nr. 137, S. 24) eine beliebige Function $f(y_1, \cdots y_n)$ bei Anwendung der infinitesimalen Transformation

$$\eta_i = y_i + \xi_{hi}(y_1, \cdots y_n) d\mathfrak{a}_h$$

in den Ausdruck

$$f(y_1, \cdots y_n) + d\mathfrak{a}_h \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i} \xi_{hi}(y_1, \cdots y_n),$$

so dass also das Bestehen der partiellen Differentialgleichungen (35) die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, dass die Function $f(y_1, \cdots y_n)$ bei den infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ und folglich bei den Transformationen der durch diese erzeugten, r-gliedrigen continuirlichen Gruppe H ungeändert bleibt.

Jede Invariante von G ist offenbar auch eine Invariante von H, aber nicht umgekehrt. Verweilen wir also einen Augenblick bei der Betrachtung der Invarianten der r-gliedrigen von der infinitesimalen Transformation $\mathfrak{X}_h f$ erzeugten Gruppe H.

Soll die Gruppe H überhaupt Invarianten besitzen, so müssen die partiellen Differentialgleichungen (35) eine Lösung zulassen. Aus der Unabhängigkeit der infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ folgt natürlich im Allgemeinen noch nicht die Unabhängigkeit der Gleichungen (35), da zwischen den $\mathfrak{X}_h f$ sehr wohl eine homogene lineare Beziehung mit von den $y_1, \cdots y_n$ abhängigen Coefficienten bestehen kann, ohne dass eine solche mit von den $y_1, \cdots y_n$ unabhängigen Coefficienten statt hat. Seien also etwa $q < r$ der Gleichungen (35) von einander unabhängig, dann bilden dieselben zufolge der zwischen den $\mathfrak{X}_h f$ bestehenden Relationen (31) (S. 34) ein q-gliedriges vollständiges System.

Wenn $q < n$ ist, so besitzt dieses vollständige System genau $n - q$ unabhängige Lösungen

$$u_1(y_1, \cdots y_n), \quad \cdots \quad u_{n-q}(y_1, \cdots y_n).$$

Diese sind also Invarianten von H, und jede Invariante von H lässt sich, als Lösung jenes vollständigen Systems, als Function dieser $n - q$ Invarianten darstellen; wir sagen darum, die letzteren bilden ein System von einander unabhängiger Invarianten der Gruppe H.

Ist $q = n$, so besitzt die Gruppe H überhaupt keine Invariante; wir können dies durch einen in der Gruppentheorie sehr bedeutsamen Terminus noch etwas anders ausdrücken.

Zunächst stellt sich die Thatsache, dass die Gleichungen (35) ein q-gliedriges vollständiges System bilden, so dar, dass das von den Coefficienten dieser Gleichungen gebildete rechteckige System

(36) $$\left(\xi_{hi}(y_1, \cdots y_n)\right) \qquad \binom{h=1, 2, \cdots r}{i=1, 2, \cdots n}$$

vom Range q ist. Die Gruppe H besitzt also dann und nur dann keine Invariante, wenn das System (36) genau vom Range n ist.

Die Transformationen von H lassen sich in der Form schreiben (vergl. S. 34, Nr. 139)

$$0 = -\eta_i + y_i + \sum_{h=1}^{r} l_h \xi_{hi}(y) + \sum_{h=1}^{r} \sum_{g=1}^{r} \frac{l_h l_g}{1 \cdot 2} X_g(\xi_{hi}(y)) + \cdots$$
$$(i = 1, 2, \cdots n).$$

Bezeichnen wir die rechten Seiten dieser Gleichungen für einen Augenblick durch Φ_i, so werden dieselben, nach einem bekannten Satze von Jacobi, dann und nur dann eine Auflösung nach n von den Parametern $l_1, l_2, \cdots l_r$ gestatten, wenn für n dieser Grössen, etwa

$$l_{i_1}, l_{i_2}, \cdots l_{i_n},$$

die nach denselben genommene Functionaldeterminante der Φ_i nicht identisch verschwindet, d. h. mit andern Worten, wenn das rechteckige System

(37) $$\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial l_h}\right) \qquad \binom{i=1, 2, \cdots n}{h=1, 2, \cdots r}$$

genau vom Range n ist. Für

$$l_1 = l_2 = \cdots = l_r = 0$$

reducirt sich aber dieses System auf das System (36). Wenn also der Rang dieses letzteren gleich n ist, so gilt das Gleiche für das System (37), d. h. in diesem Falle können die Gleichungen, welche die Transformationen von H darstellen, nach n von den Parametern l_h aufgelöst werden.

Das heisst aber mit anderen Worten: für ein beliebiges Werthesystem der y_i und ein ebenfalls beliebiges Werthesystem der η_i lässt sich stets ein Werthesystem (eventuell auch mehrere) der Parameter der Gruppe angeben, welches eine Transformation der Gruppe liefert, durch die diese beiden Werthesysteme y_i, η_i in einander übergehen; es giebt also, allgemein zu reden, stets Transformationen der Gruppe, die einen beliebigen Punkt (y_i) der n-fachen complexen Mannigfaltigkeit in einen beliebigen anderen Punkt ebendieser Mannigfaltigkeit überführen. Diese Eigenschaft der Gruppe H bezeichnet man dadurch, dass man sagt, die Gruppe sei transitiv, im entgegengesetzten Falle, d. h. wenn H nicht transitiv ist, heisst sie intransitiv.

Der Begriff der Transitivität ist zuerst von Cauchy für die aus den Permutationen von n Elementen gebildeten Gruppen eingeführt worden; Cauchy nennt eine solche Gruppe transitiv, wenn durch Anwendung ihrer Permutationen jedes Element an die Stelle jedes anderen Elementes treten kann. Insbesondere heisst die Gruppe m-fach transitiv, wenn ihre Permutationen es ermöglichen, m beliebige der n Elemente an die Stellen von m beliebigen anderen zu setzen.

Entsprechend dieser letzteren Bezeichnung nennt Herr Lie die Gruppe H einfach transitiv, wenn es im Allgemeinen auch nur eine Transformation derselben giebt, die einen beliebigen Punkt (y_i) in einen beliebigen anderen (η_i) verwandelt, d. h. also, wenn die Anzahl der Parameter der transitiven Gruppe genau gleich n ist.

Ist die Gruppe H intransitiv, so lassen sich aus den Definitionsgleichungen derselben Beziehungen zwischen den y_i und den η_i herleiten, die von den Parametern unabhängig sind. Das ist stets der Fall, wenn der Rang q des Systems (36) kleiner ist wie n. In diesem Falle ist, da der Rang von (37) nicht kleiner sein kann als q, die Anzahl der von den Parametern der Gruppe und von einander unabhängigen Beziehungen zwischen den y_i und η_i, die sich aus den Gleichungen $\Phi_i = 0$ herleiten lassen, keinesfalls grösser wie $n - q$. Sie muss aber genau gleich $n - q$ sein, denn wir kennen ja die $n - q$ unabhängigen Invarianten $u_1, \cdots u_{n-q}$ der Gruppe H, welche die $n - q$ von einander und von den Parametern der Gruppe unabhängigen Gleichungen

$$u_\varkappa(y_1, \cdots y_n) = u_\varkappa(\eta_1, \cdots \eta_n) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n - q)$$

liefern. Wir erschliessen also den Satz:

Ist die r-gliedrige continuirliche Gruppe H transitiv, so hat sie keine Invarianten. Ist sie intransitiv, so hat sie die gemeinsamen Lösungen der partiellen Differentialgleichungen

(35) zu Invarianten; in diesem Falle lassen sich aus den Definitionsgleichungen der Gruppe gewisse von einander unabhängige Relationen zwischen den y_i und den η_i herleiten, die auf die Form

$$u_\varkappa(y_1, \cdots y_n) = u_\varkappa(\eta_1, \cdots \eta_n)$$

gebracht werden können. Die $u_\varkappa(y_1, \cdots y_n)$ bilden alsdann ein System unabhängiger Lösungen des durch die Gleichungen (35) bestimmten vollständigen Systems, d. h. ein System von einander unabhängiger Invarianten.

142. Invarianten einer gemischten Gruppe. Differentialinvarianten.

Wir fragen nun, welche Invarianten von H zugleich Invarianten von G sind.

Da alle infinitesimalen Transformationen von G von den $\mathfrak{X}_h f$ abhängig sind, so verwandeln sich die $\mathfrak{X}_h f$ bei Anwendung irgend einer Transformation von G in lineare homogene Functionen ihrer selbst. Eine Lösung des durch die Gleichungen (35) bestimmten vollständigen Systems muss demnach bei Anwendung irgend einer Transformation von G wieder in eine Lösung übergehen. Also verwandelt sich jedes $u_\varkappa(y_1, \cdots y_n)$ in eine Function der $n-q$ Lösungen $u_1, \cdots u_{n-q}$. Da aber die $u_\varkappa(y_1, \cdots y_n)$ für die Gruppe H Invarianten und die sämmtlichen Transformationen von G in der Form

$$H, \quad T_1 H, \quad T_2 H, \cdots T_{\nu-1} H$$

darstellbar sind, so brauchen wir nur die Aenderungen zu betrachten, die die $u_1, \cdots u_{n-q}$ bei Anwendung der speciellen Transformationen $T_1, T_2, \cdots T_{\nu-1}$ erfahren.

Möge durch $T_\varkappa$ die Lösung $u_i(y_1, \cdots y_n)$ übergehen in

$$\omega_{i\varkappa}\big(u_1(y), \cdots u_{n-q}(y)\big),$$

dann bilden die ν Transformationen

$$\bar{u}_i(y) = \omega_{i\varkappa}\big(u_1(y), \cdots u_{n-q}(y)\big) \qquad {\scriptstyle (\varkappa = 0, 1, \cdots \nu - 1),} \atop {\scriptstyle (i = 1, 2, \cdots n - q),}$$

woselbst

$$\omega_{i0}\big(u_1(y), \cdots u_{n-q}(y)\big) = u_i(y)$$

zu nehmen ist, offenbar eine Gruppe, wenn wir die Functionszeichen $\omega_{i\varkappa}$ als Operationssymbole auffassen. Jede Function der $u_1, u_2, \cdots u_{n-q}$, die bei den Operationen dieser Gruppe ungeändert bleibt, ist dann eine Invariante von G.

Da nicht jede continuirliche Gruppe Invarianten hat, so ist es von Wichtigkeit, den Invariantenbegriff zu erweitern, indem man die Differentialinvarianten einführt. Zu dem Ende betrachten wir die $y_1, y_2, \cdots y_n$ als Functionen gewisser unabhängiger Variabeln, z. B. wie es bei unseren auf die linearen Differentialgleichungen bezüglichen Untersuchungen der Fall ist, als Functionen der einen unabhängigen Variabeln x, und bilden uns zunächst die Ausdrücke, die die Ableitungen der η_i durch die y_i und deren Ableitungen darstellen.

Wenn wir uns der Einfachheit wegen auf die Transformationen der r-gliedrigen continuirlichen Gruppe H beschränken

$$(38) \quad \eta_i = f_i^{(1)}\left(y_1, \cdots y_n \,|\, \mathfrak{a}_1^{(1)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(1)}\right) = f_i^{(1)}(y|\mathfrak{a}) \qquad (i=1,2,\cdots n),$$

so haben wir also diese Transformationsgleichungen zu differentiiren,

$$(39) \qquad \frac{d\eta_i}{dx} = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial y_\varkappa} \frac{dy_\varkappa}{dx},$$

dann stellen die Gleichungen (38), (39) zusammengenommen Transformationen in den $2n$ Grössen

$$y_1, \cdots y_n, \quad \frac{dy_1}{dx}, \cdots \frac{dy_n}{dx}$$

dar, die, wie leicht zu beweisen ist, eine von den r infinitesimalen Transformationen

$$\mathfrak{X}_h^{(1)} f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{hi}(y) \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d\xi_{hi}(y)}{dx} \frac{\partial f}{\partial \frac{dy_i}{dx}} \qquad (h=1,2,\cdots r)$$

erzeugte r-gliedrige Gruppe bilden; man nennt dieselbe die einmal erweiterte Gruppe H; wir wollen sie durch $H^{(1)}$ bezeichnen.

Die Zusammensetzung von $H^{(1)}$ (Nr. 140, S. 36) ist dieselbe, wie die der Gruppe H, die Invarianten von $H^{(1)}$ heissen Differentialinvarianten erster Ordnung von H. Fahren wir so fort, indem wir die Differentialquotienten der η_i etwa bis zur N^{ten} Ordnung bilden, so erhalten wir eine Gruppe in den $(N+1)n$ Grössen

$$y_1, \cdots y_n, \quad \frac{dy_1}{dx}, \cdots \frac{dy_n}{dx}, \cdots \frac{d^N y_1}{dx^N}, \cdots \frac{d^N y_n}{dx^N},$$

die von den r infinitesimalen Transformationen

$$\mathfrak{X}_h^{(N)} f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{hi}(y) \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d\xi_{hi}(y)}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} \frac{d^N \xi_{hi}(y)}{dx^N} \frac{\partial f}{\partial y_i^{(N)}}$$
$$(h=1,2,\cdots r)$$

erzeugt wird. Die Invarianten dieser, wie man sich ausdrückt, durch N-malige Erweiterung von H erzielten Gruppe $H^{(N)}$ sind die

Lösungen des vollständigen Systems, welches durch die partiellen Differentialgleichungen

$$\mathfrak{X}_h^{(N)} f = 0 \qquad (h = 1, 2, \cdots r)$$

bestimmt wird; sie sind Differentialinvarianten N^{ter} Ordnung der ursprünglichen Gruppe H, und man übersieht, dass, da N stets so gross gewählt werden kann, dass die Anzahl der Variabeln in diesen Differentialgleichungen grösser ist wie r, es stets möglich ist zu einer gegebenen r-gliedrigen continuirlichen Gruppe Differentialinvarianten zu finden, indem nämlich für hinreichend grosses N eine N-mal erweiterte Gruppe nothwendig einmal intransitiv werden muss.

Für die allgemeine lineare Gruppe L ist z. B. die $(n-1)$-malige Erweiterung $L^{(n-1)}$ noch transitiv, die n-malige $L^{(n)}$ dagegen intransitiv (vergl. Nr. 135, S. 17).

Offenbar ist jede Ableitung einer Differentialinvariante nach x selbst wieder eine Differentialinvariante.

Ebenso wie H kann nun auch G selbst beliebig oft erweitert werden; die Differentialinvarianten N^{ter} Ordnung der N-mal erweiterten Gruppe $G^{(N)}$ werden aus den Differentialinvarianten von $H^{(N)}$ in ähnlicher Weise ausgesondert, wie wir es für die Invarianten von G beziehungsweise H auseinandergesetzt haben.

Viertes Kapitel.

143. Algebraische Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe. Infinitesimale Transformationen. Algebraische Differentialgleichungen für rationale Differentialfunctionen.

Wir nehmen nunmehr die Untersuchung der rationalen Differentialfunction $R(y)$ wieder auf und können jetzt die Beziehung von $R(y)$ zu der durch die Gleichungen

$$R(y) = R(\eta)$$

bestimmten algebraischen Untergruppe $\mathfrak{G}$ der allgemeinen linearen Gruppe L dahin charakterisiren, dass wir sagen: $R(y)$ ist eine Differentialinvariante $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der $(n-1)$-mal erweiterten Gruppe $\mathfrak{G}^{(n-1)}$, wobei allerdings stets vor Augen zu halten ist, dass der Ausdruck $R(y)$ noch die Invarianten $p_1, \cdots p_n$ der Gruppe L nebst deren Ableitungen enthalten kann.

Die Gleichungen, welche die Gruppe $\mathfrak{G}$ definiren, seien

$$(1) \qquad \eta_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{i\varkappa}^{(j)}\left(\mathfrak{a}_1^{(j)}, \cdots \mathfrak{a}_r^{(j)}\right) y_\varkappa \qquad (j=1,2,\cdots \nu) \quad (i=1,2,\cdots n);$$

die dem $j=1$ entsprechende Schaar möge die in $\mathfrak{G}$ enthaltene r-gliedrige continuirliche Gruppe $\mathfrak{H}$ darstellen, welche von infinitesimalen Transformationen

$$\mathfrak{X}_h f \qquad (h=1,2,\cdots r)$$

erzeugt wird.

Diese infinitesimalen Transformationen sind natürlich linear, denn sie setzen sich aus den n^2 infinitesimalen Transformationen der allgemeinen linearen Gruppe L, d. h. aus den

$$y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

linear mit constanten Coefficienten zusammen. Sei

$$(2) \qquad \mathfrak{X}_h f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} e_{\varkappa i}^{(h)} y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (h=1,2,\cdots r);$$

dann sind also die im allgemeinen Falle mit $\xi_{hi}(y_1, \cdots y_n)$ bezeichneten Functionen einfach

$$\xi_{hi}(y_1, \cdots y_n) = \sum_{x=1}^{n} e_{xi}^{(h)} y_x.$$

Die infinitesimalen Transformationen der $(n-1)$-mal erweiterten Gruppe $\mathfrak{G}^{(n-1)}$ lauten

$$(3) \qquad \mathfrak{X}_h^{(n-1)} f = \sum_i \sum_x e_{xi}^{(h)} y_x \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_i \sum_x e_{xi}^{(h)} \frac{dy_x}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} + \cdots$$
$$+ \sum_i \sum_x e_{xi}^{(h)} \frac{d^{n-1} y_x}{dx^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial y_i^{(n-1)}},$$

und es muss demnach $R(y)$ eine Lösung des Systems partieller Differentialgleichungen

$$(4) \qquad \sum_i \sum_x e_{xi}^{(h)} \left\{ y_x \frac{\partial f}{\partial y_i} + \cdots + \frac{d^{n-1} y_x}{dx^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial y_i^{(n-1)}} \right\} = 0 \qquad (h = 1, 2, \cdots r)$$

sein. Dies giebt uns, falls die Function $R(y)$ gegeben ist, ein Mittel an die Hand, um die infinitesimalen Transformationen der Gruppen $\mathfrak{G}$ beziehungsweise $\mathfrak{H}$ zu finden.

Setzen wir nämlich in die Gleichungen (4) für f die Function $R(y)$ ein, so müssen diese Gleichungen identisch erfüllt sein. Soll eine Gleichung von der Form

$$\sum_i \sum_x e_{xi} \left\{ y_x \frac{\partial R}{\partial y_i} + y_x' \frac{\partial R}{\partial y_i'} + \cdots + y_x^{(n-1)} \frac{\partial R}{\partial y_x^{(n-1)}} \right\} = 0$$

identisch erfüllt sein, so liefert dies eine gewisse Anzahl linearer homogener Beziehungen zwischen den e_{xi}, vermöge deren sich eine gewisse Anzahl dieser Constanten durch die übrigen willkürlich bleibenden homogen linear darstellen lässt. Führen wir die so gewonnenen e_{xi} in den Ausdruck

$$\sum_i \sum_x e_{xi} y_x \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

ein, so stellt derselbe die allgemeinste infinitesimale Transformation von $\mathfrak{G}$ dar; die Factoren der willkürlich gebliebenen e_{xi} sind die Symbole der unabhängigen infinitesimalen Transformationen, welche die Gruppe $\mathfrak{H}$ erzeugen.

Es lassen sich aber aus den partiellen Differentialgleichungen (4) noch weitere wichtige Eigenschaften der Function $R(y)$ ableiten; wir müssen zu diesem Zwecke vorerst nachweisen, dass jene r partiellen Differentialgleichungen stets unabhängig von einander sind.

Wir haben bereits in der Nr. 135 (S. 17ff.) das System von partiellen Differentialgleichungen erwähnt, welches durch die Differentialinvarianten der allgemeinen linearen Gruppe L befriedigt wird.

Die n^2 von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$\mathfrak{X}_{\varkappa, i}^{(n-1)} f = y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial y_i} + y_\varkappa' \frac{\partial f}{\partial y_i'} + \cdots + y_\varkappa^{(n-1)} \frac{\partial f}{\partial y_i^{(n-1)}} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

erzeugen die $(n-1)$-mal erweiterte Gruppe $L^{(n-1)}$, und die Differentialgleichungen

$$(5) \qquad \mathfrak{X}_{\varkappa, i}^{(n-1)} f = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

müssen folglich durch jede Invariante von $L^{(n-1)}$ befriedigt werden. Diese Differentialgleichungen sind offenbar von einander unabhängig, denn die Determinante ihrer Coefficienten ist der n^{ten} Potenz der Determinante

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n)$$

des Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdots y_n$ gleich. Es constituiren folglich die Gleichungen (5) ein n^2-gliedriges vollständiges System in den n^2 Variabeln

$$(6) \qquad y_1, \cdots y_n, \quad y_1', \cdots y_n', \cdots y_1^{(n-1)}, \cdots y_n^{(n-1)},$$

woraus wir beiläufig schliessen können, dass es keine von diesen Variabeln abhängige Invariante von $L^{(n-1)}$ geben könne, ein Satz, den wir schon in der Nr. 135 (S. 17) bewiesen und dort so ausgesprochen haben, dass es keine Differentialinvariante von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung der Gruppe L giebt.

Die infinitesimalen Transformationen von $\mathfrak{G}^{(n-1)}$ sind zufolge der Gleichungen (2), (3) von der Form

$$\mathfrak{X}_h^{(n-1)} f = \sum_i \sum_\varkappa e_{\varkappa i}^{(h)} \mathfrak{X}_{\varkappa, i}^{(n-1)} f \qquad (h = 1, 2, \cdots r),$$

und da dieselben von einander unabhängig sind, so ist das System der $r \cdot n^2$ Elemente

$$\left(e_{\varkappa i}^{(h)}\right) \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \cdots r \\ i, \varkappa = 1, 2, \cdots n \end{pmatrix}$$

genau vom Range r. Nun sind die n^2 Gleichungen (5) von einander unabhängig, also gilt das Gleiche auch für irgendwelche r dieser Gleichungen; wir erhalten also auch r unabhängige Gleichungen, wenn wir mit Hülfe von $r \cdot n^2$ Grössen, die ein System vom Range r constituiren, r lineare homogene Verbindungen der Gleichungen (5) bilden.

Es sind also in der That die r Gleichungen (4) von einander unabhängig, dieselben stellen also ein genau r-gliedriges voll-

ständiges System von partiellen Differentialgleichungen in den n^2 Variabeln (6) dar.

Bilden wir nun die successiven $n^2 - r$ ersten Ableitungen der Differentialfunction $R(y)$ nach x und ersetzen in den so entstehenden Ausdrücken die Ableitungen der y_x, deren Ordnung höher ist als die $(n-1)^{\text{te}}$, durch ihre Werthe dargestellt mit Hülfe der $(n-1)$ ersten Ableitungen und der $p_1, p_2, \cdots p_n$ nebst deren Ableitungen, so sind die so entstehenden Ausdrücke, die wir der Reihe nach durch

$$R_1(y), \quad R_2(y), \cdots R_{n^2-r}(y)$$

bezeichnen, auch Differentialinvarianten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Gruppe $\mathfrak{G}$, sie befriedigen also ebenfalls das r-gliedrige vollständige System (4). Dieses System besitzt aber genau $n^2 - r$ von einander unabhängige Lösungen, durch dieselben müssen sich also die $n^2 - r + 1$ Lösungen

$$R(y), \quad R_1(y), \cdots R_{n^2-r}(y)$$

darstellen lassen. Bezeichnen wir die Differentialfunction $R(y)$ als Function von x aufgefasst durch V, so ist

$$(7) \qquad R(y) = V, \quad R_1(y) = \frac{dV}{dx}, \cdots R_{n^2-r}(y) = \frac{d^{n^2-r}V}{dx^{n^2-r}};$$

die linken Seiten dieser Gleichungen enthalten die n^2 Grössen (6) nur in $n^2 - r$ von einander unabhängigen Verbindungen, es muss folglich möglich sein, zwischen den Gleichungen (7) jene n^2 Grössen zu eliminiren. Sei

$$(8) \qquad \Phi\left(V, \frac{dV}{dx}, \cdots \frac{d^{n^2-r}V}{dx^{n^2-r}}\right) = 0$$

das Resultat dieser Elimination, wo also Φ eine ganze rationale Function seiner Argumente bedeutet, mit Coefficienten, die sich aus den $p_1, \cdots p_n$ und deren Ableitungen rational zusammensetzen, dann stellt uns die Gleichung (8) eine algebraische Differentialgleichung $(n^2 - r)^{\text{ter}}$ Ordnung dar, der die Function $R(y)$ genügen muss.

Bei der Bildung dieser Differentialgleichung, beziehungsweise der Gleichungen (7), wurde nur die Eigenschaft der $y_1, y_2, \cdots y_n$, der Differentialgleichung

$$(9) \quad (-1)^n \frac{D(y, y_1, y_2, \cdots y_n)}{D(y_1, y_2, \cdots y_n)} = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

Genüge zu leisten, benutzt.

Die Differentialgleichung (8) wird also auch befriedigt werden durch jede Function, die aus

$$V = R(y)$$

hervorgeht, wenn wir für $y_1, y_2, \cdots y_n$ irgendwelche n Lösungen der linearen Differentialgleichung (9) setzen, d. h. also durch

$$R(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n),$$

wo

$$\eta_i = \sum_{x=1}^{n} \alpha_{ix} y_x \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

ist, und die α_{ix} ganz beliebige Constanten, auch solche, deren Determinante verschwindet, bedeuten können.

144. Eigenschaften der algebraischen Differentialgleichungen, denen die rationalen Differentialfunctionen Genüge leisten.

Wir dürfen offenbar die linke Seite der Differentialgleichung (8), d. h. also die ganze Function Φ, als eine in Bezug auf die Grössen

$$V, \frac{dV}{dx}, \cdots \frac{d^{n^2-r} V}{dx^{n^2-r}}$$

im algebraischen Sinne irreductible Function betrachten; denn sollte sich Φ nicht gleich von vorneherein in irreductibler Form ergeben, so müsste einer der irreductiblen Factoren von Φ für $V = R(y)$ verschwinden, und da die Coefficienten dieses Factors sich rational aus den $p_1, \cdots p_n$ und deren Ableitungen zusammensetzen, so würde derselbe auch für $V = R(\eta)$ verschwinden, wenn die Determinante

$$|\alpha_{ix}| \qquad (i, x = 1, 2, \cdots n)$$

der $[y_x]$ mit $[\eta_x]$ verknüpfenden Transformation von Null verschieden ist. Sofern also nur solche $R(\eta)$ in Betracht kommen, die aus $R(y)$ durch die Transformationen der Gruppe L hervorgehen, könnte jener irreductible Factor an Stelle von Φ der Untersuchung zu Grunde gelegt werden.

Diejenigen Integrale $R(\eta)$ der Differentialgleichung (8), für welche die Determinante der α_{ix} verschwindet, sind in gewisser Weise als singuläre Lösungen von (8) aufzufassen; wir wollen darum jedes Integral $R(\eta)$, wo die $\eta_1, \cdots \eta_n$ ein Fundamentalsystem constituiren, als eine nicht singuläre Lösung von (8) bezeichnen.

Dann ist es von Wichtigkeit zu zeigen, dass eine solche nicht singuläre Lösung keiner algebraischen Differentialgleichung von niedrigerer als der $(n^2 - r)^{\text{ten}}$ Ordnung genügen kann, deren Coefficienten ebenso wie die von (8) rational in den $p_1, \cdots p_n$ und deren Ableitungen sind.

Zunächst ist klar, dass, wenn eine nicht singuläre Lösung von (8 einer Differentialgleichung von niedrigerer als der $(n^2 - r)^{\text{ten}}$ Ordnun Genüge leisten würde, diese Differentialgleichung zu Folge der Unve: änderlichkeit ihrer Coefficienten bei den Transformationen von L auc durch die allgemeinste nicht singuläre Lösung $R(\eta)$ befriedigt werde müsste. Nun lässt sich aber leicht einsehen, dass diese allgemeinst Lösung

$$R(\eta), \quad |\alpha_{i\varkappa}| \neq 0,$$

genau von $(n^2 - r)$ wesentlichen Parametern abhängt. Es gilt nämlic ganz allgemein der folgende von Herrn Vessiot herrührende Satz:

Setzt man in eine Function $R(y_1, y_2, \cdots y_n)$ an die Stell der $y_1, \cdots y_n$ die aus denselben durch die allgemeinste Trans formation

$$\eta_i = f_i(y_1, y_2, \cdots y_n | \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots \mathfrak{a}_\varrho) \quad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{10}$$

einer ϱ-gliedrigen Gruppe hervorgehenden transformirte Grössen $\eta_1, \cdots \eta_n$ ein, so hängt der Ausdruck $R(\eta_1, \cdots \eta_n$ genau von $\varrho - r$ wesentlichen Parametern ab, wenn $R(y)$ be r von einander unabhängigen infinitesimalen Transforma tionen der Gruppe (10) ungeändert bleibt.

Seien in der That

$$Y_h f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{hi}(y_1, \cdots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (h = 1, 2, \cdots \varrho)$$

ϱ unabhängige infinitesimale Transformationen, die die Gruppe (10 erzeugen, und möge $R(x)$ bei den $r < \varrho$ infinitesimalen Transformatione:

$$\sum_{h=1}^{\varrho} e_{gh} Y_h f \qquad (g = 1, 2, \cdots r), \tag{11}$$

wo die e_{gh} Constanten bedeuten, ungeändert bleiben; dann ist also

$$\sum_{h=1}^{\varrho} e_{gh} \sum_{i=1}^{n} \xi_{hi}(\eta_1, \cdots \eta_n) \frac{\partial R(\eta)}{\partial \eta_i} = 0 \qquad (g = 1, 2, \cdots r),$$

und da zufolge der in der Nr. 138 (S. 29) bewiesenen Sätze

$$\xi_{gi}(\eta_1, \cdots \eta_n) = \sum_{\varkappa=1}^{\varrho} \alpha_{g\varkappa}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots \mathfrak{a}_\varrho) \frac{\partial \eta_i}{\partial \mathfrak{a}_\varkappa} \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2, \cdots \varrho \\ i = 1, 2, \cdots n \end{pmatrix}$$

sein muss, wo die $\alpha_{g\varkappa}$ wohlbestimmte Functionen der $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots \mathfrak{a}$ bedeuten, so haben wir

$$\sum_{h=1}^{\varrho} e_{gh} \sum_{\varkappa=1}^{\varrho} \alpha_{h\varkappa}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots \mathfrak{a}_\varrho) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R(\eta)}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \mathfrak{a}_\varkappa} = 0 \qquad (g=1, 2, \cdots r).$$

Da aber ferner

$$\frac{\partial R(\eta)}{\partial \mathfrak{a}_\varkappa} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R(\eta)}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \mathfrak{a}_\varkappa}$$

ist, (wir nehmen der Einfachheit wegen an, dass $R(y)$ eine Function der $y_1, y_2, \cdots y_n$ allein sei; sollte es noch von den Ableitungen der $y_1, \cdots y_n$ abhängen, so wären die analogen Betrachtungen für die erweiterte Gruppe (10) anzustellen), so ergiebt sich endlich

$$\sum_{h=1}^{\varrho} e_{gh} \sum_{\varkappa=1}^{\varrho} \alpha_{h\varkappa}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots \mathfrak{a}_\varrho) \frac{\partial R(\eta)}{\partial \mathfrak{a}_\varkappa} = 0 \qquad (g=1, 2, \cdots r).$$

Diese partiellen Differentialgleichungen sind von einander unabhängig, denn die Determinante

$$|\alpha_{h\varkappa}(\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_\varrho)| \qquad (h, \varkappa = 1, 2, \cdots \varrho)$$

ist von Null verschieden und das System der

$$(e_{gh}) \qquad (g=1, 2, \cdots r;\ h=1, 2, \cdots \varrho)$$

ist vom Range r, wenn eben die infinitesimalen Transformationen (11) von einander unabhängig sind. Die Function $R(\eta)$ befriedigt also, wenn $R(y)$ bei r von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen der ϱ-gliedrigen Gruppe (10) ungeändert bleibt, als Function der $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots \mathfrak{a}_\varrho$ aufgefasst r lineare von einander unabhängige partielle Differentialgleichungen, und man übersieht auch sofort, dass umgekehrt, wenn $R(\eta)$ solche r partielle Differentialgleichungen erfüllt, ebensoviele von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe (10) vorhanden sein müssen, bei deren Anwendung $R(y)$ sich nicht verändert. Nach einer in der Nr. 134 (S. 14) gemachten Bemerkung hängt aber eine Function der $\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_\varrho$, die r von einander unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen erfüllt, von genau $\varrho - r$ Functionen dieser $\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_\varrho$ wesentlich ab, und umgekehrt; unsere Behauptung ist sonach als bewiesen anzusehen.

Es hängt also der Ausdruck

$$R(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n), \quad |\alpha_{i\varkappa}| \neq 0,$$

von genau $n^2 - r$ wesentlichen Parametern ab, da $R(y)$ bei den r infinitesimalen Transformationen von $\mathfrak{G}$ beziehungsweise $\mathfrak{H}$ ungeändert bleibt; diese Parameter spielen, wenn man $R(\eta)$ als Lösung der Differentialgleichung (8) auffasst, die Rolle von willkürlichen Constanten. Eine Function von x, die $n^2 - r$ willkürliche Constanten enthält, kann

aber keiner Differentialgleichung von niedrigerer als der $(n^2 - r)^{\text{ten}}$ Ordnung genügen, es hat also die Differentialgleichung (8) keines ihrer nicht singulären Integrale mit einer Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung und vom selben Charakter (so drücken wir uns kurz aus, um hervorzuheben, dass die Coefficienten der Differentialgleichung Invarianten der linearen Gruppe L sind) gemein.

145. Rationale Differentialfunctionen, die zur selben Gruppe gehören.

Denken wir uns für eine Differentialfunction $R(y)$ die successiven n^2 ersten Ableitungen gebildet und aus diesen die Ableitungen der $y_1, y_2, \cdots y_n$, deren Ordnungszahl grösser ist wie $n-1$, weggeschafft; bezeichnen wir diese Ausdrücke durch

$$R_\varkappa(y) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n^2),$$

so ist also, wenn wir $R(y)$ als Function von x gleich V setzen,

$$(12) \qquad V = R(y), \quad \frac{dV}{dx} = R_1(y), \quad \cdots \quad \frac{d^{n^2} V}{dx^{n^2}} = R_{n^2}(y).$$

Aus diesen $n^2 + 1$ Gleichungen, die jedenfalls mit einander verträglich sein müssen, lassen sich die n^2 Grössen

$$(13) \qquad y_1, \cdots y_n, \quad \frac{dy_1}{dx}, \cdots \frac{dy_n}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}, \cdots \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}$$

allemal eliminiren; es wird sich aber im Allgemeinen ereignen können, dass schon die $s+1$ ersten dieser Gleichungen eine Elimination jener n^2 Grössen gestatten, und dann genügt $R(y)$ einer algebraischen Differentialgleichung s^{ter} Ordnung vom selben Charakter wie (8). Es muss also die kleinste Zahl, für welche eine solche Elimination möglich ist, mit $n^2 - r$ übereinstimmen, und wir können somit auf Grund unserer bisherigen Untersuchungen den folgenden Satz aussprechen:

Bedeutet s die kleinste Zahl, für welche aus den $s+1$ ersten der Gleichungen (12) eine Elimination der sämmtlichen n^2 Grössen (13) möglich ist, so hängt die Function

$$R(\eta_1, \cdots \eta_n),$$

woselbst

$$\eta_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{i\varkappa} y_\varkappa, \quad |\alpha_{i\varkappa}| \neq 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

ist, von genau s wesentlichen Parametern ab, und die durch die Gleichung

$$R(y) = R(\eta)$$

definirte algebraische Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe L enthält genau $n^2 - s$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen.

Daraus, dass $R(y)$ keiner Differentialgleichung von niedrigerer als der $(n^2 - r)^{\text{ten}}$ Ordnung genügen kann, schliessen wir nunmehr, dass die $n^2 - r$ Functionen

(14) $$R(y), \quad R_1(y), \cdots R_{n^2-r-1}(y)$$

ein System unabhängiger Lösungen des vollständigen Systems (4) (S. 46) bilden. Es lässt sich folglich jede Lösung dieses vollständigen Systems als Function der Lösungen (14) darstellen. Die Lösungen von (4) sind aber nichts anderes als die Differentialinvarianten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der von den r infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_h f$ $(h=1, 2, \cdots r)$ erzeugten Gruppe $\mathfrak{H}$. Bedeutet also $S(y_1, y_2, \cdots y_n)$ eine rationale Differentialfunction, die bei den Transformationen von $\mathfrak{H}$ ungeändert bleibt, so ist S als Function der Lösungen (14), und zwar offenbar als algebraische Function derselben darstellbar.

Falls S nur die Transformationen der r-gliedrigen Gruppe $\mathfrak{H}$, nicht aber die der gesammten Gruppe $\mathfrak{G}$ zulässt, kann der algebraische Ausdruck von S durch die Functionen (14) auch nicht mit Zuhilfenahme der durch die Gleichung (8) definirten Irrationalität

$$\frac{d^{n^2-r} V}{d x^{n^2-r}}$$

auf eine rationale Form gebracht werden.

Wenn dagegen die rationale Differentialfunction S bei allen Transformationen von $\mathfrak{G}$ ungeändert bleibt, so lässt sich S als rationale Function von $R(y)$ und seinen Ableitungen sowie von den $p_1, p_2, \cdots p_n$ nebst deren Ableitungen darstellen.

Man könnte dies dadurch beweisen, dass man annimmt, die Functionen $y_1, \cdots y_n$ von x seien als eindeutige Functionen gegeben; dann müsste nämlich einem zu einem bestimmten x-Werthe gehörigen Werthesystem von $R(y)$ und seinen Ableitungen auch ein einziger Werth von $S(y)$ entsprechen; wir wollen den Beweis aber etwas schärfer fassen, indem wir mit Herrn Vessiot direct auf die Differentialgleichungen zurückgreifen, denen die Functionen $S(y)$ und $R(y)$ Genüge leisten.

Bilden wir (vergl. S. 52) die Differentialgleichung niedrigster Ordnung, der $S(y_1, y_2, \cdots y_n)$ genügt. Sei dieselbe

$$\Phi(S) = 0,$$

wo $\Phi(S)$ eine ganze rationale Function bedeutet, die in Bezug auf S

und seine Ableitungen im algebraischen Sinne irreductibel ist. Da wird diese Differentialgleichung auch befriedigt durch

$$S(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n),$$

wenn wir, wie gewöhnlich, durch $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ ein beliebiges Syst von Integralen der Differentialgleichung (9) (S. 48) bezeichnen.

Bedeute nun u eine unbestimmte Function von x und sei

$$W = uR(y_1, y_2, \cdots y_n) + S(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n),$$

so genügt W der Differentialgleichung

$$\Phi\big(W - uR(y_1, y_2, \cdots y_n)\big) = 0. \tag{15}$$

Bilden wir andererseits die Differentialgleichung niedrigster O nung, der die Function

$$W = uR(\eta_1, \cdots \eta_n) + S(\eta_1, \cdots \eta_n)$$

Genüge leistet,

$$\Psi(W) = 0, \tag{16}$$

so müssen die gemeinsamen Lösungen der Differentialgleichungen (und (16) die Gleichung

$$uR(y_1, \cdots y_n) + S(\bar{y}_1, \cdots \bar{y}_n) = uR(\eta_1, \cdots \eta_n) + S(\eta_1, \cdots \eta_n)$$

erfüllen, wo $\bar{y}_1, \cdots \bar{y}_n$ ein bestimmtes Fundamentalsystem von (9) deutet. Es muss also, da u eine Unbestimmte ist,

$$R(y_1, \cdots y_n) = R(\eta_1, \cdots \eta_n),$$
$$S(\bar{y}_1, \cdots \bar{y}_n) = S(\eta_1, \cdots \eta_n)$$

sein. Da aber S und R bei denselben Transformationen der line Gruppe L ungeändert bleiben, muss allemal, wenn

$$R(y_1, \cdots y_n) = R(\eta_1, \cdots \eta_n)$$

ist, auch

$$S(y_1, \cdots y_n) = S(\eta_1, \cdots \eta_n)$$

sein, so dass also die Gleichungen (15), (16) nur das eine gemeins Integral

$$W_0 = uR(y_1, y_2, \cdots y_n) + S(y_1, y_2, \cdots y_n)$$

besitzen können. Um hieraus den zu beweisenden Satz erschlie zu können, müssen wir einen allgemeinen Satz aus der Theorie Differentialgleichungen kennen lernen.

146. Allgemeine Sätze über Differentialgleichungen. Satz, der dem Theoreme des Lagrange analog ist.

Wir behaupten zuvörderst:

Wenn zwei algebraische Differentialgleichungen ein und nur ein particulares Integral mit einander gemein haben, so ist dasselbe nothwendig eine algebraische Function.

Dieser Satz ist ein besonderer Fall des folgenden allgemeinen von Herrn Koenigsberger herrührenden Satzes:

Hat eine algebraische Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung

(I) $$F(x, z, z', \cdots z^{(\mu)}) = 0$$

mit einer Differentialgleichung von niedrigerer, etwa m^{ter} Ordnung $(m < \mu)$

(II) $$f(x, z, z', \cdots z^{(m)}) = 0,$$

die in Bezug auf $z^{(m)}$ im algebraischen Sinne irreductibel ist, ein Integral gemein, welches keiner Differentialgleichung von noch niedrigerer Ordnung genügt, so befriedigen die sämmtlichen Lösungen von (II) die Differentialgleichung (I).

In der That ergiebt sich aus (II) durch Differentiation

(III) $$\frac{\partial f}{\partial z^{(m)}} z^{(\varkappa)} = f_\varkappa(x, z, z', \cdots z^{(m)}) \qquad (\varkappa = m+1, m+2 \cdots \mu),$$

wo $f_\varkappa(x, z, z', \cdots z^{(m)})$ eine ganze rationale Function seiner Argumente bedeutet; wenn wir also durch z_1 das den Differentialgleichungen (I) und (II) gemeinsame Integral bezeichnen, so werden die Ableitungen von z_1, deren Ordnung höher ist als die m^{te}, durch die Formeln (III) als rationale Functionen der m ersten Ableitungen gegeben, da der Factor von $z^{(\varkappa)}$

$$\frac{\partial f}{\partial z^{(m)}},$$

der in Bezug auf $z^{(m)}$ von niedrigerem Grade ist wie die linke Seite von (II), für $z = z_1$ nicht verschwinden kann.

Wäre dies nämlich der Fall, so müsste sich, indem man auf $f(x, z, z', \cdots z^{(m)})$ und

$$\frac{\partial f}{\partial z^{(m)}},$$

als ganze Functionen von $z^{(m)}$ aufgefasst, das Verfahren zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers anwendet, entweder eine Differentialgleichung von niedrigerer als der m^{ten} Ordnung ergeben, der z_1 genügt,

oder es müsste $f(x, z, \cdots z^{(m)})$ in Factoren zerfallen, die in Bezug auf $z^{(m)}$ ganze rationale Functionen sind; beides würde aber gegen die gemachten Annahmen verstossen.

Setzen wir die sich aus (III) ergebenden Werthe von

$$z^{(m+1)}, \quad z^{(m+2)}, \cdots z^{(\mu)}$$

in (I) ein, so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$\Phi(x, z, z', \cdots z^{(m)}) = 0,$$

die für $z = z_1$ befriedigt werden muss. Diese darf mit (II) zusammen eine Elimination von $z^{(m)}$ nicht gestatten, da sonst z_1 einer Differentialgleichung von niedrigerer als der m^{ten} Ordnung genügen würde; ebensowenig kann Φ in Bezug auf $z^{(m)}$ von niedrigerem Grade sein als f. Also muss zufolge von bekannten Sätzen der Algebra

$$\Phi(x, z, \cdots z^{(m)}) = f(x, z, \cdots z^{(m)}) \Psi(x, z, \cdots z^{(m)})$$

sein, wo Ψ ebenso wie Φ eine ganze rationale Function seiner Argumente bedeutet. Also verschwindet Φ für alle Lösungen der Differentialgleichung (II), und folglich befriedigen auch diejenigen Lösungen von (II), die nicht

$$\frac{\partial f}{\partial z^{(m)}}$$

zu Null machen, d. h. die nicht singuläre Integrale (im gewöhnlichen Sinne) sind, die Differentialgleichung (I).

Hat nun eine Differentialgleichung von der Form (I) mit der Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung

(IV) $$G(x, z, z', \cdots z^{(\nu)}) = 0$$

ein und nur ein particulares Integral z_1 gemein, so muss es eine Differentialgleichung niedrigster Ordnung, die in Bezug auf die höchste in derselben auftretende Ableitung in algebraischem Sinne irreductibel ist, geben, der dieses Integral z_1 Genüge leistet; sei dies die Differentialgleichung (II). Dann sind also die sämmtlichen Integrale von (II) sowohl Integrale von (I) als auch von (IV), d. h. sie sind gemeinsame Lösungen dieser beiden Differentialgleichungen. Also muss die Differentialgleichung (II) von der nullten Ordnung, d. h. eine algebraische Gleichung sein; die gemeinsame Lösung z_1 ist demnach, wie behauptet wurde, eine algebraische Function.

Wenden wir dies auf die Untersuchung der Nr. 145 (S. 54) an, so schliessen wir also, dass W_0 eine algebraische Function der Coefficienten der Differentialgleichungen (15), (16) sein müsse. Da aber ferner, wenn $y_1, y_2, \cdots y_n$ als eindeutige Functionen von x gewählt werden, sowohl $R(y)$ als auch $S(y)$ eindeutige Functionen von x sind, so muss

die algebraische Gleichung für W_0 vom ersten Grade, d. h. W_0 eine rationale Function der Coefficienten der Gleichungen (15), (16) sein. Es ist also W_0 und folglich auch $S(y_1, \cdots y_n)$ eine rationale Function von $R(y_1, \cdots y_n)$ und seinen successiven Ableitungen, d. h. da $R(y)$ der Differentialgleichung (8) genügt, eine rationale Function der durch die Gleichung (8) mit einander verknüpften Grössen

$$R(y), \quad R_1(y), \quad \cdots \; R_{n^2-r}(y),$$

mit Coefficienten, die noch von den $p_1, \cdots p_n$ nebst deren Ableitungen abhängen.

Dieses Ergebniss entspricht dem Lagrange'schen Theoreme von den ähnlichen Functionen in der Algebra, demzufolge eine rationale Function der n Unbestimmten $x_1, x_2, \cdots x_n$, die bei derselben Permutationsgruppe ungeändert bleibt, wie eine andere rationale Function $R(x_1, \cdots x_n)$ dieser Unbestimmten sich rational durch R und die elementaren symmetrischen Functionen darstellen lässt. Wir können auch sofort den folgenden einer bekannten Verallgemeinerung des Lagrange'schen Theorems entsprechenden Satz beweisen:

Wenn die rationale Differentialfunction $S(y_1, y_2, \cdots y_n)$ bei denjenigen Transformationen ungeändert bleibt, welche den Gruppen, die beziehungsweise die Differentialfunctionen $R_1(y), R_2(y), \cdots R_\varkappa(y)$ ungeändert lassen, gemeinsam sind, so ist $S(y)$ rational durch die

$$R_1(y), \quad R_2(y), \quad \cdots \; R_\varkappa(y), \quad p_1, p_2, \cdots p_n$$

und deren Ableitungen darstellbar.

Bilden wir nämlich den Ausdruck

$$R(y) = u_1 R_1(y) + u_2 R_2(y) + \cdots + u_\varkappa R_\varkappa(y),$$

wo die $u_1, u_2, \cdots u_\varkappa$ unbestimmte Functionen von x bedeuten, so bleibt $S(y)$ bei den Transformationen der Gruppe, die diesen Ausdruck ungeändert lässt, ebenfalls ungeändert, und hierdurch ist der zu beweisende Satz auf den bereits bewiesenen (S. 53) zurückgeführt.

Fünftes Kapitel.

147. **Resolventen. Insbesondere solche, die ausgezeichneten Untergruppen entsprechen. Empfindliche Function. Picard'sche Resolvente.**

Wir können die Differentialgleichung niedrigster Ordnung, der eine rationale Differentialfunction $R(y_1, y_2, \cdots y_n)$ genügt, unter Anwendung einer in der Algebra gebräuchlichen Terminologie als eine Resolvente der linearen Differentialgleichung (9) (S. 48) bezeichnen (vergl. Nr. 136, S. 19). Die Natur dieser Resolvente hängt offenbar wesentlich von der Beschaffenheit der Transformationsgruppe $\mathfrak{G}$ ab, die $R(y)$ unverändert lässt.

In der Algebra spielen bekanntlich diejenigen Resolventen einer Gleichung eine besonders wichtige Rolle, für welche die Permutationsgruppe der der Resolvente genügenden Function eine ausgezeichnete Untergruppe der symmetrischen Gruppe aller $n!$ Permutationen ist. Wir wollen hier das analoge Verhalten für die Gruppe $\mathfrak{G}$ voraussetzen, d. h. rationale Differentialfunctionen untersuchen, deren Gruppe eine ausgezeichnete Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe L ist.

Hat man allgemein eine rationale Differentialfunction $R(y_1, y_2, \cdots y_n)$ und bedeutet $\mathfrak{H}$ die Gruppe linearer Transformationen, bei deren Anwendung $R(y)$ ungeändert bleibt, geht ferner das Fundamentalsystem $[\eta_\varkappa]$ aus $[y_\varkappa]$ durch die nicht zur Gruppe $\mathfrak{H}$ gehörige lineare Substitution T hervor, d. h. ist

$$[\eta_\varkappa] = T[y_\varkappa],$$

so bleibt die Function $R(\eta)$ bei den Transformationen der mit $\mathfrak{H}$ gleichberechtigten Untergruppe (vergl. S. 36, Nr. 140)

$$T^{-1}\mathfrak{H}T$$

ungeändert.

Denn sei, in leichtverständlicher Schreibweise,

$$R(\eta) = R(Ty) = R(y),$$

so ist offenbar

$$R(y) = R(\mathfrak{H}\eta) = R(\mathfrak{H}Ty) = R(T^{-1}\mathfrak{H}Ty).$$

Sei nun

$$\Phi(V) = 0 \tag{17}$$

die Differentialgleichung niedrigster Ordnung, der $R(y)$ genügt, so sind die übrigen nicht singulären Integrale dieser Differentialgleichung in der Form

$$R(\eta) = R(Ty)$$

enthalten, wenn wir jetzt durch T die allgemeinste lineare Transformation mit nicht verschwindender Determinante bezeichnen. Die denselben entsprechenden Transformationsgruppen sind also die sämmtlichen mit $\mathfrak{H}$ gleichberechtigten Untergruppen

$$T^{-1}\mathfrak{H}T$$

der allgemeinen linearen Gruppe L.

Ist $\mathfrak{H}$ innerhalb L ausgezeichnet, d. h. stimmen alle zu $\mathfrak{H}$ gleichberechtigten Untergruppen mit $\mathfrak{H}$ selbst überein, so ist jedes $R(\eta)$ eine Function, die dieselbe Gruppe zulässt wie $R(y)$ selbst; es ist folglich jedes $R(\eta)$ eine rationale Function von $R(y)$ und seinen successiven Ableitungen mit Coefficienten, die sich rational aus den $p_1, p_2, \cdots p_n$ nebst deren Ableitungen zusammensetzen.

Die identische Transformation ist in L offenbar als ausgezeichnete Untergruppe enthalten; die soeben für $R(y)$ hervorgehobene Eigenschaft wird also sicherlich einer solchen Differentialfunction zukommen, deren Gruppe nur aus der identischen Transformation besteht, d. h. einer Function, die sich bei allen linearen Transformationen verändert. Eine so beschaffene Function spielt in unserer Theorie die analoge Rolle, wie die von Galois eingeführte sogenannte empfindliche Function in der Algebra; wir wollen auch dieselbe Bezeichnung für die von uns zu betrachtenden Functionen beibehalten.

Sei also $R(y)$ eine empfindliche Function. Dann ist die früher mit r bezeichnete Zahl gleich Null, also sind nach dem Satze der Nr. 145 (S. 52) die $n^2 + 1$ Gleichungen (12) von einander unabhängig in dem Sinne, dass wir etwa aus den n^2 ersten derselben die Grössen (13) ausrechnen können, und dass dann diese Werthe in die letzte Gleichung eingesetzt die Differentialgleichung von der Ordnung n^2 ergeben, der die Function $R(y)$ genügt.

Die Berechnung der Grössen (13) muss aber überdies auf eindeutige Weise erfolgen können. Denn ergäben sich zwei verschiedene Werthesysteme dieser Grössen, so müssten dieselben zunächst offenbar durch eine $(n - 1)$-mal erweiterte Transformation der Gruppe L aus einander hervorgehen und $R(y)$ müsste bei dieser Transformation

ungeändert bleiben. Also ergeben sich die Grössen (13) nothwendig als rationale Functionen von $R(y)$ und seinen successiven Ableitungen mit Coefficienten, die von den $p_1, \cdots p_n$ nebst deren Ableitungen rational abhängen, d. h. wir haben den einem bekannten Satze der Algebra analogen Satz:

Eine empfindliche Function $R(y)$, d. h. eine solche, die bei keiner linearen Transformation der $y_1, y_2, \cdots y_n$ ungeändert bleibt, genügt einer Differentialgleichung von der Ordnung n^2; jede nicht singuläre Lösung derselben lässt sich ebenso wie die $y_1, y_2, \cdots y_n$ und deren Ableitungen durch $R(y)$, seine Ableitungen, die $p_1, p_2, \cdots p_n$ und deren Ableitungen rational darstellen.

Ein Beispiel einer empfindlichen Function liefert der von Herrn Picard betrachtete Ausdruck

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} A_{0\varkappa} y_\varkappa + \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{i\varkappa} \frac{dy_\varkappa}{dx} + \cdots + \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{n-1,\varkappa} \frac{d^{n-1} y_\varkappa}{dx^{n-1}} = \mathfrak{U}(y),$$

in welchem die $A_{i\varkappa}$ $(i=0,1,\cdots n)$ willkürliche (unbestimmte) Functionen von x bedeuten. Differentiiren wir denselben (n^2-1)-mal nach x und schaffen die Ableitungen von höherer als der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung der $y_1, y_2, \cdots y_n$ mit Hülfe der Differentialgleichung (9) weg, so erhalten wir n^2 lineare Gleichungen für die n^2 Grössen (13), aus denen sich diese Grössen in der Form

$$y_\varkappa^{(i)} = w_{\varkappa i 1}\mathfrak{U} + w_{\varkappa i 2}\frac{d\mathfrak{U}}{dx} + \cdots + w_{\varkappa i n^2}\frac{d^{n^2-1}\mathfrak{U}}{dx^{n^2-1}} \quad \begin{pmatrix} \varkappa = 1, 2, \cdots n \\ i = 0, 1, \cdots n-1 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

also in diesem Falle als lineare Functionen von $\mathfrak{U}$ und seinen Ableitungen berechnen lassen, wo die Coefficienten $w_{\varkappa i l}$ sich aus den $A_{i\varkappa}$, deren Ableitungen, sowie den $p_1, p_2, \cdots p_n$ nebst deren Ableitungen rational zusammensetzen. Fügt man noch die Ableitung der Ordnung n^2 von $\mathfrak{U}$ hinzu, so ergiebt sich, wenn man in dieselbe die gefundenen Werthe der $y_\varkappa^{(i)}$ einführt, die Differentialgleichung von der Ordnung n^2, der $\mathfrak{U}$ genügt, und zwar ist dies in diesem Falle eine lineare homogene Differentialgleichung

$$\frac{d^{n^2}\mathfrak{U}}{dx^{n^2}} + \pi_1\frac{d^{n^2-1}\mathfrak{U}}{dx^{n^2-1}} + \cdots + \pi_{n^2}\mathfrak{U} = 0. \tag{19}$$

Wir nennen dieselbe die Picard'sche Resolvente der Differentialgleichung (9); die Coefficienten $\pi_1, \cdots \pi_{n^2}$ derselben setzen sich rational aus den $A_{i\varkappa}, p_1, \cdots p_n$ und deren Ableitungen zusammen.

Für manche Betrachtungen genügt es, einen besonderen Fall der Function $\mathfrak{U}(y)$ zu Grunde zu legen, der auch noch den Charakter einer empfindlichen Function besitzt, und den man erhält, indem man die

$$A_{ix} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots n-1)$$

nimmt. Die so entstehende Function

$$u(y) = A_{01}y_1 + A_{02}y_2 + \cdots + A_{0n}y_n,$$

in welcher die $A_{01}, A_{02}, \cdots A_{0n}$ noch als unbestimmte Functionen von x anzusehen sind, hat mit $\mathfrak{U}(y)$ die beiden Eigenschaften gemein, dass sie einer linearen homogenen Differentialgleichung der Ordnung n^2 genügt, und dass sich die Grössen (13) durch die Function $u(y)$ und ihre Ableitungen linear mit von den $A_{01}, A_{02}, \cdots A_{0n}$, den $p_1, p_2, \cdots p_n$ und deren Ableitungen rational abhängenden Coefficienten darstellen lassen.

Die Einführung der empfindlichen Function ermöglicht es nunmehr, wie Herr Picard zum ersten Male gezeigt hat, für die linearen homogenen Differentialgleichungen eine Theorie aufzustellen, die der Galois'schen Theorie der algebraischen Gleichungen in vielen Punkten analog ist.

148. Einige Sätze aus Galois' Theorie der algebraischen Gleichungen.

Wir erinnern zunächst an einige Hauptsätze der Galois'schen Theorie.

Hat man n willkürliche Grössen $x_1, x_2, \cdots x_n$, so kann man dieselben auffassen als Wurzeln einer algebraischen Gleichung

$$\text{(I)} \qquad f(x) = x^n - f_1x^{n-1} + f_2x^{n-2} - \cdots + (-1)^n f_n = 0,$$

wo $f_1, f_2, \cdots f_n$ die elementaren symmetrischen Functionen bedeuten. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ n Unbestimmte, so genügt die empfindliche, d. h. bei allen $n!$ Permutationen der $x_1, \cdots x_n$ veränderliche Function

$$v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

der Gleichung vom Grade $n!$

$$\text{(II)} \qquad \mathfrak{F}(v) = \prod_{(i_1, i_2, \cdots i_n)} \left(v - \alpha_1 x_{i_1} - \alpha_2 x_{i_2} - \cdots - \alpha_n x_{i_n}\right)$$

$$= v^{n!} - \mathfrak{F}_1 v^{n!-1} + \cdots + \mathfrak{F}_{n!} = 0,$$

wo das Productzeichen Π sich auf alle möglichen $n!$ Permutationen

$$i_1, i_2, \cdots i_n$$

der Zahlen 1, 2, $\cdots n$ bezieht, und deren Coefficienten $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \cdots \mathfrak{F}_{n!}$ symmetrische Functionen der $x_1, x_2, \cdots x_n$ sind.

Diese Gleichung, die sogenannte Galois'sche Resolvente, ist irreductibel, solange die $x_1, x_2, \cdots x_n$ von einander unabhängige Variable bedeuten. Die Gleichung (I) hat dann die Eigenschaft, dass jede rationale Function ihrer Wurzeln, die rational durch die Coefficienten ausgedrückt werden kann, bei sämmtlichen $n!$ Permutationen der symmetrischen Gruppe ungeändert bleibt; umgekehrt kann natürlich jede bei allen $n!$ Permutationen unveränderliche Function der Wurzeln rational durch die Coefficienten $f_1, f_2, \cdots f_n$ dargestellt werden.

Hat man dagegen eine specielle Gleichung n^{ten} Grades

$$\text{(III)} \qquad x^n - c_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_n = 0$$

und bezeichnet durch $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ die Wurzeln derselben, so kann es sich ereignen, dass die Gleichung (II) reductibel wird, wenn man für $x_1, x_2, \cdots x_n$ die $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ einsetzt, d. h. dass sie in Factoren zerfällt, deren Coefficienten demselben Rationalitätsbereiche angehören, wie die Coefficienten der Gleichung (III).

Sei dann $F_1(v)$ derjenige irreductible Factor der linken Seite von (II), der für

$$v = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \cdots + \alpha_n \xi_n$$

verschwindet, und mögen allgemein durch

$$\alpha_1 \xi_{h_1} + \alpha_2 \xi_{h_2} + \cdots + \alpha_n \xi_{h_n}$$

die Wurzeln der Gleichung

$$F_1(v) = 0$$

dargestellt werden, wo also $h_1, h_2, \cdots h_n$ gewisse Permutationen der Zahlen 1, 2, $\cdots n$ bedeuten. Die Permutationen

$$\xi_{h_1}, \xi_{h_2}, \cdots \xi_{h_n}$$

bilden dann eine Gruppe, die man die Galois'sche Gruppe der Gleichung nennt und die die folgende Doppeleigenschaft besitzt:

Eine rationale Function der Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$, die ihren numerischen Werth nicht ändert, wenn man auf die $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ eine Permutation der Gruppe anwendet, ist rational bekannt, und umgekehrt verändert eine rationale Function der Wurzeln, die rational bekannt ist, ihren numerischen Werth nicht, wenn man mit den $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ eine Permutation jener Gruppe vornimmt.

Die Galois'sche Gruppe der speciellen Gleichung (III) besitzt also dieselben Eigenschaften in Bezug auf jene Gleichung, wie die sym—

metrische Gruppe in Bezug auf die Gleichung (I). Der specielle Charakter der Gleichung (III) besteht darin, dass für dieselbe die Gleichung (II) reductibel wird; man drückt dies nach Kronecker dadurch aus, dass man sagt, die Gleichung (III) besitze einen Affect. Der Affect einer Gleichung kann dann in folgender Weise dargestellt werden.

Denken wir uns den irreductiblen Factor $F_1(v)$ in seine linearen Factoren zerlegt

$$F_1(v) = \prod_{(h_1, h_2, \cdots h_n)} \left(v - \alpha_1 \xi_{h_1} - \alpha_2 \xi_{h_2} - \cdots - \alpha_n \xi_{h_n}\right),$$

so können wir, indem wir diese linearen Factoren statt nach den $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ nach den $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ ordnen, $F_1(v)$ auch in der Form

$$F_1(v) = \prod_{(h_1, h_2, \cdots h_n)} \left(v - \alpha_{h_1} \xi_1 - \alpha_{h_2} \xi_2 - \cdots - \alpha_{h_n} \xi_n\right)$$

schreiben. Es erscheint dadurch $F_1(v)$ als ganze rationale Function der Unbestimmten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$, die formell ungeändert bleibt, wenn mit diesen Unbestimmten eine Permutation der Galois'schen Gruppe der Gleichung (III) vorgenommen wird. Setzen wir an die Stelle der $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ die $x_1, x_2, \cdots x_n$, so haben wir auf diese Weise die Gesammtheit der Functionen der n unbestimmten Grössen $x_1, x_2, \cdots x_n$ charakterisirt, die bei den Permutationen unserer Gruppe ungeändert bleiben. Diese Gesammtheit oder, wie Kronecker sich ausdrückt, diese Gattung von Functionen der $x_1, x_2, \cdots x_n$ (die sich nach dem Lagrange'schen Satze alle rational durch eine derselben und die elementaren symmetrischen Functionen $f_1, f_2, \cdots f_n$ darstellen lassen) hat die Eigenschaft, dem Rationalitätsbereiche der Coefficienten der Gleichung (III) anzugehören, wenn man die $x_1, x_2, \cdots x_n$ durch die $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ ersetzt.

Bedeutet also $g(x_1, x_2, \cdots x_n)$ eine Function dieser Gattung, so werden die Affect-Eigenschaften der Gleichung (III) charakterisirt durch das System von $n + 1$ Gleichungen

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots x_n) = c_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n(x_1, x_2, \cdots x_n) = c_n, \\ g(x_1, x_2, \cdots x_n) = g(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n) = c, \end{cases}$$

wo c einen bestimmten rationalen Werth bedeutet, und dieses Gleichungssystem wird nur befriedigt durch die Werthesysteme

$$x_1 = \xi_{h_1}, \quad x_2 = \xi_{h_2}, \quad \cdots \ x_n = \xi_{h_n},$$

die den Permutationen der Gruppe unserer Gleichung (III) entsprechen.

149. Differentialgleichung niedrigster Ordnung für die empfindlic Function.

Wir wollen nun nach Herrn Picard die analogen Betrachtung für lineare Differentialgleichungen anzustellen versuchen.

Eine Bemerkung haben wir noch vorauszuschicken.

Aus den Gleichungen (18) folgt, dass jeder Lösung der lineal Differentialgleichung (19) ein wohlbestimmtes System von n Integral der linearen Differentialgleichung (9) entspricht. Dieses System mı aber nicht nothwendig ein Fundamentalsystem sein; die Bedingu dafür, dass zwischen den durch die Gleichungen (18) definirten n In gralen von (9) eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coe cienten stattfindet, ist (Nr. 14, Band I, S. 38) das Verschwinden d Determinante

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n) = |y_\varkappa^{(i)}| \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 1, 2, \cdots n \\ i = 0, 1, \cdots n-1 \end{pmatrix}.$$

Das giebt, wenn man die $y_\varkappa^{(i)}$ durch ihre Ausdrücke (18) ersetzt, ei algebraische Differentialgleichung für $\mathfrak{U}$

$$(20) \qquad \varphi\left(\mathfrak{U}, \frac{d\mathfrak{U}}{dx}, \cdots \frac{d^\sigma \mathfrak{U}}{dx^\sigma}\right) = 0,$$

deren Ordnung σ höchstens gleich $n^2 - 1$ ist, und deren Coefficient sich rational aus den $A_{i\varkappa}$, den $p_1, p_2, \cdots p_n$ und deren Ableitung zusammensetzen. Dieser Differentialgleichung genügen also die in Nr. 144 (S. 49) sogenannten singulären Lösungen der Differenti gleichung (19). Denjenigen Integralen der letztgenannten Different gleichung, die nicht auch die Differentialgleichung (20) befriedig entspricht dann vermöge der Gleichungen (18) ein Fundament system von (9).

Aus den allgemeinen Untersuchungen der Nummern 144—1 folgt nunmehr, dass, solange die Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ beliebig o unbestimmt bleiben, keine Lösung von (19), die nicht der Different gleichung (20) genügt, eine algebraische Differentialgleichung niedrigerer als der Ordnung n^2 befriedigen kann. In diesem Fa sind nur diejenigen Differentialfunctionen der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die den sämmtlichen Transformationen der allgemeinen linearen Gruppe ungeändert bleiben, rational durch die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_n$ Differentialgleichung und deren Ableitungen darstellbar; es entspri dies dem Falle einer algebraischen Gleichung, deren Galois'sc Resolvente irreductibel ist.

Dagegen kann es sich bei specieller Wahl der Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ ereignen, dass Integrale der Picard'schen Resolvente (19), die der Differentialgleichung (20) nicht genügen, doch eine algebraische Differentialgleichung von niedrigerer als der nn^{ten} Ordnung befriedigen.

Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, die $y_1, y_2, \cdots y_n$ bildeten ein Fundamentalsystem einer homogenen linearen Differentialgleichung mit in x rationalen Coefficienten. Sei dies die Differentialgleichung

$$(A) \qquad P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_0(x)y = 0.$$

Für eine solche Differentialgleichung verwandelt sich eine rationale Differentialfunction eines Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdots y_n$, wenn man mit Hülfe der Differentialgleichung die Ableitungen höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung wegschafft, in eine Differentialfunction höchstens $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit in x rationalen Coefficienten.

Möge ferner

$$(21) \qquad \Theta(\mathfrak{U}) = 0$$

die algebraische Differentialgleichung niedrigster Ordnung bedeuten, welche die folgenden Eigenschaften besitzt: Ihre Coefficienten sind rational in den $A_{i\varkappa}$, deren Ableitungen und in x; sie ist in Bezug auf $\mathfrak{U}$ und seine Ableitungen im algebraischen Sinne irreductibel; wenigstens eines ihrer Integrale befriedigt die Differentialgleichung (19), ohne der Differentialgleichung (20) zu genügen.

Betrachten wir die linke Seite der Differentialgleichung (21) als ganze rationale Function der höchsten Ableitung von $\mathfrak{U}$. Wäre diese ganze Function reductibel, d. h. in Factoren zerlegbar, die ganze Functionen der höchsten Ableitung sind mit Coefficienten, die sich aus den Ableitungen niedrigerer Ordnung von $\mathfrak{U}$, den $A_{i\varkappa}$ nebst deren Ableitungen und aus x rational zusammensetzen, so würde, nach einem bekannten Satze der Algebra, dieser Zerlegung von $\Theta(\mathfrak{U})$ eine Zerlegung in Factoren, die in Bezug auf alle Ableitungen von $\mathfrak{U}$ ganz sind, entsprechen müssen, falls wir von einem Factor absehen, der in den Ableitungen von $\mathfrak{U}$, deren Ordnung niedriger ist als die Ordnung der Differentialgleichung (21), ganz und rational ist. Dies ist aber offenbar gestattet, da wir (21) als die Differentialgleichung niedrigster Ordnung angenommen haben, die die angegebenen Eigenschaften besitzt.

Wir können also die Forderung, dass $\Theta(\mathfrak{U})$ in Bezug auf alle Ableitungen von $\mathfrak{U}$ im algebraischen Sinne irreductibel sei, dahin abändern, dass wir voraussetzen, $\Theta(\mathfrak{U})$ sei in Bezug auf die

Ableitung höchster Ordnung, die darin auftritt, im al braischen Sinne irreductibel.

Wir schliessen dann zunächst auf Grund des in der Nr. (S. 55) bewiesenen Koenigsberger'schen Satzes, dass die sämmtlic Lösungen der Differentialgleichung (21) der Differentialgleichung (genügen müssen. Es könnten aber einige Lösungen von (21) Differentialgleichung (20) befriedigen. Wäre dies der Fall, so müs diese Lösungen einer Differentialgleichung von niedrigerer Ordn wie $\Theta(\mathfrak{U})$ Genüge leisten, da widrigen Falles zufolge des Koeni berger'schen Satzes jede Lösung von (21) auch eine Lösung von (sein müsste, was der Voraussetzung widerspricht. Wir wollen Einfachheit wegen annehmen, dass kein Integral von (21) die D rentialgleichung (20) befriedigt, bemerken aber, dass diese Einsch kung auf die im Folgenden zu ziehenden Schlüsse ohne Einfluss indem nämlich diese Schlüsse auch bestehen bleiben, wenn man j Einschränkung fallen lässt. Machen wir jene Annahme, so folgt, dass Differentialgleichung (21) mit keiner algebraischen Differentialgleich niedrigerer Ordnung und vom selben Charakter eine Lösung gem haben kann. Es ist also in diesem Falle die Differentialgleichung (im Sinne von Herrn Koenigsberger irreductibel.

Herr Koenigsberger sagt nämlich von einer algebraischen Di rentialgleichung, sie sei irreductibel, wenn ihre linke Seite in Be auf die höchste Ableitung im algebraischen Sinne irreductibel ist wenn sie mit keiner algebraischen Differentialgleichung von niedrig Ordnung und vom selben Charakter in Bezug auf die Coefficien ein Integral gemein hat.

Aus dieser Definition folgt auf Grund des erwähnten Koeni berger'schen Satzes, dass, wenn eine irreductible Differentialgleich mit einer anderen Differentialgleichung ein Integral gemein hat, d sie dann auch ihre sämmtlichen Lösungen mit derselben gemein hal muss. Ein analoger Satz besteht bekanntlich für irreductible al braische Gleichungen.

Ferner ist leicht einzusehen, dass eine irreductible Different gleichung auch mit keiner Differentialgleichung von derselben Ordnu die aber in Bezug auf die höchsten Ableitungen von niedrigerem Gr ist, eine Lösung gemein haben kann.

Wäre dies nämlich der Fall, so könnte man die linken Seiten beiden Differentialgleichungen als Polynome in der höchsten Ableit auffassen und mit denselben nach der Methode des grössten geme samen Theilers verfahren. Ergäbe sich ein identisch verschwinden Rest, so wäre die vorgelegte Differentialgleichung in Bezug auf

höchste Ableitung im algebraischen Sinne reductibel. Würde dagegen ein die höchste Ableitung nicht enthaltender und nicht verschwindender Rest zum Vorschein kommen, so müsste dieser Rest durch die gemeinsame Lösung nothwendig zu Null gemacht werden, d. h. aber, die gegebene Differentialgleichung hätte mit einer Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung eine Lösung gemein. Beides widerstreitet den in der Definition der Irreductibilität enthaltenen Voraussetzungen.

Es möge noch ausdrücklich auf den Unterschied hingewiesen werden, der zwischen einer in diesem (Koenigsberger'schen) Sinne irreductiblen linearen homogenen Differentialgleichung und einer solchen Gleichung, die im Sinne des Herrn Frobenius irreductibel ist, besteht.

Wenn die Differentialgleichung (21) nicht als irreductibel vorausgesetzt würde, so könnten wir nur schliessen, dass eine Lösung derselben, die nicht der Differentialgleichung (20) genügt, keiner Differentialgleichung derselben Ordnung und niedrigeren Grades in Bezug auf die höchste Ableitung genügen könne. Dementsprechend wäre im Folgenden auch immer hinzuzufügen, dass nur Integrale von (21) gemeint sind, die nicht auch die Gleichung (20) befriedigen. Um dieser Weitläufigkeit aus dem Wege zu gehen, halten wir die gemachte Einschränkung für (21) fest.

150. Transformationsgruppe einer linearen Differentialgleichung. Methode zur Herstellung derselben. Formale Unveränderlichkeit.

Sei $\mathfrak{U}_1$ ein particulares Integral der Differentialgleichung (21) und möge demselben gemäss der Gleichung (18) das Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ der Differentialgleichung (A) entsprechen. Sei ferner V eine beliebige andere Lösung von (21) und $z_1, z_2, \cdots z_n$ das entsprechende Fundamentalsystem von (A).

Dann ist

$$z_i = \sum_{\varkappa=1} \beta_{i\varkappa} y_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \cdots n).$$

Wir wollen die Gesammtheit der linearen Transformationen

$$(\beta_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

in's Auge fassen, die auf diese Weise dem Uebergange von einem particularen Integrale $\mathfrak{U}_1$ der Differentialgleichung (21) zu allen übrigen Integralen oder, was auf dasselbe hinauskommt, zu dem allgemeinen Integrale von (21) entsprechen.

Das allgemeine Integral von (21) ist eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung (19); wenn wir also durch

$$u_1, u_2, \cdots u_{n^2}$$

ein Fundamentalsystem von (19) bezeichnen, so ist das allgeme Integral $\mathfrak{U}$ von (21) in der Form

(22) $$\mathfrak{U} = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_{n^2} u_{n^2}$$

darstellbar, wo die $c_1, c_2, \cdots c_{n^2}$ von x unabhängige Grössen bedeu Differentiiren wir nunmehr den Ausdruck (22) n^2-mal nach x, und r die Ordnung der Differentialgleichung (21).

Dann folgt aus dem Umstande, dass $\mathfrak{U}$ das allgemeine Inte der Differentialgleichung (21) darstellen soll, dass zwischen den n^2 C stanten $c_1, c_2, \cdots c_{n^2}$ eine gewisse Anzahl algebraischer Beziehun bestehen muss, die ein Gebilde in dem n^2-fach ausgedehnten Geb der $c_1, c_2, \cdots c_{n^2}$ bestimmen. Dieses muss in seine irreductiblen Th gebilde zerlegt, mindestens ein irreductibles Gebilde der Stufenz $n^2 - r$ enthalten, während die übrigen Theilgebilde von derselben o von höherer Stufenzahl sein könnten. Jedes einzelne dieser irre tiblen Gebilde kann dargestellt werden, indem man die $c_1, c_2, \cdots$ als algebraische Functionen gewisser Parameter auffasst, deren Anz von n^2 subtrahirt, die Stufenzahl des betreffenden Gebildes lie (vergl. hierfür die analogen Betrachtungen der Nr. 136, S. 22). Mö die Gleichungen

(23) $$c_i = \mathfrak{C}_i^{(j)}\left(\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \cdots \lambda_{r_j}^{(j)}\right) \qquad (j = 1, 2, \cdots \nu) \qquad (i = 1, 2, \cdots n^2)$$

die ν verschiedenen irreductiblen Theilgebiete darstellen, wo also n destens eine der Zahlen r_j gleich r, die übrigen nicht grösser als r s

Bilden wir mittelst der Gleichungen (18) das zu dem allgemei Integrale $\mathfrak{U}$ von (21) gehörige Fundamentalsystem der Differen gleichung (A) und denken wir uns dasselbe etwa durch das der pa cularen Lösung $\mathfrak{U}_1$ entsprechende Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ der Form

(24) $$\alpha_{i1} y_1 + \alpha_{i2} y_2 + \cdots + \alpha_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

dargestellt, so erscheinen die Substitutionscoefficienten $\alpha_{i\varkappa}$, entsprech den ν irreductiblen algebraischen Gebilden (23), als algebraische Fu tionen der Parameter $\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \cdots \lambda_{r_j}^{(j)}$. Seien diese Functionen

(24a) $$\alpha_{i\varkappa} = \mathfrak{A}_{i\varkappa}^{(j)}\left(\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \cdots \lambda_{r_j}^{(j)}\right) \qquad (j = 1, 2, \cdots \nu) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n).$$

Diese Formeln bestimmen uns dann die Gesammtheit der linea Transformationen (24), die dem Uebergange von dem particula

Integrale $\mathfrak{U}_1$ der Differentialgleichung (21) zu allen übrigen Integralen dieser Differentialgleichung entsprechen.

Von dieser Gesammtheit ist zunächst evident, dass sie eine Gruppe mit paarweise inversen Transformationen ausmacht. Die ν continuirlichen Schaaren von Transformationen, welche durch die Formeln (24) und (24a) bestimmt werden, stellen also eine algebraische Untergruppe G der allgemeinen linearen Gruppe L dar, und hieraus folgt dann (vergl. Nr. 140, S. 37), dass alle Zahlen r_j mit r übereinstimmen. Wir nennen mit Herrn Picard diese Gruppe, zum Unterschiede von der in der Nr. 132 (S. 5) definirten „Gruppe der Differentialgleichung", die zur Differentialgleichung (A) gehörige Transformationsgruppe und werden beweisen, dass dieselbe in Bezug auf die Gleichung (A) eine ähnliche Rolle spielt, wie die Galois'sche Gruppe in Bezug auf eine algebraische Gleichung. Ehe wir auf diesen Beweis eingehen, schicken wir noch zwei Bemerkungen voraus.

Die erste Bemerkung bezweckt zu zeigen, wie man, falls die Differentialgleichung (21) bekannt ist, zu einer expliciten Darstellung der Gruppe G gelangen kann.

Denken wir uns nämlich der Einfachheit wegen die Function $\mathfrak{U}(y)$ durch die speciellere Function $u(y)$ ersetzt, d. h. nehmen wir die Functionen

$$A_{i\varkappa} \qquad (i=1, 2, \cdots n-1;\ \varkappa=1, 2, \cdots n)$$

sämmtlich gleich Null, so wird das allgemeine Integral der Differentialgleichung (21) durch den Ausdruck

$$(25) \qquad u=\sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i\varkappa}A_i y_\varkappa, \quad A_i=A_{0i},$$

dargestellt, wo die $\alpha_{i\varkappa}$ als die durch die Gleichungen (24) gegebenen algebraischen Functionen von r Parametern anzusehen sind. Differentiiren wir diese Gleichung r-mal nach x und setzen die sich so ergebenden Werthe in die linke Seite von (21) ein, so wird dieselbe identisch gleich Null, wenn wir die $y_1, y_2, \cdots y_n$ als Lösungen der Differentialgleichung (A) betrachten; es ist also (21) nichts anderes als das Resultat der Elimination der r Parameter, von denen die $\alpha_{i\varkappa}$ abhängen, zwischen (25) und den aus dieser Gleichung durch r-malige Differentiation nach x abgeleiteten Gleichungen. Hieraus schliesst man leicht (vergl. den Satz der Nr. 141, S. 41, 42), dass die linke Seite der Differentialgleichung (21) mit einem geeigneten Factor multiplicirt, eine Differentialinvariante der Gruppe G sein muss, sofern man die $y_1, y_2, \cdots y_n$ als unbestimmte Functionen ansieht.

Nun kann man aber, statt auf die $[y_i]$ die Substitution

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{i\varkappa} y_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

anzuwenden, die $[A_i]$ durch die Substitution

$$(26) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{\varkappa i} A_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

transformiren. Dann ist, wie aus der Symmetrie von u in Bezug a die $[y_i]$ und die $[A_i]$ folgt, die linke Seite von (21) auch eine Di: rentialinvariante der durch die Formeln (26) dargestellten Gruppe von Transformationen der $[A_i]$. Die unbestimmten Functionen [kommen aber in dem Ausdrucke der linken Seite von (21) explic vor, man kann also nach dem in der Nr. 136 (S. 21) für die dort trachtete rationale Differentialfunction $R(y)$ dargelegten Verfahren Gruppe G finden, welche die linke Seite von (21), aufgefasst als rat nale Differentialfunction der $[A_i]$, ungeändert lässt. Mit der Gruppe ist aber auch die Gruppe G bekannt, denn wir erhalten die Trai formationen von G aus denen der Gruppe $\overline{G}$, indem wir die letzter einfach transponiren (vergl. Nr. 30, Bd. I, S. 95). Da die Grupp G und $\overline{G}$ aus paarweise inversen Substitutionen bestehen, können w uns auch so ausdrücken, dass wir sagen: die Gruppe $\overline{G}$ besteht a den reciproken Transformationen (vergl. a. a. O.) von G, od kürzer, $\overline{G}$ ist die zu G reciproke Gruppe.

Wenn wir auf diese Weise die Gruppe G beziehungsweise $\overline{G}$ durc eine Differentialinvariante r^{ter} Ordnung derselben, in den n unbestimn ten Functionen $[A_i]$ dargestellt, bestimmen, so ist die Unveränderlicl keit dieser rationalen Differentialfunction der $[A_i]$ bei den Transform tionen von $\overline{G}$, wie es bisher auch immer geschehen musste, in de Sinne gefasst, dass jene Differentialfunction formell ungeändert bleib Wesentlich zu unterscheiden ist hiervon der Fall — und darauf bezie sich unsere zweite Bemerkung — wo etwa eine rationale Differentia function der Elemente $[y_i]$ eines Fundamentalsystems der speciell Differentialgleichung (A), als Function von x betrachtet, ung ändert bleibt, wenn man auf die $[y_i]$ eine lineare Transformation od eine Gruppe solcher Transformationen anwendet. Wenn wir es al mit Differentialfunctionen zu thun haben, die aus Systemen von n sp ciellen, d. h. nicht mehr willkürlichen oder unbestimmten Functione gebildet sind, so werden wir die formelle Unveränderlichkeit von d Unveränderlichkeit als Function von x wohl zu unterscheiden habe

Dies kommt sogleich in dem in der folgenden Nummer darzulegenden, von den Herren Picard und Vessiot herrührenden Doppelsatze zur Geltung, der die Analogie der Gruppe G mit der Galois'schen Gruppe einer algebraischen Gleichung begründet.

151. Fundamentaltheorem von Picard und Vessiot. Die Transformationsgruppe ist nur abhängig von der Differentialgleichung.

Der Picard-Vessiot'sche Doppelsatz, der die Grundlage der hier behandelten Theorie bildet, lautet wie folgt:

Jede rationale Differentialfunction der Elemente $[y_i]$ eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (A), die gleich einer rationalen Function von x ist, bleibt als Function von x ungeändert, wenn man auf die $[y_i]$ eine Transformation der Gruppe G anwendet, und umgekehrt:

jede rationale Differentialfunction der $[y_i]$, die als Function von x bei den Transformationen von G ungeändert bleibt, ist eine rationale Function von x.

Sei, zum Beweise des ersten Theiles, $R(y)$ eine rationale Differentialfunction von der vorauszusetzenden Beschaffenheit. Ersetzt man die $y_1, y_2, \cdots y_n$ und deren Ableitungen durch ihre Ausdrücke (18), so verwandelt sich $R(y)$, wenn für $\mathfrak{U}$ eine beliebige particulare Lösung der Differentialgleichung (21) genommen wird, in einen Ausdruck

$$F\left(\mathfrak{U}, \frac{d\mathfrak{U}}{dx}, \cdots \frac{d^\nu \mathfrak{U}}{dx^\nu}\right) \qquad (\nu \leq n^2 - 1),$$

der zufolge der Voraussetzung gleich einer rationalen Function $f(x)$ von x ist. Dann hat die Differentialgleichung

$$F\left(\mathfrak{U}, \frac{d\mathfrak{U}}{dx}, \cdots \frac{d^\nu \mathfrak{U}}{dx^\nu}\right) = f(x)$$

mit der irreductiblen Differentialgleichung (21) eine Lösung gemein, sie wird folglich (vergl. Nr. 149, S. 66) durch alle Lösungen von (21) befriedigt. Der Ausdruck F ändert sich also nicht, d. h. er bleibt dieselbe Function von x, wenn man darin $\mathfrak{U}$ durch ein beliebiges anderes Integral von (21) ersetzt. Dies besagt aber nichts anderes, als dass $R(y)$ als Function von x unverändert bleibt, wenn man auf die $y_1, y_2, \cdots y_n$ eine Transformation von G ausübt.

Sei umgekehrt die rationale Differentialfunction $R(y)$, als Function von x betrachtet, eine Invariante von G. Ersetzt man wieder die $y_1, y_2, \cdots y_n$ und ihre Ableitungen durch die Ausdrücke (18), wodurch sich $R(y)$ in F verwandelt, so stellt wegen der Unveränderlichkeit von

$R(y)$ bei Anwendung einer Transformation von G der Ausdruc dieselbe Function von x dar, welches Integral der Differentialgleicl (21) man auch für $\mathfrak{U}$ in denselben einsetzen mag. Bedeutet μ Grad der höchsten (r^{ten}) Ableitung in der Gleichung (21), so hat Gleichung für willkürliche Werthe von

$$x,\ \mathfrak{U},\ \frac{d\mathfrak{U}}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{r-1}\mathfrak{U}}{dx^{r-1}}$$

μ verschiedene Wurzeln als Gleichung für

$$\frac{d^r\mathfrak{U}}{dx^r}.$$

Vermöge der Gleichung (21) kann man bewirken, dass F k höhere als die r^{te} Ableitung von $\mathfrak{U}$ und diese höchstens zur (μ — Potenz enthält. Sei in diesem Sinne

$$F\left(\mathfrak{U}, \frac{d\mathfrak{U}}{dx}, \cdots \frac{d^\nu \mathfrak{U}}{dx^\nu}\right) = \overline{F}\left(\mathfrak{U}, \frac{d\mathfrak{U}}{dx}, \cdots \frac{d^r \mathfrak{U}}{dx^r}\right),$$

wo also $\overline{F}$ in der r^{ten} Ableitung von $\mathfrak{U}$ höchstens vom $(\mu - 1)^{\text{ten}}$ G ist. Für einen gegebenen Werth von x nimmt $\overline{F}$ denselben W an, wenn für

$$(27) \qquad \mathfrak{U},\ \frac{d\mathfrak{U}}{dx},\ \cdots\ \frac{d^r\mathfrak{U}}{dx^r}$$

irgend ein diesem x-Werthe entsprechendes Werthesystem gesetzt welches der Gleichung (21) genügt; daraus schliessen wir aber Grund der Irreductibilität der Differentialgleichung (21), dass $\overline{F}$ Grössen (27) überhaupt nicht mehr enthalten kann. Es ist also $\overline{F}$ rationale Function von x, was zu beweisen war.

Die Gruppe G ist für eine gegebene Differentialgleichung nicht vollkommen bestimmt, vielmehr hängt dieselbe von der W des Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdots y_n$ ab. Geht man von dem Fu mentalsysteme $[y_\varkappa]$ zu einem anderen Fundamentalsysteme $[z_\varkappa]$ welches mit $[y_\varkappa]$ durch die lineare Substitution

$$[y_\varkappa] = S[z_\varkappa]$$

verknüpft ist, so entspricht dem neuen Fundamentalsysteme die m gleichberechtigte Untergruppe

$$S^{-1}GS$$

als Transformationsgruppe von (A). Es kann also, ebenso wi selbst, auch jede mit G innerhalb der allgemeinen line Gruppe gleichberechtigte Untergruppe als die Transfo tionsgruppe von (A) angesehen werden.

Im Anschlusse hieran bemerken wir, dass es im Allgemeinen für eine gegebene lineare Differentialgleichung (A) mehrere Differentialgleichungen von der für (21) vorausgesetzten Beschaffenheit geben kann. Da aber (Nr. 147, S. 59) jede Lösung der Picard'schen Resolvente als rationale Function einer beliebigen nicht singulären Lösung mit in x rationalen Coefficienten darstellbar ist, so gehen alle diese verschiedenen Differentialgleichungen aus einer derselben durch rationale Transformation hervor. Sie entstehen also z. B. aus (21), indem man in dieser Differentialgleichung an die Stelle von $\mathfrak{U}$ eine gewisse rationale Function von $\mathfrak{U}$ und x setzt. Daraus folgt aber durch einfache Schlüsse, dass sich, wenn wir statt von (21) von irgend einer anderen der ebenso beschaffenen Differentialgleichungen ausgehen, als Transformationsgruppe der Differentialgleichung (A) entweder G selbst oder eine mit G innerhalb L gleichberechtigte Untergruppe ergiebt, so dass es also gleichgültig ist, von welcher jener algebraischen Differentialgleichungen niedrigster Ordnung, die mit (19) nicht singuläre Lösungen gemein haben, wir ausgehen.

Unter allen (algebraischen linearen homogenen) Gruppen, die die Eigenschaft haben, dass eine rationale Differentialfunction der $(y_1, y_2, \cdots y_n)$, die bei den Transformationen jener Gruppe ungeändert bleibt, rational in x ist, ist die Gruppe G die engste, denn jede solche Gruppe muss G als Untergruppe enthalten. Umgekehrt muss jede Gruppe, bei deren Anwendung eine rationale Differentialfunction der $(y_1, y_2, \cdots y_n)$, die einen in x rationalen Werth besitzt, ungeändert bleibt, in G als Untergruppe enthalten sein.

Daraus folgt, dass die durch den Picard-Vessiot'schen Doppelsatz ausgedrückten Eigenschaften der Transformationsgruppe einer Differentialgleichung (A) für diese Gruppe auch charakteristisch sind, d. h. dass sie auch zur Definition dieser Gruppe dienen können.

Diese Bemerkung ist insofern von Wichtigkeit, als sie uns zeigt, dass die Transformationsgruppe etwas der Differentialgleichung selbst Eigenthümliches ist, wenn wir ein bestimmtes Fundamentalsystem zu Grunde legen. Also ist z. B. auch die besondere Wahl der empfindlichen Function unwesentlich.

152. Rationalitätsbereich. Gattungen. Aequivalenz einer speciellen linearen Differentialgleichung mit der allgemeinen unter Adjunction einer gewissen Gattung.

Wenn G innerhalb der allgemeinen linearen Gruppe als ausgezeichnete Untergruppe enthalten ist, so ist die Transformationsgruppe der Differentialgleichung (A) unabhängig von der Wahl des Fundamentalsystems.

Dies ist z. B. allemal der Fall, wenn die Picard'sche Resolvente (19) der Differentialgleichung (A) so beschaffen ist, dass keines ihrer Integrale, welches nicht der Differentialgleichung (20) genügt, eine algebraische Differentialgleichung von niedrigerer als der nn^{ten} Ordnung befriedigt, denn in diesem Falle ist die Transformationsgruppe von (A) offenbar nichts anderes als die allgemeine lineare Gruppe L selbst. Wenn dies eintritt, so hat also die Differentialgleichung (A) denselben „Gruppencharakter" wie die allgemeine lineare Differentialgleichung (1) (Nr. 134, S. 15), der die n unbestimmten Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ Genüge leisten. Charakteristisch für die Differentialgleichung (A) ist dann nur der Umstand, dass ihre Coefficienten rationale Functionen sind, und dass wir für die Coefficienten der Differentialgleichung (21) auch die Forderung aufstellen, sie seien rationale Functionen von x (und den unbestimmten Functionen A_{ix}), d. h. wie wir uns kurz ausdrücken wollen, dass wir den Bereich der rationalen Functionen von x als den der bekannten Functionen oder als den Rationalitätsbereich ansehen.

Die Sätze, die wir in den Nummern 149—151 unter dieser Voraussetzung abgeleitet haben, bleiben aber nebst den für dieselben gegebenen Beweisen ohne Weiteres bestehen, wenn wir nebst den rationalen Functionen von x noch gewisse andere Functionen $f_1(x), f_2(x), \cdots$ als bekannt ansehen, sofern wir nur allenthalben den Ausdruck „rationale Function von x" durch „rationale Function von $x, f_1(x), f_2(x), \cdots$ und deren Ableitungen" ersetzen. Die Functionen $f_1(x), f_2(x), \cdots$ brauchen auch nicht in den Coefficienten von (A) explicite aufzutreten, es genügt, wenn wir sie ein für alle Mal als bekannt ansehen, oder wie wir sagen wollen, dem Rationalitätsbereiche adjungiren.

Wir werden also von der Transformationsgruppe einer homogenen linearen Differentialgleichung sprechen, unter Zugrundelegung eines gewissen Rationalitätsbereiches, d. h. indem wir gewisse Functionen von x, deren Ableitungen und rationale Verbindungen aus x, jenen Functionen und ihren Ableitungen als bekannt ansehen. Für eine Differentialgleichung mit in x rationalen Coefficienten sprechen wir dann

einfach von ihrer Transformationsgruppe (schlechthin), wenn nur die rationalen Functionen von x allein den Rationalitätsbereich ausmachen, oder von ihrer Transformationsgruppe unter Adjunction gewisser Functionen $f_1(x), f_2(x), \cdots$.

Für die „allgemeine“ Differentialgleichung (1) (Nr. 134, S. 15), der die unbestimmten Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ genügen, constituiren dann die invarianten Determinantenquotienten

$$p_1, p_2, \cdots p_n$$

den Rationalitätsbereich, bei dessen Zugrundelegung die allgemeine lineare Gruppe L als Transformationsgruppe dieser Differentialgleichung erscheint.

Adjungirt man eine rationale Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$, so ist in dem so entstehenden Rationalitätsbereiche die Transformationsgruppe von (1) (Nr. 134, S. 15) nichts anderes als diejenige Untergruppe von L, bei deren Anwendung jene adjungirte Differentialfunction ungeändert bleibt. Denn diese Gruppe geniesst offenbar die in dem Picard'schen Theorem enthaltene Doppeleigenschaft, wobei man bedenken muss, dass für eine Differentialfunction der unbestimmten Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ die Unveränderlichkeit als Function von x mit der formalen Unveränderlichkeit identisch ist.

So ordnet sich also der Gruppencharakter der allgemeinen linearen Differentialgleichung gleichsam als besonderer Fall unter die Gruppencharaktere specieller Differentialgleichungen bei gegebenen Rationalitätsbereichen ein.

Wenn für eine gegebene lineare Differentialgleichung

$$(28)\qquad y^{(n)} + \lambda_1 y^{(n-1)} + \lambda_2 y^{(n-2)} + \cdots + \lambda_n y = 0,$$

wo die $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ Functionen sind, die einem gewissen Rationalitätsbereiche angehören, die Picard'sche Resolvente (19) kein nicht singuläres (d. h. der Differentialgleichung (20) genügendes) Integral mit einer Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung, deren Coefficienten, abgesehen von den unbestimmten Functionen $A_{i\varkappa}$, demselben Rationalitätsbereiche angehören, gemein hat, d. h. wenn für diesen Rationalitätsbereich die Transformationsgruppe der gegebenen Differentialgleichung die allgemeine lineare Gruppe L ist, so stimmt der Gruppencharakter der speciellen Differentialgleichung (28) mit dem der allgemeinen Differentialgleichung (1) (Nr. 134, S. 15) überein, und es kann ein willkürliches Fundamentalsystem der Differentialgleichung (28) als durch die n Differentialgleichungen

$$\frac{(-1)^n D_\varkappa(y_1, y_2, \cdots y_n)}{D(y_1, y_2, \cdots y_n)} = \lambda_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

definirt angesehen werden.

Wenn dagegen für den betreffenden Rationalitätsbereich die Transformationsgruppe der gegebenen Differentialgleichung unter Zugrundelegung eines bestimmten Fundamentalsystems $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ eine Untergruppe G der allgemeinen linearen Gruppe L ist, so denken wir uns z. B. mit Hülfe des in der Nr. 141 (S. 41) angedeuteten Verfahrens eine rationale Differentialinvariante von G gebildet, d. h. also eine rationale Differentialfunction der unbestimmten Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$, $R(y_1, y_2, \cdots y_n)$, die bei den Transformationen von G und nur bei diesen (formell) ungeändert bleibt. Dann wird diese gleich einer wohlbestimmten, dem Rationalitätsbereiche angehörenden Function λ, wenn man die $y_1, y_2, \cdots y_n$ durch die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ ersetzt, und das System der $n + 1$ Differentialgleichungen

$$(29) \qquad \begin{cases} \dfrac{(-1)^n D_\varkappa(y_1, y_2, \cdots y_n)}{D(y_1, y_2, \cdots y_n)} = \lambda_\varkappa & (\varkappa = 1, 2, \cdots n), \\ R(y_1, y_2, \cdots y_n) = \lambda \end{cases}$$

definirt uns das Fundamentalsystem $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ in dem Sinne, dass es dann und nur dann befriedigt wird, wenn für die $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Functionssystem gesetzt wird, welches aus $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ durch die Transformationen von G hervorgeht.

Die Differentialfunction $R(y_1, y_2, \cdots y_n)$ ist hierbei nur als der Repräsentant der Gesammtheit von Differentialinvarianten der Gruppe G anzusehen, die sich ja zufolge des Satzes der Nr. 145 (S. 53) sämmtlich durch $R(y)$ und seine Ableitungen, sowie die $p_1, p_2, \cdots p_n$ und deren Ableitungen rational darstellen lassen. Wenn wir also, im Anschlusse an die Kronecker'sche Bezeichnung in der Algebra, diese Gesammtheit von rationalen Differentialfunctionen als eine Gattung bezeichnen, so erscheint in dem Gleichungssysteme (29) $R(y)$ nur als Repräsentant einer bestimmten Gattung.

Durch diese Auffassung sind wir also in der Lage, von der speciellen gegebenen Differentialgleichung (28) überzugehen zu einer gewissen Gattung von Differentialfunctionen der n unbestimmten Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$, indem nämlich der Gruppencharakter der speciellen Differentialgleichung (28) identisch wird mit dem Gruppencharakter der allgemeinen Differentialgleichung

$$(\alpha) \qquad (-1)^n D(y, y_1, y_2, \cdots y_n) = 0,$$

falls wir dem Rationalitätsbereiche der letzteren die Gattung, der die Differentialfunction $R(y_1, y_2, \cdots y_n)$ angehört, adjungiren (vergl. S. 75).

Hieraus folgt nun unmittelbar, dass alle Sätze, die wir im vierten Kapitel für Differentialfunctionen der unbestimmten Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$, die bei den Transformationen einer gewissen Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe L formell ungeändert bleiben, bewiesen haben, sich übertragen lassen auf Differentialfunctionen gebildet aus den Elementen eines Fundamentalsystems der speciellen Differentialgleichung (28), wenn wir in diesen Sätzen an die Stelle von „formeller Unveränderlichkeit" setzen „Unveränderlichkeit als Function von x" und zugleich überall an die Stelle der allgemeinen linearen Gruppe L die Transformationsgruppe der Differentialgleichung (28) treten lassen. So haben wir z. B. die Sätze:

Eine rationale Beziehung zwischen den Elementen $y_1, y_2, \cdots y_n$ eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (28) und den Ableitungen dieser Elemente mit Coefficienten, die dem Rationalitätsbereiche angehören, bleibt erhalten, wenn man auf die $y_1, y_2, \cdots y_n$ eine Transformation der Gruppe G anwendet.

Die Transformationen von G, bei denen eine rationale Differentialfunction $S(y)$ der $y_1, y_2, \cdots y_n$ als Function von x ungeändert bleibt, bilden eine Untergruppe G_S von G.

Ferner ergiebt sich aus dem Satze der Nr. 145 (S. 53), dass eine rationale Differentialfunction $\overline{S}(y)$ der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die als Function von x bei denselben Transformationen von G ungeändert bleibt wie die Function $S(y)$, als rationale Function von $S(y)$ und deren Ableitungen mit Coefficienten, die dem Rationalitätsbereiche angehören, darstellbar ist.

Sechstes Kapitel.

153. **Bedeutung der Transformationsgruppe für das Integrationsproblem. Reduction der Transformationsgruppe durch Adjunction.**

Die Bedeutung der Galois'schen Theorie der algebraischen Gleichungen liegt darin, dass die Auflösung einer gegebenen Gleichung wesentlich von der Structur ihrer Galois'schen Gruppe abhängt. Insbesondere lassen sich z. B. nothwendige und hinreichende Bedingungen angeben, die für die Gruppe einer Gleichung erfüllt sein müssen, damit diese Gleichung algebraisch, d. h. durch Wurzelausziehungen auflösbar sei. Es wird also dasselbe Auflösungsverfahren gültig sein für alle Gleichungen, die dieselbe Gruppe haben, und da, im Sinne des Gleichungssystems (IV) der Nr. 148 (S. 63), der Gruppencharakter einer gegebenen speciellen Gleichung stets identisch ist mit dem der allgemeinen Gleichung (der die n Unbestimmten $x_1, x_2, \cdots x_n$ genügen) unter Adjunction einer gewissen Gattung rationaler Functionen der $x_1, x_2, \cdots x_n$, so kann man, wie Kronecker betont hat, die Theorie der Auflösung algebraischer Gleichungen unmittelbar an der allgemeinen Gleichung (mit unbestimmten Wurzeln) und an den Gattungen von Functionen unbestimmter Grössen entwickeln.

In ähnlicher Weise bestimmt für eine lineare Differentialgleichung die ihr zugehörige Transformationsgruppe in gewissem Sinne das bei derselben anzuwendende Integrationsverfahren; in welchem Sinne dies der Fall ist, wird aus den nachfolgenden Erörterungen deutlich hervorgehen; vorläufig können wir nur Folgendes feststellen.

Die Integration einer vorgelegten linearen Differentialgleichung ist als vollzogen anzusehen, wenn derjenige Rationalitätsbereich bekannt ist, für welchen die Transformationsgruppe der gegebenen Differentialgleichung nur die identische Transformation enthält, denn dann sind die Elemente des Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdots y_n$ selbst rational bekannt. Es wird also wesentlich darauf ankommen, den Rationalitätsbereich so zu erweitern, dass sich die Transformationsgruppe der Differentialgleichung reducirt.

Jedenfalls wissen wir, dass wir die auf den Gruppencharakter bezüglichen Untersuchungen direct an die allgemeine lineare Differentialgleichung

$$(\alpha) \qquad (-1)^n D(y, y_1, y_2, \cdots y_n) = 0,$$

der das System der n willkürlichen linear unabhängigen Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ Genüge leistet, und an die derselben zu adjungirenden rationalen Differentialfunctionen dieser $y_1, y_2, \cdots y_n$ knüpfen können, da, wie wir bewiesen haben, stets eine rationale Differentialfunction gefunden werden kann, bei deren Adjunction die Transformationsgruppe der allgemeinen linearen Differentialgleichung (α) mit der einer gegebenen speciellen Differentialgleichung von derselben Ordnung übereinstimmt.

Wir hatten bereits bemerkt, dass sich durch Adjunction einer rationalen Differentialfunction $R(y)$ (beziehungsweise der durch dieselbe repräsentirten Gattung) die Transformationsgruppe L der allgemeinen Differentialgleichung (α) auf diejenige Gruppe G reducirt, bei deren Anwendung $R(y)$ invariant bleibt.

Denken wir uns nun, es sei ein für alle Mal die Differentialgleichung (α) unter Adjunction von $R(y)$ vorgelegt, so dass also G ihre Transformationsgruppe darstellt, und adjungiren wir noch die rationale Differentialfunction $S(y)$, die bei den Transformationen der Untergruppe H von G ungeändert bleibt, während sie sich bei jeder nicht in H enthaltenen Substitution von G verändert. Dann ist H offenbar die umfassendste Gruppe, die in der Gruppe G und in der zu $S(y)$ gehörigen Transformationsgruppe gleichzeitig enthalten ist; es reducirt sich folglich die Transformationsgruppe der Differentialgleichung (α) nach Adjunction von $S(y)$ auf die Untergruppe H.

Sei z. B. G eine Gruppe, die aus ν Schaaren von Transformationen besteht, und bedeute Γ die umfassendste in G enthaltene und von infinitesimalen Transformationen erzeugte continuirliche Gruppe. Dann ist (Nr. 140, S. 38) Γ innerhalb G ausgezeichnet und G besteht aus ν Schaaren von der Form

$$\Gamma, \quad T_1\Gamma, \quad T_2\Gamma, \quad \cdots \quad T_{\nu-1}\Gamma,$$

wo die $T_1, T_2, \cdots T_{\nu-1}$ Transformationen bedeuten, für welche

$$T_\varkappa^{-1}\Gamma T_\varkappa = \Gamma \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu - 1)$$

ist. Bedeutet nun $P(y)$ eine charakteristische Differentialinvariante von Γ, d. h. eine Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die bei den Transformationen von Γ und nur bei diesen ungeändert bleibt, so reducirt sich zufolge des vorhin bewiesenen Satzes bei Ad-

junction von $P(y)$ die Transformationsgruppe der vorgelegten Differ tialgleichung auf Γ. Möge nun bei Anwendung der Transformation die Function $P(y)$ übergehen in

$$P_\varkappa(y) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu - 1);$$

dann genügen die ν Functionen

$$P(y), \quad P_1(y), \cdots P_{\nu-1}(y)$$

einer algebraischen Gleichung ν^{ten} Grades, deren Coefficienten Differentialinvarianten von G dem Rationalitätsbereiche angehören.

Wir können also sagen, dass sich durch Adjunction Wurzeln einer algebraischen Gleichung, deren Coefficien dem Rationalitätsbereiche angehören, die Gruppe unse Differentialgleichung auf eine von infinitesimalen Tra formationen erzeugte, also durch ein einziges Gleichun system darstellbare Gruppe reduciren lässt.

Da wir in der Theorie der Differentialgleichungen algebrais Operationen stets als ausführbar ansehen können, so dürfen wir Folgenden die Annahme machen, dass die Transformationsgruppe ei vorgelegten Differentialgleichung eine aus infinitesimalen Transfor tionen erzeugte sei, und dass wir es auch stets nur mit solchen ra nalen Differentialfunctionen zu thun haben, die bei so beschaffe Gruppen von Transformationen ungeändert bleiben.

Für die in G enthaltene umfassendste aus infinitesimalen Tra formationen erzeugte continuirliche Gruppe Γ gilt dann offenbar folgende Doppelsatz:

Jede rationale Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die glei einer algebraischen Function ist (d. h. die einer algebraischen Gleichu genügt, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereiche angehören), ble bei den Transformationen von Γ ungeändert, und

jede rationale, bei den Transformationen von Γ, oder was dasse heisst, bei den infinitesimalen Transformationen von G unveränderli Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$ ist algebraisch ausdrückbar.

Wenn G selbst aus infinitesimalen Transformationen erzeugt, a mit Γ identisch ist, so fällt dieser Doppelsatz mit dem auf Gruppe G bezüglichen der Nr. 151 (S. 71) zusammen.

154. Adjunction des allgemeinen Integrals einer Differentialgleichu Normalzerlegungen der Transformationsgruppe.

Wir setzen also von nun ab voraus, dass schon von Anfang die Gruppe G der Differentialgleichung eine aus infinitesimalen Tra

formationen erzeugte continuirliche sei und bezeichnen nach wie vor durch $R(y)$ die den Rationalitätsbereich charakterisirende Function.

Sei $S(y)$ eine beliebige Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die bei den Transformationen der Untergruppe G_S von G ungeändert bleibt, während sich dieselbe bei jeder nicht in G_S enthaltenen Transformation von G verändert, und bilden wir $S(\eta)$, wo

$$(30) \qquad \eta_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{i\varkappa}(a_1, a_2, \cdots a_r) y_\varkappa \qquad (i=1, 2, \cdots n)$$

die allgemeinste Transformation von G darstellen möge.

Wenn dann die Untergruppe G_S nur von $\varrho = r - \sigma$ Parametern abhängt, so enthält der Ausdruck $S(\eta)$ nach dem Satze von Herrn Vessiot (Nr. 144, S. 50) genau $\sigma = r - \varrho$ wesentliche Parameter. Differentiiren wir also $S(\eta)$ σ-mal nach x und eliminiren zwischen $S(\eta)$ und seinen σ ersten Ableitungen jene σ Parameter, so erhalten wir eine algebraische Differentialgleichung

$$(31) \qquad \Phi(S) = 0$$

σ^{ter} Ordnung für $S(\eta)$, deren Coefficienten offenbar rationale Differentialfunctionen der $y_1, y_2, \cdots y_n$ sind, die bei den Transformationen von G ungeändert bleiben und folglich dem Rationalitätsbereiche angehören. Diese Differentialgleichung (31), die wir uns in Bezug auf S und seine Ableitungen im algebraischen Sinne irreductibel denken können, hat keines ihrer nicht singulären Integrale (im Sinne der Nr. 144, S. 49) mit einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung und vom selben Charakter gemein; denn eine solche Differentialgleichung müsste dann auch durch $S(\eta)$ selbst befriedigt werden, d. h. sie besässe eine Lösung, die σ wesentliche willkürliche Parameter enthält, und das ist unmöglich (vergl. Nr. 144, S. 52). Wir können folglich die Differentialgleichung (31) auch als die Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit dem Rationalitätsbereiche angehörigen Coefficienten definiren, der die rationale Differentialfunction $S(y)$ Genüge leistet.

Die Transformationen von G, bei denen $S(\eta)$, aufgefasst als Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$, ungeändert bleibt, bilden offenbar eine Untergruppe von G, die aus G_S hervorgeht, indem man diese letztere Gruppe durch die Substitution, die $[\eta_i]$ mit $[y_i]$ verknüpft, transformirt. Wir nannten (Nr. 140, S. 36) eine solche Untergruppe mit G_S innerhalb G gleichberechtigt.

Adjungiren wir nunmehr der Differentialgleichung (α) die sämmtlichen Lösungen von (31), so reducirt sich die Transformationsgruppe G auf diejenige Untergruppe, die allen mit G_S innerhalb G gleich-

berechtigten Untergruppen gemeinsam ist; diese ist aber offenbar innerhalb G ausgezeichnet, und zwar ist es die umfassendste ausgezeichnete Untergruppe von G, bei deren Anwendung $S(y)$ ungeändert bleibt; wir können also sagen:

Durch Integration der Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit dem Rationalitätsbereiche angehörigen Coefficienten, der eine rationale Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$ Genüge leistet, reducirt sich die Gruppe G unserer linearen Differentialgleichung (α) auf eine ausgezeichnete Untergruppe.

Auf Grund dieses Satzes können wir nun übersehen, in welcher Weise die Structur der Transformationsgruppe G das bei der Integration der Differentialgleichung (α) einzuschlagende Verfahren bestimmt.

Sei G_1 eine umfassendste in G enthaltene ausgezeichnete Untergruppe, d. h. eine ausgezeichnete Untergruppe von G, die in keiner anderen ausgezeichneten Untergruppe von G enthalten ist; sei ebenso G_2 eine umfassendste ausgezeichnete Untergruppe von G_1, G_3 eine solche von G_2, und so fort, dann muss in dieser Folge von Gruppen endlich eine Gruppe G_{m-1} zum Vorschein kommen, die ausser sich selbst und der identischen Transformation keine ausgezeichnete Untergruppe enthält, die also (vergl. Nr. 140, S. 36) eine einfache Gruppe ist. Die Folge

$$G_0,\ G_1,\ G_2, \cdots\ G_{m-1},\ (G_0 = G),$$

soll dann nach Herrn Vessiot eine Normalzerlegung von G heissen.

Wir denken uns nun für $\varkappa = 1, 2, \cdots m$ eine Untergruppe $\Gamma_\varkappa$ von $G_{\varkappa-1}$ bestimmt, die $G_\varkappa$ enthält und überdies von der grösstmöglichen Anzahl von Parametern abhängt. Sei ferner $f_\varkappa(y)$ eine Differentialinvariante von $\Gamma_\varkappa$, die bei keiner nicht in $\Gamma_\varkappa$ enthaltenen Transformation von $G_{\varkappa-1}$ ungeändert bleibt, und bedeute $\lambda_\varkappa$ die Differenz zwischen den Anzahlen der Parameter in den Gruppen $G_{\varkappa-1}$ und $\Gamma_\varkappa$ Dann befriedigt $f_1(y)$ eine Differentialgleichung

$$\Phi_1(f_1) = 0$$

von der Ordnung λ_1. Denkt man sich dieselbe integrirt und adjungirt ihr allgemeines Integral dem Rationalitätsbereiche von (α), so reducirt sich die Transformationsgruppe auf G_1. Hiernach genügt $f_2(y)$ einer Differentialgleichung

$$\Phi_2(f_2) = 0$$

von der Ordnung λ_2, durch deren Integration sich die Transformationsgruppe von (α) auf G_2 reducirt. So kann man fortfahren, bis man

endlich G_{m-1} als Transformationsgruppe von (α) hat. Wenn man dann noch die allgemeine Lösung der Differentialgleichung λ_m^{ter} Ordnung

$$\Phi_m(f_m) = 0,$$

der f_m Genüge leistet, adjungirt, so reducirt sich die Transformationsgruppe von (α) auf die identische Transformation (weil G_{m-1} eine einfache Gruppe ist), so dass also die Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ selbst dem Rationalitätsbereiche angehören.

Die Integration von (α) ist somit auf die successive Lösung von Differentialgleichungen der Ordnungen

(32) $$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$$

zurückgeführt, und zwar sind diese Hülfsdifferentialgleichungen immer von der möglichst niedrigen Ordnung, weil wir uns die $\Gamma_\varkappa$ als mit der grösstmöglichen Parameteranzahl behaftet gewählt dachten.

Im Allgemeinen wird es natürlich mehrere von einander verschiedene Normalzerlegungen der Gruppe G geben können und entsprechend wird man auf verschiedene Ketten von Hülfsdifferentialgleichungen geführt werden. Stets sind aber die Zahlen (32) dieselben, d. h. die Hülfsdifferentialgleichungen, die den verschiedenen Normalzerlegungen von G entsprechen, haben immer dieselben Ordnungszahlen. Dieses interessante Resultat, auf dessen Begründung wir nicht eingehen, ist zuerst von Herrn Vessiot bewiesen worden.

155. Lineare Differentialgleichungen, durch deren Adjunction sich die Transformationsgruppe reducirt. Reciprocitätssatz. Hülfsdifferentialgleichungen mit einfacher Gruppe. Integration durch Quadraturen.

Das einer Normalzerlegung von G entsprechende Integrationsschema der Differentialgleichung (α) gewinnt nur in dem Falle praktische Bedeutung, wenn die Untergruppen $\Gamma_\varkappa$ als algebraische Untergruppen gewählt werden können. Aber selbst in diesem Falle wird die Untersuchung einer linearen Differentialgleichung im Allgemeinen auf die von algebraischen Differentialgleichungen von höherem als dem ersten Grade zurückgeführt. Diese haben zwar insofern einen ganz besonderen Charakter, als sich die Art, wie die willkürlichen Constanten in das allgemeine Integral eingehen, genau übersehen lässt; immerhin wird es aber von Bedeutung sein zu fragen: wann lässt sich die Transformationsgruppe einer vorgelegten linearen Differentialgleichung durch Adjunction der Lösungen einer anderen ebenfalls linearen Differentialgleichung reduciren?

Wenn wir die Frage in dieser Form stellen, so gehen wir über die bisher festgehaltene Art der Adjunction hinaus. Wir hatten nämlich bisher immer nur rationale Differentialfunctionen der Elemente eines Fundamentalsystems adjungirt und konnten deshalb die Untersuchung an der allgemeinen Differentialgleichung (α) führen, deren Transformationsgruppe wir durch Adjunction einer geeigneten rationalen Differentialfunction zur Uebereinstimmung gebracht hatten mit der Transformationsgruppe einer vorgelegten speciellen Differentialgleichung. Die so gefundenen Sätze übertragen sich vermöge des in der Nr. 152 (S. 76, 77) dargelegten Princips unmittelbar auf specielle Differentialgleichungen, indem nur an Stelle der formellen Unveränderlichkeit rationaler Differentialfunctionen die Unveränderlichkeit als Function von x tritt.

Wir machen von dieser Uebertragbarkeit sofort Gebrauch, indem wir uns eine specielle Differentialgleichung (A), deren Transformationsgruppe für einen gegebenen Rationalitätsbereich G sein möge, vorgelegt denken, und nach der Beschaffenheit einer anderen linearen Differentialgleichung

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^m z}{d x^m} + q_1 \frac{d^{m-1} z}{d x^{m-1}} + \cdots + q_m z = 0$$

mit dem Rationalitätsbereiche angehörenden Coefficienten fragen, durch deren Integration sich die Gruppe G von (A) reducirt.

Es sei also $z_1, z_2, \cdots z_m$ ein Fundamentalsystem von (B) und möge durch Adjunction desselben die Gruppe G von (A) auf eine Untergruppe G_1 reducirt werden, die genau s Parameter weniger enthält wie G selbst. Möge die aus den Elementen $y_1, y_2, \cdots y_n$ eines Fundamentalsystems von (A) gebildete rationale Differentialfunction $R_1(y)$ genau bei den Transformationen von G_1 (als Function von x) ungeändert bleiben, dann ist also nach dem Picard-Vessiot'schen Doppelsatze

$$R_1(y_1, y_2, \cdots y_n) = H_1(z_1, z_2, \cdots z_m),$$

wo $H_1(z)$ eine rationale Differentialfunction der $z_1, z_2, \cdots z_m$ bedeutet Denken wir uns nun im Sinne der Nr. 154 (S. 81) die Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit dem ursprünglichen Rationalitätsbereiche angehörigen Coefficienten gebildet, der die Function $R_1(y)$ genügt, so ist dieselbe von der s^{ten} Ordnung. Bilden wir ebenso die Differentialgleichung niedrigster Ordnung für $H_1(z_1, z_2, \cdots z_m)$, so haben diese beiden Differentialgleichungen eine Lösung mit einander gemein und sind folglich mit einander identisch. Bezeichnen wir also mit $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ das durch die allgemeinste Transformation von G

aus $y_1, y_2, \cdots y_n$ entstehende Fundamentalsystem von (A), durch $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_m$ das mit $z_1, z_2, \cdots z_m$ durch die allgemeinste Transformation der Gruppe der Differentialgleichung (B) verknüpfte Fundamentalsystem von (B), so enthalten die beiden Ausdrücke

$$R_1(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n) \quad \text{und} \quad H_1(\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_m)$$

genau s wesentliche Parameter, und jeder Werth, den einer von beiden für ein bestimmtes Werthesystem der in ihm enthaltenen Parameter annimmt, stimmt mit einem Werthe des anderen für ein gewisses Werthesystem seiner Parameter überein.

Daraus schliessen wir zuvörderst, dass mit der Adjunction der $z_1, z_2, \cdots z_m$ auch alle verschiedenen Werthe von

$$R_1(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n)$$

dem Rationalitätsbereiche hinzugefügt werden, da jeder derselben gleich einer rationalen Differentialfunction der $z_1, z_2, \cdots z_m$ wird, dass also die Gruppe G_1 in G nothwendig als ausgezeichnete Untergruppe enthalten sein muss.

Denken wir uns aber nun umgekehrt die Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ von (A) der Differentialgleichung (B) adjungirt, so gehört $R_1(y)$ und folglich auch $H_1(z_1, z_2, \cdots z_m)$ dem Rationalitätsbereiche an. Da der Ausdruck

$$H_1(\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_m)$$

genau s wesentliche Parameter enthält, so reducirt die Adjunction der $y_1, y_2, \cdots y_m$ die Transformationsgruppe von (B) auf eine Gruppe, die mindestens s Parameter weniger enthält. Andererseits kann die Reduction auch nicht um mehr als s Parameter erfolgen, da wir ebenso für die Differentialgleichung (A) schliessen können, dass ihre Transformationsgruppe bei Adjunction der $z_1, z_2, \cdots z_m$ um mindestens soviele Parameter reducirt werden muss, wie die Gruppe von (B) bei Adjunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$. Also findet sich die Gruppe von (B) durch Adjunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$ auf eine Untergruppe und zwar offenbar auch auf eine ausgezeichnete Untergruppe reducirt, die genau s Parameter weniger enthält wie die ursprüngliche. Wir haben somit den folgenden Satz, der einem bekannten Theoreme der Algebra analog ist, und den man wohl als den Reciprocitätssatz bezeichnen kann:

Wenn sich die Transformationsgruppe einer linearen Differentialgleichung (A) durch Adjunction der Lösungen einer anderen linearen Differentialgleichung (B) auf eine Untergruppe reducirt, die s Parameter weniger enthält wie die ursprüngliche, so reducirt sich die Gruppe von (B) durch

Adjunction der Lösungen von (A) in derselben Weise, un die neuen Transformationsgruppen sind beide Male in de ursprünglichen als ausgezeichnete Untergruppen enthalte

Sei insbesondere die Transformationsgruppe der Differentialgleichu (B) eine einfache, wenn sich dann durch Adjunction der Lösung von (B) die Transformationsgruppe von (A) wirklich reducirt, so mu sich zufolge des Reciprocitätssatzes die Gruppe von (B) durch Adjur tion der Lösungen von (A) auf die identische Transformation reducire d. h. es sind die Lösungen von (B) rationale Differentia functionen der Lösungen $y_1, y_2, \cdots y_n$ von (A).

Wenn man sich also auf die Adjunction der Lösung von linearen Hülfsdifferentialgleichungen mit einfach Gruppe beschränkt, so bleibt man im Rahmen der Betrac tungen, die sich auf die Adjunction rationaler Differentia functionen der Elemente eines Fundamentalsystems der g gebenen Differentialgleichung beziehen und bei denen d gegebene specielle Differentialgleichung durch die allg meine Differentialgleichung (α) unter Adjunction einer g wissen Gattung rationaler Differentialfunctionen erset werden kann.

Dies ist insbesondere der Fall, wenn es sich um die Frage hande ob eine vorgelegte lineare Differentialgleichung durch Quadratur integrirt werden kann.

In der That kann eine Quadratur, d. h. also die Ausführung ein Integrals

$$u = \int f(x) dx,$$

wo $f(x)$ eine dem Rationalitätsbereiche angehörige Function bedeut stets ersetzt werden durch die Integration der homogenen linear Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dv}{dx} = f(x) v, \tag{33}$$

wenn

$$u = \log v$$

gesetzt wird. Die Transformationsgruppe einer Gleichung von d Form (33) ist aber die homogene lineare Gruppe in einer Variabeln und diese ist offenbar einfach.

Wenn also die Integration einer (homogenen) linear Differentialgleichung erster Ordnung die Transformation gruppe einer gegebenen linearen Differentialgleichung r ducirt, so ist die Lösung der Hülfsdifferentialgleichung ei

rationale Differentialfunction der Elemente eines Fundamentalsystems der gegebenen Gleichung, und die reducirte Gruppe ist eine ausgezeichnete Untergruppe, die von einem Parameter weniger abhängt wie die ursprüngliche.

156. Bedingung für die Integrabilität einer linearen Differentialgleichung durch Quadraturen. Integrable Gruppen. Die allgemeine lineare Differentialgleichung ist nicht durch Quadraturen lösbar.

Soll sich also die Integration der Differentialgleichung (α), deren Transformationsgruppe unter Adjunction der Differentialfunction $R(y)$ wieder durch G bezeichnet werden mag, durch eine Kette von lauter linearen homogenen Hülfsdifferentialgleichungen erster Ordnung absolviren lassen, d. h. soll es möglich sein, die Gruppe G durch successive Adjunction der Lösungen solcher Hülfsdifferentialgleichungen auf die identische Transformation zu reduciren, so muss sich die Transformationsgruppe der gegebenen Differentialgleichung allemal, wenn sie sich reducirt, auf eine ausgezeichnete Untergruppe reduciren, die einen Parameter weniger enthält. Es muss demnach G eine ausgezeichnete Untergruppe G_1 besitzen, die einen Parameter weniger enthält wie G, ebenso G_1 eine ausgezeichnete Untergruppe G_2, die einen Parameter weniger enthält wie G_1 u. s. w.

Eine aus r infinitesimalen Transformationen

$$\mathfrak{X}_1 f,\ \mathfrak{X}_2 f,\ \cdots\ \mathfrak{X}_r f$$

erzeugte Gruppe G, die diese Eigenschaft besitzt, nennt Herr Lie eine integrable Gruppe.

Wir können also sagen: Damit eine lineare Differentialgleichung durch eine Kette von homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung integrirbar sei, ist nothwendig, dass sie eine integrable Transformationsgruppe besitze.

In analytischer Form lässt sich die Bedingung dafür, dass die r-gliedrige Gruppe G integrabel sei, dahin aussprechen, dass es möglich sein muss, r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen derselben

$$Y_1 f,\ Y_2 f,\ \cdots\ Y_r f$$

so auszuwählen, dass Relationen von der Form

$$(34)\qquad (Y_i Y_{i+\varkappa}) = \sum_{s=1}^{i+\varkappa-1} c_{i,\,i+\varkappa,\,s}\, Y_s f \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots r-1 \\ \varkappa = 1, 2, \cdots r-i \end{pmatrix}$$

bestehen, wo die c Constanten bedeuten; denn in diesem Falle erzeugen

$$Y_1 f, \cdots Y_i f$$

offenbar eine i-gliedrige Untergruppe, die (vergl. Nr. 140, S. 37) der aus den

$$Y_1 f, \cdots Y_i f, \; Y_{i+1} f$$

erzeugten $(i+1)$-gliedrigen ausgezeichnet enthalten ist.

Herr Lie hat nun über integrable homogene lineare Grup einen wichtigen Satz aufgestellt, auf den wir kurz eingehen müss Sei

(35) $$\mathfrak{X}f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa i} y_i \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa}$$

eine infinitesimale homogene lineare Transformation, dann beweist m leicht mit Hülfe derselben Methode, die wir im dritten Abschnitte die Reduction einer linearen Substitution auf die canonische Form gewandt haben, dass sich stets neue Veränderliche

(36) $$z_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} c_{i\varkappa} y_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

so einführen lassen, dass die infinitesimale Transformation $\mathfrak{X}f$ c canonische Form

(37) $$b_{11} z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + (b_{21} z_1 + b_{22} z_2) \frac{\partial f}{\partial z_2} + \cdots + (b_{n1} z_1 + \cdots + b_{nn} z_n) \frac{\partial f}{\partial z_n}$$

annimmt.

Der Satz des Herrn Lie besagt nun, dass, wenn die infinitesimal Transformationen

$$Y_1 f, \; Y_2 f, \cdots Y_r f$$

eine integrable lineare homogene Gruppe erzeugen, d. h. wenn zwisch diesen infinitesimalen Transformationen die Beziehungen (34) bestehe dass sich dann stets neue Variable (36) so einführen lassen, dass al $Y_i f$ $(i = 1, 2, \cdots r)$ gleichzeitig die canonische Form (37) annehmen.

Nach Einführung dieser neuen Variabeln $[z_i]$ ist also eine jec integrable lineare homogene Gruppe in der aus den infinitesimale Transformationen

$$\begin{array}{l} z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1}, \\ z_1 \frac{\partial f}{\partial z_2}, \; z_2 \frac{\partial f}{\partial z_2}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_1 \frac{\partial f}{\partial z_n}, \; z_2 \frac{\partial f}{\partial z_n}, \cdots z_n \frac{\partial f}{\partial z_n} \end{array}$$

erzeugten Gruppe, d. h. in der Gruppe

$$(38)\qquad \begin{cases} \zeta_1 = \alpha_{11} z_1, \\ \zeta_2 = \alpha_{21} z_1 + \alpha_{22} z_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \zeta_n = \alpha_{n1} z_1 + \alpha_{n2} z_2 + \dots + \alpha_{nn} z_n \end{cases}$$

als Untergruppe enthalten; wir können demnach das Lie'sche Theorem auch so aussprechen:

Jede integrable lineare homogene (aus infinitesimalen Transformationen erzeugte) Gruppe geht durch Transformation mit einer linearen Substitution in eine Untergruppe der Gruppe (38) über, oder, was dasselbe besagt, sie ist mit einer Untergruppe von (38) innerhalb der allgemeinen linearen homogenen Gruppe L gleichberechtigt.

Auf Grund dieses Satzes werden wir nun im Stande sein zu übersehen, dass die für die Integrabilität einer linearen Differentialgleichung durch Quadraturen oben als nothwendig erkannte Bedingung zugleich hinreichend ist.

Sei also die Gruppe G unserer Differentialgleichung (α) integrabel und denken wir uns das Fundamentalsystem $[y_i]$ gleich von vorneherein so gewählt, dass G in der Gruppe von der Form (38) als Untergruppe enthalten sei.

Offenbar bleiben die rationalen Differentialfunctionen

$$\frac{d \log y_1}{dx}, \quad \frac{d \log D(y_1, y_2)}{dx}, \quad \frac{d \log D(y_1, y_2, y_3)}{dx}, \dots \frac{d \log D(y_1, y_2, \cdots y_{n-1})}{dx}$$

ungeändert, wenn man auf die $[y_i]$ eine Substitution von der Form (38) ausübt; sie sind folglich Differentialinvarianten der Gruppe (38) und demnach auch der in (38) als Untergruppe enthaltenen Gruppe G, also sind sie, zufolge des Picard-Vessiot'schen Doppelsatzes, Functionen von x, die dem Rationalitätsbereiche angehören.

Setzen wir

$$\frac{d \log y_1}{dx} = f(x),$$

so ist

$$y_1 = e^{\int f(x)\, dx},$$

d. h. ein Integral unserer Differentialgleichung genügt einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereiche angehören. Benützen wir dieses Integral nach dem in der Nr. 18 (Band I, S. 47) dargelegten Verfahren zur Reduction der Differentialgleichung (α), indem wir setzen

$$y = y_1 \int z\,dx,$$

so genügt z einer linearen homogenen Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Coefficienten sich zufolge der Gleichungen (3) Nr. 18 (Band I, S. 48) aus den Coefficienten von (α) und den successiven Ableitungen von $\log y_1$ rational zusammensetzen und somit dem Rationalitätsbereiche angehören. Für diese Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung constituiren die Ausdrücke

$$z_\varkappa = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{\varkappa+1}}{y_1}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n-1)$$

ein Fundamentalsystem, und da, wie sich aus den Formeln der Nummern 18 und 22 ergiebt,

$$D(y_1, y_2, \cdots y_\lambda) = y_1^\lambda D(z_1, z_2, \cdots z_{\lambda-1})$$

ist, so sind die Ausdrücke

$$\frac{d \log z_1}{dx}, \quad \frac{d \log D(z_1, z_2)}{dx}, \cdots \frac{d \log D(z_1, z_2, \cdots z_{n-2})}{dx}$$

Functionen, die dem Rationalitätsbereiche angehören. Die Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung für z hat also genau dieselbe Beschaffenheit wie die ursprüngliche für y, wir können somit das Verfahren der Nr. 18 weiter anwenden, indem wir setzen

$$z = z_1 \int u\,dx,$$

und so fortfahren, bis wir endlich zu einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dw}{dx} = \varphi(x) w$$

kommen, wo $\varphi(x)$ eine dem Rationalitätsbereiche angehörige Function bedeutet.

Es ist dann

$$y_2 = y_1 \int z_1\,dx = e^{\int f(x)\,dx} \int e^{\int f_1(x)\,dx}\,dx,$$

wo

$$f_1(x) = \frac{d \log z_1}{dx}$$

gesetzt wurde, und so fortfahrend erhalten wir endlich

$$y_n = e^{\int f(x)\,dx} \int e^{\int f_1(x)\,dx}\,dx \int \cdots \int e^{\int \varphi(x)\,dx}\,dx,$$

d. h. die Elemente des Fundamentalsystems der Differentialgleichung (α) bestimmen sich durch Quadraturen, und zwar sind zur Bestimmung von y_x im Allgemeinen x übereinandergesetzte Quadraturen erforderlich, so dass also die Integration von (α) im Allgemeinen

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Quadraturen erfordert.

Damit ist also in der That bewiesen, dass eine lineare Differentialgleichung, deren Transformationsgruppe integrabel ist, auch stets durch Quadraturen gelöst werden kann.

Wir erkennen zugleich, dass, wenn eine lineare Differentialgleichung durch Quadraturen integrirbar ist, eines ihrer Integrale eine dem Rationalitätsbereiche angehörige logarithmische Ableitung besitzt, und dass die Bestimmung der übrigen Integrale auf dem in der Nr. 18 dargelegten Wege erfolgen kann, wobei dann immer nur lineare homogene Differentialgleichungen erster Ordnung mit dem Rationalitätsbereiche angehörenden Coefficienten zu lösen und auf deren Lösungen wiederholte Quadraturen auszuüben sind.

Die Bedingung dafür, dass die Transformationsgruppe der gegebenen Differentialgleichung integrabel sei, setzt implicite voraus, dass diese Gruppe eine aus infinitesimalen Transformationen erzeugte continuirliche ist. Um dieses zu erreichen, wird man im Allgemeinen dem Rationalitätsbereiche noch die Wurzeln einer bestimmten algebraischen Gleichung mit dem Rationalitätsbereiche angehörigen Coefficienten zu adjungiren haben (vergl. Nr. 154, S. 80). Wenn also z. B. die vorgelegte lineare Differentialgleichung in x rationale Coefficienten besitzt, so wird, falls dieselbe durch Quadraturen integrirbar sein soll, ihre Transformationsgruppe nach Adjunction einer gewissen algebraischen Function von x eine integrable sein müssen, und es wird sich dann eine ihrer Lösungen in der Form

$$e^{\int f(x)\,dx}$$

darstellen lassen, wo $f(x)$ eine rationale Function des adjungirten algebraischen Gebildes bedeutet, d. h. der Logarithmus einer Lösung ist ein zu diesem Gebilde gehöriges Abel'sches Integral.

Die entwickelte Theorie der durch Quadraturen integrirbaren linearen Differentialgleichungen ist der Galois'schen Theorie der durch Wurzelgrössen auflösbaren algebraischen Gleichungen analog. Es ist nun auch leicht, einen Satz aufzustellen, der dem Ruffini-Abel'schen Satze von der Unauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung (höheren als vierten Grades) durch Wurzelzeichen entspricht.

Es ist nämlich die allgemeine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung für $n > 1$ nicht durch Quadraturen integrirbar.

In der That ist die Transformationsgruppe dieser Differentialgleichung die allgemeine lineare homogene Gruppe L,

$$\eta_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{i\varkappa} y_\varkappa; \quad |a_{i\varkappa}| \neq 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n).$$

Diese besitzt eine algebraische ausgezeichnete Untergruppe mit $n^2 - 1$ Parametern, nämlich diejenige, deren Transformationen die Bedingung

$$|a_{i\varkappa}| = 1 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

erfüllen und die Herr Lie als die specielle lineare homogene Gruppe bezeichnet. Die specielle lineare homogene Gruppe $\bar{L}$ ist aber, wie Herr Lie bewiesen hat, einfach, also ist L nicht integrabel.

Siebentes Kapitel.

157. Probleme, die sich auf die Transformationsgruppe beziehen. Algebraische Beziehungen zwischen Integralen und deren Ableitungen. Der Fall algebraischer Integrale.

Nachdem wir so die auf die Betrachtung der Transformationsgruppe einer gegebenen Differentialgleichung gegründete Integrationstheorie dargelegt haben, wollen wir uns über die Probleme zu orientiren suchen, die sich an diese Theorie noch anknüpfen oder derselben unterordnen lassen.

Die erste Aufgabe, deren Lösung als wünschenswerth erscheint, ist die, alle möglichen Arten von Transformationsgruppen, die bei linearen homogenen Differentialgleichungen überhaupt auftreten können, aufzufinden. Das heisst mit andern Worten: Man suche für ein gegebenes n alle algebraischen Untergruppen der linearen homogenen Gruppe in n Variabeln. Diese Aufgabe ist für $n=2$ und $n=3$ gelöst. Wir kommen hierauf später zurück.

Kennt man eine algebraische Untergruppe G von L, so denke man sich eine zu derselben gehörige Differentialinvariante $R(y_1, y_2, \cdots y_n)$ aufgestellt. Dann besitzt die allgemeine lineare Differentialgleichung (α) unter Adjunction von $R(y)$ eine bestimmte Integrationstheorie, die allen denjenigen linearen Differentialgleichungen gemeinsam ist, deren Transformationsgruppe mit G übereinstimmt. Man kann sich dann weiter die Aufgabe stellen, für einen gegebenen Rationalitätsbereich, etwa den der rationalen Functionen von x, alle linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung aufzufinden, deren Transformationsgruppe G ist. Es wird sich also darum handeln, Functionen des Rationalitätsbereiches zu finden, die in den Gleichungen (29) (S. 76) die rechten Seiten bilden können.

Eine lineare Differentialgleichung (A), deren Transformationsgruppe G ist, hat die besondere Eigenschaft, dass zwischen den Elementen $y_1, y_2, \cdots y_n$ eines Fundamentalsystems und deren Ableitungen die durch die Gleichung

(39) $$R(y_1, y_2, \cdots y_n) = f(x)$$

dargestellte Beziehung besteht, wo $f(x)$ eine dem Rationalitätsberei angehörige Function, also z. B., wenn wir den einfachsten Fall trachten, wo der Rationalitätsbereich aus den rationalen Functio von x gebildet wird, eine rationale Function bedeutet. Aus di Beziehung folgen durch Differentiation nach x noch eine Reihe and Beziehungen, in denen wir uns stets die Ableitungen von höherer der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung weggeschafft denken können, und die du die Lösungen $[y_i]$ von (A) ebenfalls identisch befriedigt werden. A wenn die Gruppe G von r Parametern abhängt, so sind nur diejeni dieser Beziehungen von einander und von (39) unabhängig, die du weniger als (n^2-r)-malige Differentiation entstehen, denn $R(y)$ gen in diesem Falle (vergl. Nr. 145, S. 52) einer algebraischen Different gleichung $(n^2-r)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Wenn umgekehrt von der Differentialgleichung (A) bekannt dass die Elemente $y_1, y_2, \cdots y_n$ eines Fundamentalsystems und de Ableitungen gewisse algebraische Gleichungen mit rationalen Coe cienten

$$f_\varkappa\left(y_1, \cdots y_n, y_1', \cdots y_n', \cdots y_1^{(n-1)}, \cdots y_n^{(n-1)}, x\right) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \cdots) \tag{40}$$

erfüllen, so folgt aus den Sätzen der Nr. 152 (S. 77), dass diese G chungen erhalten bleiben, wenn wir auf die $[y_i]$ eine Transformation Transformationsgruppe G der Differentialgleichung anwenden. Dar kann man eine für die Gruppe G bedeutsame Folgerung ziehen.

Denken wir uns nämlich die Relationen (40) beliebig oft di rentiirt und die Ableitungen höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $y_1, y_2, \cdots y_n$ mit Hülfe der Differentialgleichung (A) entfernt. D entsteht ein gewisses Gleichungssystem für die n^2+1 Grössen

$$x, y_1, \cdots y_n, y_1', \cdots y_n', y_1^{(n-1)}, \cdots y_n^{(n-1)}, \tag{41}$$

dessen Gleichungen einander nie widersprechen können, weil sie ja folge der Voraussetzung durch die Lösungen $y_1, y_2, \cdots y_n$ befriec werden. In diesem Gleichungssysteme wird es dann eine gewisse zahl von einander unabhängiger Gleichungen

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \cdots F_\gamma = 0 \tag{42}$$

geben; d. h. diese γ Gleichungen (42) werden die Eigenschaft hal dass, wenn man sie nach x differentiirt und überdies die Ableitun höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der $[y_i]$ entfernt, sich nur Gleichun ergeben, die schon eine Folge der Gleichungen (42) sind. Wie H Lie gelegentlich bemerkt hat, kann man diese Eigenschaft des G chungssystems (42) kurz dadurch charakterisiren, dass man s

dasselbe gestatte in den n^2+1 Grössen (41) die infinitesimale Transformation

$$\mathfrak{X}f = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} y_i' \frac{\partial f}{\partial y_i} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} y_i^{(n-1)} \frac{\partial f}{\partial y_i^{(n-2)}}$$

$$- \frac{1}{P_n(x)} \sum_{i=1}^{n} \left(P_{n-1}(x) y_i^{(n-1)} + \cdots + P_0(x) y_i\right) \frac{\partial f}{\partial y_i^{(n-1)}}.$$

Deuten wir nun die n^2+1 Grössen (41) als Coordinaten eines Punktes in der ebenen (n^2+1)-fachen Mannigfaltigkeit oder dem (n^2+1)-dimensionalen Raume R_{nn+1}, so erscheinen dieselben, wenn wir die $[y_i]$ als die so bezeichneten Lösungen der Differentialgleichung (A) ansehen, als Functionen von x; wir erhalten also in dem R_{nn+1} ein eindimensionales Gebilde, eine Curve, die wir als Integralcurve $\mathfrak{C}$ von (A) bezeichnen können. Diese Art der geometrischen Deutung eines Fundamentalsystems ist ausserordentlich anschaulich. Da nämlich ein Fundamentalsystem durch die in einem beliebigen nicht singulären x-Werthe vorgeschriebenen Anfangswerthe seiner n Elemente und deren $(n-1)$ ersten Ableitungen bestimmt ist, so können wir sagen, dass durch jeden Punkt des R_{nn+1} eine und nur eine Integralcurve geht, mit Ausnahme derjenigen Punkte, die auf der durch die Gleichung

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n) = 0$$

bestimmten Mannigfaltigkeit liegen, letzteres aus dem Grunde, weil die Determinante eines Fundamentalsystems für keinen nicht singulären Werth von x verschwinden darf.

Auf der anderen Seite stellen die Gleichungen (42) eine algebraische Mannigfaltigkeit im R_{nn+1} dar, auf welcher unsere Integralcurve $\mathfrak{C}$ liegt. Diese algebraische Mannigfaltigkeit muss nun in sich selbst übergehen, wenn man auf die $y_i, y_i', \cdots y_i^{(n-1)}$ $(i=1, 2, \cdots n)$ irgend eine Transformation der Gruppe G anwendet. Denkt man sich also die Gesammtheit derjenigen linearen homogenen Transformationen der y_i aufgestellt, die auf die $y_i, y_i', \cdots y_i^{(n-1)}$ simultan angewandt, bei unverändertem x jene Mannigfaltigkeit in sich selbst transformiren, so bilden dieselben offenbar eine Gruppe und zwar eine algebraische Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe L. In dieser Gruppe muss dann G als Untergruppe enthalten sein.

Wir sehen daraus, dass das Bestehen von Relationen von der Form (40) einen gewissen besonderen Gruppencharakter der Differentialgleichung (A) oder (vergl. Nr. 148, S. 63) einen besonderen Affect derselben bedingt, und dass sich demnach die Untersuchung von linearen Differentialgleichungen, zwischen deren Integralen solche

Relationen bestehen, in gewissem Sinne in die Theorie der Tra formationsgruppen dieser Differentialgleichungen einordnet.

In der Entwickelung der Lehre von den linearen Differenti gleichungen wurde die Frage nach der Beschaffenheit einer Differenti gleichung, deren Lösungen gewisse algebraische Gleichungen erfüll zuerst von Herrn Fuchs im Zusammenhange mit der Frage unt sucht, wann eine lineare Differentialgleichung durch algebraische Fu tionen integrirt werden kann. Dass dieser Fall wirklich hierher geh lässt sich leicht übersehen.

Denken wir uns nämlich, die durch die Gleichungen (42) stimmte Mannigfaltigkeit sei selbst eine Curve in dem R_{nn+1}. Da muss diese Curve mit der Integralcurve $\mathfrak{C}$ zusammenfallen oder selbe wenigstens enthalten, so dass also $\mathfrak{C}$ selbst eine algebrais Curve darstellt. Das heisst aber nichts anderes, als es lassen sich

$$y_1, \cdots y_n, y_1', \cdots y_n', \cdots y_1^{(n-1)}, \cdots y_n^{(n-1)}$$

aus den Gleichungen (42) als algebraische Functionen von x berechn

Wenn umgekehrt von der Differentialgleichung (A) bekannt dass ihre Lösungen algebraische Functionen von x sind, so besteh offenbar zwischen den Elementen $y_1, y_2, \cdots y_n$ eines Fundament systems und x gewisse algebraische Gleichungen.

158. Algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen. Für dieselben ist die Transformationsgruppe endlich.

Verweilen wir einen Augenblick bei der Betrachtung einer solche wie wir kurz sagen, algebraisch integrirbaren Differentia gleichung und fragen insbesondere nach der Beschaffenheit d Transformationsgruppe einer derartigen Gleichung.

Wir setzen voraus, dass die Coefficienten der zu betrachtend linearen Differentialgleichung (A) rationale Functionen von x sin Dann wird ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ von (A) einem Syster von algebraischen Gleichungen

$$f_\varkappa(y_1, y_2, \cdots y_n, x) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu;\ \nu \geq n) \tag{43}$$

genügen, wo die $f_\varkappa$ ganze rationale Functionen ihrer Argumente l deuten, von dem wir voraussetzen können, dass es irreductibel i Wir verstehen hierunter das Folgende.

Bedeutet $x = x_0$ einen regulären Werth von x, d. h. einen Wer in dessen Umgebung sich die Integrale von (A) in gewöhnliche Poter reihen entwickeln lassen, so sei

(44) $$y_1 = \mathfrak{P}_1(x|x_0), \quad y_2 = \mathfrak{P}_2(x|x_0), \quad \cdots \quad y_n = \mathfrak{P}_n(x|x_0)$$

ein System solcher linear unabhängiger Potenzreihen, die der Differentialgleichung (A) und folglich auch dem Gleichungssysteme (43) Genüge leisten. Diese definiren ein eindeutig bestimmtes System particularer Lösungen $y_1, y_2, \cdots y_n$ von (A) in der Fläche $\overline{T}$, die aus der x-Ebene durch Aussonderung der wesentlichen singulären Stellen und Zerschneidung in eine einfach zusammenhängende Fläche entsteht. Nach den Grundlagen der Functionentheorie muss dann jedes System von Potenzreihen, welches aus (44) durch analytische Fortsetzung entsteht, ebenfalls die Gleichungen (43) befriedigen. Das Gleichungssystem (43) wird nun als irreductibel bezeichnet, wenn auch umgekehrt jedes System von Potenzreihen, welches, für $y_1, y_2, \cdots y_n$ eingesetzt, dasselbe befriedigt, aus den Reihen (44) durch analytische Fortsetzung abgeleitet werden kann. Da aber jedes solche System von Potenzreihen die Differentialgleichung (A) befriedigen muss, so muss sich dasselbe durch die aus (44) entspringenden innerhalb $\overline{T}$ eindeutig definirten $y_1, y_2, \cdots y_n$ homogen linear mit constanten Coefficienten darstellen lassen, d. h. mit anderen Worten, jedes Lösungssystem der Gleichungen (43) geht aus den $y_1, y_2, \cdots y_n$ durch Anwendung einer homogenen linearen Transformation hervor. Die Gesammtheit dieser linearen Transformationen, deren Anzahl offenbar eine endliche sein muss, bildet dann im Sinne der Nr. 132 (S. 5) die Gruppe der Differentialgleichung (A).

Bilden wir uns nunmehr die empfindliche Function

$$u = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_n y_n$$

mit unbestimmten $A_1, A_2, \cdots A_n$, so ist dieselbe eine algebraische Function von x, d. h. sie genügt einer gewissen irreductiblen algebraischen Gleichung

(45) $$\Theta(u) = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von x und den $A_1, A_2, \cdots A_n$ sind. Diese algebraische Gleichung ist in unserem Falle die in der Nr. 149 (S. 65) definirte Differentialgleichung niedrigster Ordnung (21), die für die Bestimmung der Transformationsgruppe von (A) massgebend ist. Da (45) als irreductibel vorausgesetzt ist, so gehen zufolge des Puiseux'schen Fundamentalsatzes der Theorie der algebraischen Functionen alle Lösungen dieser Gleichung aus einer derselben, also etwa aus u, durch die Umläufe der unabhängigen Variabeln x hervor. Wir erhalten demnach diese Lösungen aus u, indem wir die $y_1, y_2, \cdots y_n$ durch die aus denselben mittelst der Substitutionen der Gruppe der

Differentialgleichung (A) hervorgehenden Grössen ersetzen. Die verschiedenen Lösungen der Differentialgleichung (21), also in uns Falle der Gleichung (45), entsprechenden Fundamentalsysteme aber mit den $y_1, y_2, \cdots y_n$ durch die Operationen der Transformat gruppe der Differentialgleichung (A) verknüpft.

Wir schliessen hieraus, dass für eine algebraisch i grirbare lineare Differentialgleichung mit in x ration Coefficienten die Transformationsgruppe mit der Gruppe Differentialgleichung zusammenfällt.

In diesem Falle ist also die Transformationsgruppe der Differe gleichung eine endliche, d. h. sie besteht nur aus einer endli Anzahl von Operationen, ist also jedenfalls abzählbar (vergl. Nr. S. 11). Es ist dies aber zugleich der einzige Fall, wo die T formationsgruppe einer linearen Differentialgleichung eine abzäh Gruppe ist.

In der That besteht im Allgemeinen die Transformationsgrup einer linearen Differentialgleichung aus einer endlichen discreten zahl ν von continuirlichen Transformationsschaaren (Nr. 150, S. die aus einer dieser Schaaren (nämlich aus derjenigen, welche die fassendste in G enthaltene und von infinitesimalen Transformati erzeugte continuirliche Untergruppe Γ darstellt) durch Zusammenset mit ν bestimmten Transformationen, unter denen sich auch die tische Transformation befindet, hervorgehen (Nr. 153, S. 79). V diese continuirliche Untergruppe Γ eine r-gliedrige Gruppe und r Null verschieden ist, so enthält Γ und somit G jedenfalls eine tinuirliche Schaar von Transformationen, da ja die Definitionsgleichu von Γ r stetig veränderliche Parameter in sich schliessen. G also (vergl. Nr. 140, S. 38) dann und nur dann eine abzählbare Gr sein, wenn die Anzahl dieser Parameter, d. h. r gleich Null ist; reducirt sich Γ auf die identische Transformation und G besteht ν Transformationen, ist also eine endliche Gruppe.

Gleichwohl bleibt auch in diesem Falle der Gruppe G ihr rakter als algebraische Untergruppe von L gewahrt.

Um das einzusehen, brauchen wir nur auf die ursprüngliche finition einer algebraischen Gruppe zurückzugehen, wie sie sich ir Nr. 136 (S. 21) aus der Betrachtung einer rationalen Differentialfun ergab. Der Charakter einer algebraischen Untergruppe von L be nämlich darin, dass zwischen den n^2 Coefficienten der allgem homogenen linearen Substitution eine gewisse Anzahl von algebrais Beziehungen gesetzt wurde, die ein Gebilde in der n^2-fachen Ma faltigkeit dieser Coefficienten bestimmten. Wenn dieses Gebilde

von nn^{ter} Stufe ist, so liefern jene algebraischen Beziehungen eine endliche Anzahl discreter Werthesysteme der n^2 Substitutionscoefficienten, so dass wir also eine endliche Gruppe erhalten.

Wenn die Transformationsgruppe G einer linearen Differentialgleichung mit in x rationalen (oder allgemeiner mit in x algebraischen) Coefficienten eine endliche ist, so ist die Differentialgleichung aber offenbar algebraisch integrirbar. Denn bilden wir aus den Elementen des Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdots y_n$ und aus den daraus durch die sämmtlichen Transformationen von G, deren Anzahl etwa gleich ν sein möge, hervorgehenden Integralen eine symmetrische Function, so ist diese eine ganze, rationale Function der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die bei den Transformationen der Transformationsgruppe ungeändert bleibt, also rational (beziehungsweise algebraisch) in x ausdrückbar. Jene $n\nu$ Integrale genügen also einer algebraischen Gleichung mit in x rationalen (beziehungsweise algebraischen) Coefficienten.

159. Beziehungen zwischen der Transformationsgruppe und der Gruppe einer linearen Differentialgleichung. Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe.

Wir hatten erkannt, dass im Falle einer algebraisch integrirbaren Differentialgleichung die Transformationsgruppe mit der Gruppe der Differentialgleichung zusammenfällt. Hieran schliesst sich naturgemäss die Frage, welche Beziehung im allgemeinen Falle zwischen der zu einer Differentialgleichung (A) mit rationalen Coefficienten gehörigen Transformationsgruppe G und der Gruppe g dieser Differentialgleichung besteht.

Um uns darüber zu orientiren, betrachten wir wieder eine empfindliche Function, also etwa

$$u = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_n y_n,$$

und die Differentialgleichung niedrigster Ordnung (21), der dieselbe genügt. Lassen wir die unabhängige Variable x einen beliebigen Umlauf vollziehen, so erleiden die $[y_i]$ eine Substitution der Gruppe g der Differentialgleichung und u verwandelt sich in eine andere Lösung u_i der Picard'schen Resolvente (19). Nach einem allgemeinen functionentheoretischen Principe muss aber, wenn eine Function u einer algebraischen Differentialgleichung genügt, auch jeder Zweig dieser Function, der durch analytische Fortsetzung aus u hervorgeht, dieselbe Differentialgleichung erfüllen, also ist u_i jedenfalls auch eine Lösung von (21). Die den verschiedenen Lösungen von (21) entsprechenden

Fundamentalsysteme von (A) sind aber mit $[y_i]$ genau durch die Transformationen von G verknüpft, also muss jede Transformation von g in G enthalten sein, d. h. die Gruppe g von (A) ist eine Untergruppe von G.

Sei nun $\overline{G}$ irgend eine algebraische Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe L, welche die abzählbare Gruppe g als Untergruppe enthält. Denken wir uns eine (rationale) Differentialfunction $\overline{R}(y)$ der $y_1, y_2, \cdots y_n$ bestimmt, die bei den Transformationen von $\overline{G}$ als Function von x ungeändert bleibt, dann bleibt dieselbe, da g in $\overline{G}$ enthalten ist, bei allen Umläufen von x ungeändert, ist also eine eindeutige Function von x. Dieselbe kann aber im Allgemeinen noch Unbestimmtheitsstellen besitzen, d. h. also eine transcendente Function von x sein. Dies ist offenbar dann und nur dann möglich, wenn eine oder mehrere der wesentlichen singulären Stellen der Differentialgleichung (A) Unbestimmtheitsstellen ihrer Integrale sind. Wenn dagegen (A) keine derartigen singulären Stellen besitzt, d. h. wenn die gegebene Differentialgleichung zur Fuchs'schen Classe gehört, so können wir leicht zeigen, dass jede rationale Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die gleich einer eindeutigen Function von x ist nothwendig eine rationale Function von x sein muss.

Jede Lösung y_i einer Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe ist nämlich in der Umgebung irgend einer Stelle $x = x_0$ in der Form

$$y_i = (x - x_0)^{\varrho} \{ \varphi_0(x) + \log(x - x_0)\varphi_1(x) + \cdots + \varphi_\nu(x)[\log(x - x_0)]^\nu \}$$

darstellbar, wo ϱ eine Constante, $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots \varphi_\nu(x)$ nach positiven ganzen Potenzen von $x - x_0$ fortschreitende Reihen bedeuten. Für $x = \infty$ ist an die Stelle von $x - x_0$ einfach $\frac{1}{x}$ zu setzen.

Setzen wir diese Ausdrücke und die sich aus denselben für die Ableitungen der y_i ergebenden in den Algorithmus einer rationalen Differentialfunction $R(y)$ ein, so ergiebt sich für $\overline{R}(y)$ eine in einer gewissen Umgebung von $x = x_0$ gültige Entwickelung von derselben Form. Soll nun $R(y)$ gleich einer eindeutigen Function sein, so müssen in der Entwickelung dieser Function in der Umgebung jeder Stelle $x = x_0$ zunächst die Logarithmen wegfallen, und ferner können auch nur Potenzen von $x - x_0$ mit ganzzahligen Exponenten auftreten. Es kann folglich $\overline{R}(y)$ an einer Stelle, in deren Umgebung sich diese Function nicht regulär verhält, nur von einer endlichen ganzzahligen Ordnung unendlich werden, also ist $\overline{R}(y)$ in der That eine rationale Function von x.

Hieraus folgt nun, mit Rücksicht auf den Picard-Vessiot'schen Doppelsatz, dass $\overline{R}(y)$ bei den Transformationen der Transformationsgruppe G unserer Differentialgleichung ungeändert bleiben muss, es ist also G nothwendig als Untergruppe in der Gruppe $\overline{G}$ enthalten. In diesem Falle ist also G in jeder algebraischen Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe L, die g zur Untergruppe hat, als Untergruppe enthalten, d. h. wir haben den Satz:

Wenn die Differentialgleichung (A) der Fuchs'schen Classe angehört, so ist ihre Transformationsgruppe die engste algebraische Gruppe linearer homogener Transformationen, die die Gruppe der Differentialgleichung als Untergruppe in sich schliesst.

Dass dieser Satz für Differentialgleichungen, die nicht der Fuchsschen Classe angehören, nicht immer gültig ist, kann man leicht an dem Beispiele der linearen Differentialgleichung mit constanten Coefficienten bewahrheiten.

Sei nämlich

$$y^{(n)} + c_1 y^{(n-1)} + \cdots + c_n y = 0$$

eine solche Differentialgleichung und setzen wir der Einfachheit wegen voraus, dass die charakteristische Gleichung (Nr. 69, Bd. I, S. 245)

$$\varphi(\varrho) = \varrho^n + c_1 \varrho^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

die n von einander verschiedenen Wurzeln $r_1, r_2, \cdots r_n$ habe, so sind (vergl. a. a. O.) die n Fundamentalintegrale

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}, \quad \cdots \quad y_n = e^{r_n x}$$

eindeutige Functionen von x. Die Gruppe g der Differentialgleichung besteht demnach allein aus der identischen Substitution und kann folglich selbst als eine algebraische Untergruppe $\overline{G}$ der allgemeinen linearen Gruppe L angesehen werden. Dagegen ist die Transformationsgruppe G z. B. durch die rationale Differentialfunction

$$\frac{1}{y_1} \frac{dy_1}{dx} = r_1$$

bestimmt, die offenbar dem Rationalitätsbereiche angehört. Man übersieht leicht, dass G die n-gliedrige aus den infinitesimalen Transformationen

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad \cdots \quad y_n \frac{\partial f}{\partial y_n}$$

erzeugte Gruppe ist; dieselbe bietet zugleich ein Beispiel einer integrablen Gruppe dar.

160. Satz über die Monodromiegruppe. Anwendung auf den Fall der algebraischen Integrabilität und auf die Frage der Reductibilität. Reductibilität der Monodromiegruppe.

Aus dem in der vorigen Nummer bewiesenen Satze können wir einige wichtige Folgerungen ziehen.

Die Gruppe g der Differentialgleichung (A) hat mit der zu dieser Gleichung gehörigen Transformationsgruppe G, da sie in derselben als Untergruppe enthalten ist, die Eigenschaft gemein, dass jede rationale Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die gleich einer rationalen Function von x ist, bei den Transformationen der Gruppe g ungeändert bleibt. Dagegen gilt für g im Allgemeinen die erste Aussage des Picard-Vessiot'schen Doppelsatzes nicht, denn von einer rationalen Differentialfunction, die bei den Transformationen von g ungeändert bleibt, kann man nur behaupten, dass sie eine eindeutige Function von x sei.

Dann und nur dann, wenn die Differentialgleichung (A) der Fuchs'schen Classe angehört, bleibt der Picard-Vessiot'sche Doppelsatz in vollem Umfange richtig, wenn man darin an die Stelle der Transformationsgruppe G die abzählbare Untergruppe g derselben treten lässt.

Diese Bemerkung rechtfertigt eine von Herrn F. Klein vorgeschlagene Benennung für die beiden Gruppen G und g, zufolge deren die Transformationsgruppe G als die Rationalitätsgruppe, die abzählbare Gruppe g als Monodromie- oder Eindeutigkeitsgruppe bezeichnet werden soll. Wir werden im Folgenden von dieser Bezeichnung in der Regel Gebrauch machen.

Die Endlichkeit der Monodromiegruppe g, die als nothwendig für die algebraische Integrirbarkeit einer linearen Differentialgleichung erkannt worden war, ist im Allgemeinen hierfür nicht hinreichend, wie schon die Thatsache lehrt, dass es lineare Differentialgleichungen giebt, deren allgemeines Integral eine transcendente eindeutige Function ist. Soll das allgemeine Integral einer gegebenen linearen Differentialgleichung eine algebraische Function sein, so muss die Differentialgleichung offenbar zur Fuchs'schen Classe gehören; ferner ist nothwendig, dass die zu den singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen lauter rationale Wurzeln besitzen und dass in den Entwickelungen der canonischen Fundamentalsysteme keine Logarithmen auftreten. Allein auch diese nothwendigen Bedingungen sind nicht hinreichend.

Nothwendig und hinreichend dafür, dass eine lineare Differentialgleichung durch algebraische Functionen integrirt werden könne, ist, dass die Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe angehört und dass ihre Monodromiegruppe eine endliche ist.

Denn aus der Endlichkeit der Monodromiegruppe folgt zunächst, dass das allgemeine Integral einer gewöhnlichen algebraischen Gleichung mit in x eindeutigen Coefficienten genügen muss, und daraus, dass die Differentialgleichung zur Fuchs'schen Classe gehört, ergiebt sich ferner, dass die die Coefficienten darstellenden eindeutigen Functionen keine Unbestimmtheitsstellen haben können, also rationale Functionen von x sind.

Um weitere Anwendungen der zwischen den beiden Gruppen G und g gefundenen Beziehungen geben zu können, greifen wir auf den Begriff der Irreductibilität einer linearen Differentialgleichung zurück, wie wir ihn im Anschlusse an Herrn Frobenius in den Nummern 27—29 erörtert hatten. Es wurden daselbst vorzüglich lineare Differentialgleichungen betrachtet, deren Coefficienten innerhalb eines gewissen Bereiches E eindeutige Functionen sind, und eine solche Differentialgleichung

$$\text{(I)} \qquad P(y) = y^{(n)} + \varphi_1 y^{(n-1)} + \cdots + \varphi_n y = 0$$

hiess reductibel, wenn sie mit einer linearen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung

$$\text{(II)} \qquad Q(y) = y^{(m)} + \psi_1 y^{(m-1)} + \cdots + \psi_m y = 0, \quad (m < n),$$

und vom selben Charakter (d. h. deren Coefficienten auch innerhalb E eindeutig sind) Integrale gemein hatte. Es gab dann stets mindestens eine irreductible Differentialgleichung (Nr. 27, Bd. I, S. 85)

$$\text{(III)} \qquad R(y) = y^{(\nu)} + \chi_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + \chi_\nu y = 0, \quad (\nu < n),$$

vom selben Charakter, deren sämmtliche Lösungen die Differentialgleichung (I) befriedigen.

Sei $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem von (I), $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_\nu$ ein solches von (III); dann lassen sich also $n\nu$ Constanten $c_{i\varkappa}$ bestimmen, für welche die Gleichungen

$$\text{(IV)} \qquad \eta_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} c_{i\varkappa} y_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \cdots \nu)$$

erfüllt sind und die ein rechteckiges System vom Range ν bilden (vergl. Nr. 34). Denken wir uns den Bereich E so gewählt, dass innerhalb desselben kein singulärer Punkt der Differentialgleichung (I)

liege, und dass er von endlichem, etwa λ-fachem Zusammenhange sei. Zerschneiden wir E durch $(\lambda - 1)$ geeignet gewählte Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_{\lambda-1}$ in einen einfach zusammenhängenden Bereich $\overline{E}$, so erleiden die innerhalb E durch ihre Anfangswerthe eindeutig determinirten Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ allemal, wenn die unabhängige Variable x einen oder mehrere dieser Querschnitte überschreitet, eine lineare Substitution, und die Gesammtheit dieser Substitutionen bildet offenbar eine Gruppe h, die wir als die Gruppe der Differentialgleichung (I) in Bezug auf den Bereich E bezeichnen wollen.

Die Ausdrücke (IV) können, wenn x die Querschnitte von E überschreitet, d. h. wenn auf die $y_1, y_2, \cdots y_n$ die Substitutionen von h ausgeübt werden, offenbar nur in lineare homogene Functionen ihrer selbst übergehen, da sie zufolge der gemachten Voraussetzung ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (III) constituiren. Und umgekehrt, wenn sich $n\nu$ Constanten $c_{i\varkappa}$, die ein rechteckiges System vom Range ν bilden, so angeben lassen, dass die mit denselben gebildeten Ausdrücke (IV) sich nur in lineare homogene Functionen ihrer selbst verwandeln, falls man auf die $y_1, y_2, \cdots y_n$ irgend eine Substitution der Gruppe h ausübt, so sind die Coefficienten der linearen Differentialgleichung

$$(-1)^n \frac{D(y, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n)}{D(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n)} = 0$$

innerhalb E eindeutige Functionen von x, und die Differentialgleichung (I) ist demnach reductibel. Wir erhalten also den Satz:

Damit eine lineare Differentialgleichung (I) mit innerhalb E eindeutigen Coefficienten (in Bezug auf diesen Bereich) reductibel sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die Gruppe h derselben in Bezug auf E die folgende Beschaffenheit besitzt: es lassen sich $\nu < n$ linear unabhängige homogene lineare Combinationen der Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ mit von x unabhängigen Coefficienten angeben, die sich in homogene lineare Functionen ihrer selbst verwandeln, wenn man auf die $y_1, y_2, \cdots y_n$ die Substitutionen der Gruppe h ausübt.

Wir drücken diese Beschaffenheit einer Gruppe h kurz so aus, dass wir sagen, h sei reductibel auf eine Gruppe in ν Variabeln.

Betrachten wir nun die Differentialgleichung (A) mit rationalen Coefficienten. Wenn wir als Bereich E einen zweifach zusammenhängenden Theil des Bereiches T wählen, der aus der x-Ebene durch Aussonderung der wesentlichen singulären Stellen der Differentialgleichung hervorgeht, so besteht die Gruppe von (A) in Bezug au

diesen so gewählten Bereich E einfach aus den sämmtlichen Potenzen einer einzigen Substitution. Von dieser Gruppe — so können wir uns jetzt ausdrücken — haben wir im dritten Abschnitte bewiesen, dass sie stets reductibel ist.

Nehmen wir nun als Bereich E die Fläche T selbst, dann ist die sich auf diesen Bereich beziehende Gruppe nichts anderes wie die Monodromiegruppe g der Differentialgleichung (A). Wenn nun diese Gruppe reductibel ist, so ist die Differentialgleichung (A) auch reductibel in dem Sinne, dass sie mit einer linearen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung, deren Coefficienten innerhalb T eindeutig sind, Integrale gemein hat.

Im Sinne der Erörterungen der Nr. 27 wird es aber naturgemäss scheinen, eine Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten nur dann als schlechthin reductibel zu bezeichnen, wenn sie mit einer linearen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung mit ebenfalls rationalen Coefficienten Lösungen gemein hat. Für diese Art der Reductibilität ist die Reductibilität der Monodromiegruppe g offenbar auch nothwendig, jedoch im Allgemeinen nicht hinreichend. Um eine auch hierfür nothwendige und hinreichende Bedingung zu finden, müssen wir an Stelle der Monodromiegruppe die Transformations- oder Rationalitätsgruppe G in Betracht ziehen.

161. Reductibilität der Transformationsgruppe. Fuchs'sche Classe.

Zunächst folgt aus dem allgemeinen Satze der Nr. 27 (Bd. I, S. 85, oben), dass die Differentialgleichung (A), falls sie in dem soeben angegebenen Sinne reductibel ist, durch die sämmtlichen Lösungen einer gewissen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung

$$(1)\qquad L(y) = y^{(\nu)} + f_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + f_\nu y = 0, \quad (\nu < n),$$

deren Coefficienten $f_1, f_2, \cdots f_\nu$ rationale Functionen von x sind, befriedigt werden muss. Sei $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_\nu$ ein Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung, so ist auch wieder

$$(2)\qquad \mathfrak{y}_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} \gamma_{i\varkappa} y_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \cdots \nu),$$

und die Constanten $\gamma_{i\varkappa}$ bilden ein rechteckiges System vom Range ν.

Da nun

$$(3)\qquad f_\varkappa = (-1)^\nu \frac{D_\varkappa(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_\nu)}{D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_\nu)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu)$$

ist, so sind die Coefficienten von (1) rationale Differentialfunctionen

der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die zugleich rationale Functionen von x sind; bleiben also zufolge des Picard-Vessiot'schen Doppelsatzes bei Transformationen von G ungeändert. Möge nun durch irgend Transformation von G die Function $\mathfrak{y}_i$ übergehen in $\bar{\mathfrak{y}}_i$, dann verw delt sich also die linke Seite der identischen Gleichung

$$\mathfrak{y}_i^{(\nu)} + f_1 \mathfrak{y}_i^{(\nu-1)} + \cdots + f_\nu \mathfrak{y}_i = 0$$

durch Ausübung dieser Transformation in

$$\bar{\mathfrak{y}}_i^{(\nu)} + f_1 \bar{\mathfrak{y}}_i^{(\nu-1)} + \cdots + f_\nu \bar{\mathfrak{y}}_i,$$

und dieser Ausdruck muss auch identisch verschwinden, da (ve Nr. 152, S. 77) eine Beziehung zwischen den $y_1, y_2, \cdots y_n$ und ih Ableitungen mit Coefficienten, die dem Rationalitätsbereiche angehö bei Ausübung einer Transformation der Gruppe G erhalten ble Also ist auch $\bar{\mathfrak{y}}_i$ eine Lösung von (1), d. h. die linearen Combinatio (2) der $y_1, y_2, \cdots y_n$ verwandeln sich in lineare homogene Functio ihrer selbst, wenn auf die $y_1, y_2, \cdots y_n$ irgend eine Transformat von G ausgeübt wird, oder mit anderen Worten, die Gruppe G reductibel auf eine Gruppe von ν Variabeln.

Nehmen wir nun umgekehrt an, die Transformationsgruppe G Differentialgleichung besitze diese Eigenschaft; dann lassen sich $n\nu$ Constanten $\gamma_{i\varkappa}$ so bestimmen, dass die mit Hülfe derselben ge deten ν Ausdrücke (2) linear unabhängig und überdies so bescha sind, dass sie sich in lineare homogene Functionen ihrer selbst wandeln, wenn die $y_1, y_2, \cdots y_n$ eine Transformation von G erfah Da die Ausdrücke (3) die Eigenschaft haben, bei jeder linearen Tra formation der $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_\nu$ ungeändert zu bleiben, so sind diese De minantenquotienten rationale Differentialfunctionen der $y_1, y_2, \cdots$ die sich bei den Transformationen von G nicht ändern, sie sind rationale Functionen von x, d. h. die Ausdrücke (2) bilden ein Fun mentalsystem der linearen Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung

$$L(y) = (-1)^\nu \frac{D(y, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_\nu)}{D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_\nu)} = 0$$

mit in x rationalen Coefficienten. Wir haben also den Satz:

Eine lineare Differentialgleichung (A) mit in x rat nalen Coefficienten ist dann und nur dann reductibel in d Sinne, dass sie mit einer linearen Differentialgleichung v niedrigerer Ordnung mit ebenfalls rationalen Coefficient Lösungen gemein hat, wenn ihre Transformationsgruppe reductibel ist.

Wenn die vorgelegte Differentialgleichung (A) der Fuchs'schen Classe angehört und man weiss, dass ihre Monodromiegruppe g reductibel ist, so folgt daraus allein schon, dass die Differentialgleichung in dem jetzt betrachteten Sinne reductibel sein muss. In der That, mögen die linearen Combinationen (2) die Eigenschaft haben, linear unabhängig zu sein und in lineare homogene Functionen ihrer selbst überzugehen, wenn die $y_1, y_2, \cdots y_n$ eine Substitution der Gruppe g erfahren; dann sind die Determinantenquotienten (3) nicht nur eindeutig, sondern, weil die y_i keine Unbestimmtheitsstellen besitzen sollten, auch rational in x; d. h.:

Wenn die vorgelegte Differentialgleichung der Fuchsschen Classe angehört, so ist für ihre Reductibilität in dem jetzt festgehaltenen Sinne schon die Reductibilität der Monodromiegruppe nothwendig und hinreichend.

Wir bemerken gleich hier, dass die Zweckmässigkeit des auf die Reductibilität der Transformationsgruppe gegründeten Begriffes der Reductibilität einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten unter anderem auch daraus erhellt, dass, wie wir an späterer Stelle (im vierten Kapitel des folgenden Abschnittes) zeigen werden, für eine vorgelegte Differentialgleichung stets durch Ausführung algebraischer Operationen entschieden werden kann, ob dieselbe in diesem Sinne reductibel ist, oder nicht. Wenn im Folgenden von Reductibilität einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten schlechthin die Rede ist, so wollen wir stets diese Art der Reductibilität darunter verstehen.

Zehnter Abschnitt.

Specielle Probleme der Gruppentheorie. Invarianten.

Erstes Kapitel.

162. Riemann's Problemstellung. Existenzbeweise.

Die vorhergehenden Betrachtungen haben uns gezeigt, dass ◂ Monodromiegruppe g nur für die Differentialgleichungen der Fuc k schen Classe im Stande ist, die Transformationsgruppe G bei den ɛ die Reductibilität bezüglichen Fragen zu ersetzen. Dagegen führt ◂ Untersuchung der Eigenschaften der Monodromiegruppe einer Dif rentialgleichung auf Probleme, die weit tiefer in die Natur der Int grale eindringen, als es bei den auf die Betrachtung der Transform tionsgruppe gegründeten Aufgaben der Fall ist. Es liegt das eben dara dass die Monodromiegruppe eine Untergruppe der Transformationsgrupp ist, und dass Differentialgleichungen, deren Transformationsgruppe übereinstimmen, verschiedene Monodromiegruppen haben können.

Während die Structur der Transformationsgruppe diejenigen Fäll erkennen lässt, in denen sich die Integration einer vorgelegten Diffe rentialgleichung auf die Integration einfacherer Differentialgleichunge zurückführen lässt, liefert die Monodromiegruppe ein vollständiges Bil von der Verzweigungsart eines Fundamentalsystems und leistet dadurc für die lineare Differentialgleichung dasselbe, wie die Riemann'sch Fläche für eine algebraische Gleichung mit rationalen Coefficienten.

Wenn man also im Sinne der von Riemann in die Analysis ein geführten Principien eine Function durch ihre singulären Stellen un die Art, wie sie sich in der Umgebung dieser Stellen verhält, bestim men will, so wird man für die Integrale einer linearen Differential gleichung von der Monodromiegruppe derselben ausgehen müssen. I der That hat Riemann diesen Ausgangspunkt für seine Theorie de durch die Gauss'sche Differentialgleichung (Nr. 70, Bd. I, S. 252 definirten Function gewählt und hat auch (vergl. Nr. 130) den Versuc gemacht, in analoger Weise, wie es ihm für diese Function gelunge

war, die Theorie der allgemeinen linearen Differentialgleichungen genügenden Functionen zu begründen. Leider lässt sich aber die Riemann'sche Methode, die in der Theorie der algebraischen Functionen zu so glänzenden Ergebnissen geführt hat, mit den der Analysis gegenwärtig zu Gebote stehenden Hülfsmitteln für die Theorie der linearen Differentialgleichungen nicht unmittelbar nutzbar machen. Der Grund hierfür liegt in der Schwierigkeit der sogenannten Existenzbeweise.

Schon in der Theorie der algebraischen Functionen und deren Integralen bietet es bedeutende Schwierigkeiten dar, zu beweisen, dass zu einer gegebenen Riemann'schen Fläche stets algebraische Functionen gehören, die auf derselben eindeutig sind. Riemann begegnet diesen Schwierigkeiten in seinen Arbeiten, indem er sich bei Führung des fraglichen Nachweises der Existenz eines Princips bedient, welches Dirichlet bei Fragen der Potentialtheorie angewandt hat, das aber, wie Herr Weierstrass bemerkte, nicht ganz einwandfrei ist. Erst die Arbeiten der Herren Carl Neumann und H. A. Schwarz (vergl. Nr. 212) haben eine auf anderen Principien beruhende Begründung für die Riemann'schen Existenztheoreme und damit den Riemann'schen Arbeiten eine neue Grundlage gegeben.

Aber noch ungleich grösser scheinen die Schwierigkeiten zu sein, die sich bei den analogen Aufgaben der Theorie der linearen Differentialgleichungen darbieten. Hier würde es sich darum handeln, wenn eine gewisse abzählbare homogene lineare Gruppe g in n Variabeln etwa dadurch gegeben ist, dass man eine Basis (Nr. 132, S. 6) derselben kennt, ein System von n Functionen der unabhängigen Variabeln x zu finden, welches einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten genügt, deren Monodromiegruppe die gegebene Gruppe ist.

In der nachgelassenen Notiz „Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten" behandelt Riemann sogar eine noch viel speciellere Aufgabe. Er geht von gewissen linearen Substitutionen

$$A, \; B, \cdots G$$

aus und verlangt Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$, die in der ganzen Ebene mit Ausnahme gewisser Punkte

$$x = a, \;\; b, \cdots g$$

eindeutig und endlich sind, die durch einfache Umläufe von x um diese Punkte die gegebenen linearen Substitutionen erleiden und die überdies nirgends „von unendlich hoher Ordnung unendlich werden", d. h. in unserer modernen Terminologie überall bestimmt sind.

Wenn solche Functionen existiren, so genügen sie offenbar der linearen homogenen Differentialgleichung

$$(-1)^n \frac{D(y, y_1, y_2, \cdots y_n)}{D(y_1, y_2, \cdots y_n)} = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von x sind und die der Fuchs'schen Classe angehört. Es handelt sich aber darum, die Existenz solcher Functionen nachzuweisen, und das ist eine Aufgabe, die ohne Zuhülfenahme der Theorie der linearen Differentialgleichungen bis jetzt nur in ganz vereinzelten speciellen Fällen gelöst worden ist. Wir werden an späterer Stelle den fraglichen Existenzbeweis für gewisse besonders charakterisirte Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Benutzung des Schwarz-Neumann'schen Verfahrens liefern und noch weiterhin zu zeigen versuchen, in wie weit die Theorie der von Herrn Poincaré eingeführten „Fonctions-Z-Fuchsiennes" im Stande ist, zu einer Lösung jener Aufgaben im allgemeinen Falle zu führen. Jedenfalls können wir an dieser Stelle nicht den Standpunkt Riemann's einnehmen. Dagegen werden wir der erwähnten nachgelassenen Aufzeichnung Riemann's einen Begriff entlehnen, der für unsere Theorie von der grössten Bedeutung ist, und den wir zunächst in einer etwas allgemeineren Fassung, als er bei Riemann auftritt, entwickeln wollen.

163. Differentialgleichungen mit denselben Verzweigungspunkten und denselben Fundamentalsubstitutionen. Cogrediente Functionssysteme und Differentialgleichungen. Beziehungen zwischen solchen.

Für die Fragen der Theorie der Abel'schen Functionen kommen, wie Riemann erkannt hat, hauptsächlich diejenigen Eigenschaften einer algebraischen Function in Betracht, die erhalten bleiben, wenn man auf die jene algebraische Function definirende irreductible Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

eine eindeutig umkehrbare rationale Transformation

$$x = \varphi(\xi, \eta),$$
$$y = \psi(\xi, \eta)$$

anwendet, d. h. eine Transformation, aus welcher sich auch umgekehrt

$$\xi = f(x, y),$$
$$\eta = g(x, y)$$

ergiebt, wo f, g ebenso wie φ, ψ rationale Functionen ihrer Argumente bedeuten. Um diese Eigenschaften von einer gegebenen algebraischen Gleichung abstrahiren zu können, ist es daher erforderlich, die Gesammtheit derjenigen (irreductiblen) Gleichungen zu betrachten, die

durch solche eindeutig umkehrbare rationale Transformationen in einander übergeführt werden können, und Riemann fasst darum diese Gesammtheit in den Begriff einer Classe von Gleichungen zusammen. Hält man insbesondere die unabhängige Variable fest, so liefern die Gleichungen einer Classe ein System gleichverzweigter algebraischer Functionen, d. h. ein System von Functionen, die auf derselben Riemann'schen Fläche eindeutig sind.

Das Analoge für die linearen Differentialgleichungen würde darin bestehen, dass man die Gesammtheit derjenigen linearen Differentialgleichungen in's Auge fasste, die dieselbe Monodromiegruppe haben, wobei von vorneherein sowohl die abhängige wie die unabhängige Variable in den verschiedenen Differentialgleichungen verschieden zu denken wären. Nun kann man aber leicht einsehen (vergl. hierfür eine Arbeit des Herrn Staeckel, Crelle's Journal Bd. 111, S. 290ff.), dass eine lineare homogene Differentialgleichung

$$(A) \qquad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0$$

im Allgemeinen nur dann durch Einführung einer neuen unabhängigen Variabeln

$$\xi = f(x, y)$$

in eine ebenfalls lineare homogene Differentialgleichung übergeht, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

d. h. also, wenn ξ eine blosse Function von x ist. Die Transformation der unabhängigen Variabeln ist demnach von der der abhängigen ganz unabhängig, so dass wir die Frage auf die nach linearen Differentialgleichungen mit derselben unabhängigen Variabeln und derselben Monodromiegruppe einschränken können. Riemann fasst die Aufgabe im Anschlusse an seinen in der vorigen Nummer skizzirten Ausgangspunkt noch enger, indem er (in unserer Ausdrucksweise) nach denjenigen Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe frägt, welche dieselben wesentlichen singulären Punkte besitzen und für die sich Fundamentalsysteme angeben lassen, die bei Umläufen um irgend einen der singulären Punkte dieselben Fundamentalsubstitutionen erleiden.

Wenn wir nur die Integrale einer linearen Differentialgleichung an sich untersuchen, so kommen die ausserwesentlich singulären Stellen nicht weiter in Betracht, da sich in der Umgebung derselben die Integrale regulär verhalten; fragen wir nur nach der Monodromiegruppe, so können wir auch diejenigen wesentlichen singulären Punkte bei Seite lassen, in deren Umgebung die Integrale sich eindeutig verhalten,

und uns auf die Betrachtung der wirklichen Verzweigungspunk beschränken. Wir wollen daher vorerst Differentialgleichungen unt suchen, deren Integrale dieselben Verzweigungspunkte und bei geeigne Wahl der Fundamentalsysteme auch dieselben Fundamentalsubstitution besitzen.

Gehen wir von einer Differentialgleichung

$$(1) \qquad A(y) = y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + A_0 y = 0$$

aus, deren Coefficienten innerhalb eines Bereiches E, den wir der Ei fachheit wegen als einfach zusammenhängend wählen, eindeutig u nur an den Stellen

$$a_1, \; a_2, \cdots a_s, \; a_{s+1}, \cdots$$

nicht regulär sein mögen. Seien die singulären Punkte

$$a_1, \; a_2, \cdots a_s$$

wirkliche Verzweigungspunkte der Integrale, während die übrigen

$$a_{s+1}, \; a_{s+2}, \cdots$$

diejenigen Stellen sein mögen, die entweder ausserwesentlich singul oder doch so beschaffen sind, dass sich das allgemeine Integral von (1 in der Umgebung derselben eindeutig verhält. Sondern wir aus die Stellen $a_1, a_2, \cdots a_s$ aus und zerschneiden die so entstehend $(s + 1)$-fach zusammenhängende Fläche E durch die Querschnitte

$$l_1, \; l_2, \cdots l_s$$

in eine einfach zusammenhängende $\bar{E}$, so erleidet ein Fundamental system $y_1, y_2, \cdots y_n$ von (1), wenn x den Querschnitt l_x überschreite eine lineare Substitution L_x, und wenn wir voraussetzen, dass die Inte grale von (1) innerhalb $\bar{E}$ eindeutig sind, so besteht zwischen den Fundamentalsubstitutionen $L_1, L_2, \cdots L_s$ die Beziehung

$$(2) \qquad L_1 L_2 \cdots L_s = 1.$$

Diese Substitutionen bilden dann eine Basis der zum Bereiche E ge hörigen Monodromiegruppe h der Differentialgleichung (1).

Wir betrachten nun ein Functionssystem $z_1, z_2, \cdots z_n$, welche innerhalb $\bar{E}$ eindeutig und so beschaffen ist, dass es beim Uebe schreiten der Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_s$ dieselben Substitutionen erfähr wie das Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$.

Im Anschlusse an eine in der Invariantentheorie der algebraische Formen übliche Bezeichnung sagen wir von dem Functionssystem $[z_x]$, es sei mit $[y_x]$ cogredient innerhalb E. Das System de

Ableitungen beliebig hoher Ordnung der $[y_\varkappa]$ bietet ein Beispiel für ein solches mit $[y_\varkappa]$ innerhalb E cogredientes Functionssystem dar.

Setzen wir

$$(3)\qquad z_\varkappa = B_0 y_\varkappa + B_1 y_\varkappa' + \cdots + B_{n-1} y_\varkappa^{(n-1)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

so lassen sich aus diesen Gleichungen die $B_0, B_1, \cdots B_{n-1}$ berechnen, da die Determinante $D(y_1, y_2, \cdots y_n)$ nicht identisch verschwindet, und wir finden

$$(4)\qquad B_\varkappa = \frac{\Delta_\varkappa}{D(y_1, y_2, \cdots y_n)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n-1),$$

wenn wir mit $\Delta_\varkappa$ die Determinante bezeichnen, welche aus

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n)$$

dadurch hervorgeht, dass man die Elemente der $(\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Verticalreihe durch $z_1, z_2, \cdots z_n$ ersetzt.

Da die $z_1, z_2, \cdots z_n$ bei jedem geschlossenen Wege, den x innerhalb E vollzieht, dieselbe Substitution erfahren wie die $y_1, y_2, \cdots y_n$ und deren Ableitungen, so multipliciren sich Zähler und Nenner der Ausdrücke (4) bei jedem solchen Umlaufe mit der Determinante der correspondirenden Substitution von h, die Ausdrücke bleiben folglich ungeändert, d. h.:

Die Coefficienten $B_0, B_1, \cdots B_{n-1}$ sind innerhalb E eindeutige Functionen von x.

Wenn umgekehrt ein Functionssystem $z_1, z_2, \cdots z_n$ mit den $y_1, y_2, \cdots y_n$ durch Gleichungen von der Form (3) verknüpft ist, worin die $B_0, B_1, \cdots B_{n-1}$ innerhalb E eindeutige Functionen sind, so erfährt offenbar das Functionssystem $z_1, z_2, \cdots z_n$ bei jedem geschlossenen Wege, den x innerhalb E zurücklegt, dieselbe Substitution wie das Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$, d. h. die beiden Functionssysteme sind dann innerhalb E cogredient. Also ist das Bestehen von Gleichungen von der Form (3) nothwendig und hinreichend für die Cogredienz der Systeme $[z_\varkappa]$ und $[y_\varkappa]$.

Da die Ableitungen jeder Ordnung der $z_1, z_2, \cdots z_n$ offenbar auch mit $y_1, y_2, \cdots y_n$ cogrediente Systeme bilden, so genügen die $z_1, z_2, \cdots z_n$ einer homogenen linearen Differentialgleichung mit innerhalb E eindeutigen Coefficienten:

$$(5)\qquad C(z) = C_n z^{(n)} + C_{n-1} z^{(n-1)} + \cdots + C_0 z = 0.$$

Dieselbe besitzt im Allgemeinen innerhalb E andere singuläre Stellen wie die Differentialgleichung (1), nur die Verzweigungspunkte der Integrale sind für beide Differentialgleichungen identisch.

Im Allgemeinen, d. h. wenn die $B_0, B_1, \cdots B_{n-1}$ willkürli Functionen von der erforderlichen Beschaffenheit sind, ist die Di rentialgleichung (5) nicht von niedrigerer Ordnung als (1), und Functionen $z_1, z_2, \cdots z_n$ bilden ein Fundamentalsystem von (5).

In der That ergiebt sich diese Differentialgleichung, indem n den Ausdruck

$$(6) \qquad z = B_0 y + B_1 y' + \cdots + B_{n-1} y^{(n-1)} = B(y)$$

n-mal nach x differentiirt, die Ableitungen höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ O nung von y mit Hülfe der Differentialgleichung (1) wegschafft u zwischen den so entstehenden $(n+1)$ linearen Gleichungen die Grössen

$$y, y', \cdots y^{(n-1)}$$

eliminirt. Wir wollen von einer so gebildeten Differentialgleichu auch sagen, sie sei mit (1) innerhalb E cogredient.

Würde nun die Differentialgleichung von niedrigerer als der Ordnung sein, so müsste zwischen den durch die Gleichungen (3) finirten Grössen $z_1, z_2, \cdots z_n$ eine homogene lineare Relation

$$\gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \cdots + \gamma_n z_n = 0$$

mit constanten Coefficienten bestehen. Diese Relation besagt ab dass das Integral

$$\eta = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \cdots + \gamma_n y_n$$

von (1) der Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$B(y) = 0$$

Genüge leisten würde. Dies ist aber, wenn die $B_0, B_1, \cdots B_{n-1}$ w kürlich gewählte Functionen von der erforderlichen Beschaffenheit si unter keinen Umständen möglich, da ja eine Differentialgleichung kein nicht identisch verschwindendes Integral mit einer „willkü lichen" Differentialgleichung gemein haben kann.

Denken wir uns die aus der Gleichung (6) durch Differentiat und Entfernung der Ableitungen höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung vo hervorgehenden Gleichungen in der Form

$$(7) \qquad z^{(\varkappa)} = B_{\varkappa 0} y + B_{\varkappa 1} y' + \cdots + B_{\varkappa, n-1} y^{(n-1)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n -$$

geschrieben; dann ist nach dem Multiplicationstheoreme der De minanten

$$(\alpha) \qquad D(z_1, z_2, \cdots z_n) = |B_{\varkappa i}| D(y_1, y_2, \cdots y_n) \qquad (i, \varkappa = 0, 1, \cdots n -$$

Also ist, wenn die $z_1, z_2, \cdots z_n$ von einander linear unabhängig, d wenn (5) von der n^{ten} Ordnung ist, die Determinante

$$|B_{i\varkappa}| \qquad (i, \varkappa = 0, 1, \cdots n-1)$$

nicht identisch Null, und man kann demnach aus dem Gleichungssysteme (7) y und seine sämmtlichen $(n-1)$ ersten Ableitungen als homogene lineare Ausdrücke der

$$z, z', \cdots z^{(n-1)}$$

mit innerhalb E eindeutigen Coefficienten berechnen. Folglich ist auch das allgemeine Integral jeder innerhalb E mit (1) cogredienten Differentialgleichung in derselben Weise durch z und seine Ableitungen darstellbar, wie durch y und dessen Ableitungen; wir haben also den Satz:

Für willkürliche $B_0, B_1, \cdots B_{n-1}$, die innerhalb E eindeutige Functionen von x sind, ist die Differentialgleichung, der z genügt, von nicht niedrigerer als der n^{ten} Ordnung, und die Beziehung zwischen einer solchen Differentialgleichung und der Differentialgleichung (1) ist eine gegenseitige, d. h. jede mit (1) cogrediente Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ist mit (1) völlig gleichberechtigt.

164. Sätze über reductible Differentialgleichungen.

Wir fragen nun, wann kann es sich ereignen, dass die Differentialgleichung (5), der z genügt, von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung wird?

Hierzu ist, wie gezeigt wurde, erforderlich, dass eine Lösung der Differentialgleichung (1) die Differentialgleichung

$$B(y) = 0$$

befriedigt; in diesem Falle ist also (1) innerhalb E reductibel.

Wenn umgekehrt die Differentialgleichung (1) in diesem Sinne reductibel ist, so muss sich nach den Sätzen der Nr. 27 (Bd. I, S. 84 ff.) ihre linke Seite in die Form setzen lassen

$$A(y) = HK(y),$$

wo K einen Differentialausdruck μ^{ter} Ordnung $(\mu < m)$, H einen solchen $(n-\mu)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet, und wo die Coefficienten dieser beiden Differentialausdrücke innerhalb des Bereiches E eindeutige Functionen sind. Setzen wir nun

$$u = K(y),$$

so ist die Differentialgleichung, der u genügt, mit (1) innerhalb E cogredient; dieselbe ist aber offenbar nichts anderes wie

$$H(u) = 0$$

und somit von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung.

Bedeutet ferner w das allgemeine Integral einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, die mit (1) in Bezug auf E cogredient ist, so ist, wie wir bewiesen haben, u in der Form

$$u = K(y) = L_0 w + L_1 w' + \cdots + L_{n-1} w^{(n-1)} = L(w)$$

darstellbar, wo die $L_0, L_1, \cdots L_{n-1}$ innerhalb E eindeutig sind. Da $K(y)$ für gewisse Integrale von (1) verschwindet, so hat die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung für w mit der Differentialgleichung niedrigerer Ordnung

$$L(w) = 0$$

Integrale gemein, ist also jedenfalls reductibel. Wir können demnach sagen:

Unter den Differentialgleichungen, die mit (1) in Bezug auf E cogredient sind, giebt es dann und nur dann solche von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung, wenn die Differentialgleichung (1) reductibel ist. Ferner sind alle innerhalb E cogredienten Differentialgleichungen gleichzeitig irreductibel oder reductibel.

Wir hatten erkannt, dass die Gleichung (1) nothwendig reductibel sein muss, wenn die Differentialgleichung (5) für z von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung ist, denn es musste in diesem Falle für ein Integral η von (1) der Ausdruck

$$B(\eta) = 0$$

sein. Etwas allgemeiner kann man fragen, was sich für die Differentialgleichung (1) erschliessen lässt, wenn für ein Integral η derselben zwar $B(\eta)$ nicht verschwindet, aber einem anderen nicht verschwindenden Integrale η_1 von (1) gleich wird.

Da zufolge der Voraussetzung $B(y)$ für kein Integral von (1) verschwindet, ist die Differentialgleichung (5) nothwendig von der n^{ten} Ordnung. Sie hat mit (1) das nicht identisch verschwindende Integral

$$\eta_1 = B(\eta)$$

gemein. Es giebt folglich, wenn die Differentialgleichungen (1) und (5) nicht identisch sind, nach den Sätzen der Nr. 16 (Bd. I, S. 45) eine Differentialgleichung von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung, deren Coefficienten sich aus den Coefficienten von (1) und (5) durch Differentiationen und rationale Operationen zusammensetzen und die durch alle gemeinsamen Lösungen von (1) und (5) befriedigt wird. Also wäre in diesem Falle die Differentialgleichung (1) reductibel.

Wenn aber (1) mit (5) identisch ist, so bilden die n Ausdrücke

(8) $$B(y_\varkappa) = \eta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

ein Fundamentalsystem von (1); es ist demnach

$$\eta_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_{\varkappa\lambda} y_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo die $\alpha_{\varkappa\lambda}$ Constanten bedeuten, für welche

$$|\alpha_{\varkappa\lambda}| \neq 0 \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots n)$$

ist. Bestimmt man nun ω als Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$|\alpha_{\varkappa\lambda} - \delta_{\varkappa\lambda}\omega| = 0 \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots n),$$

wo wie gewöhnlich

$$\delta_{\varkappa\lambda} = 0 \quad \text{für} \quad \varkappa \neq \lambda, \quad \delta_{\lambda\lambda} = 1$$

zu nehmen ist, so lassen sich aus den n homogenen Gleichungen

$$c_1\alpha_{1\varkappa} + c_2\alpha_{2\varkappa} + \cdots + c_n\alpha_{n\varkappa} = \omega c_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

die n Constanten $c_1, c_2, \cdots c_n$ bestimmen, und man hat

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_n\eta_n = \omega(c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n).$$

Multiplicirt man also die Gleichungen (8) der Reihe nach mit den $c_\varkappa$ und addirt für $\varkappa = 1, 2, \cdots n$, so kommt

$$\omega\sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa y_\varkappa = B\left(\sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa y_\varkappa\right),$$

d. h. das Integral

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa y_\varkappa$$

von (1) genügt der homogenen linearen Differentialgleichung niedrigerer als n^{ter} Ordnung

$$B(z) = \omega z,$$

also ist auch in diesem Falle (1) reductibel, und wir haben den Satz:

Wenn zwei Lösungen η, η_1 der Differentialgleichung (1) durch eine Gleichung von der Form

$$\eta_1 = B(\eta)$$

mit einander verknüpft sind, so ist die Gleichung (1) (innerhalb E) reductibel.

Um das so gewonnene Ergebniss noch in etwas anderer Form aussprechen zu können, bemerken wir mit Herrn Heffter das Folgende:

Wenn die Differentialgleichung (1) durch die Transformation (6)

in die cogrediente Differentialgleichung (5) übergeführt wird, so befriedigen also die sämmtlichen Lösungen von (1) die Differentialgleichung

$$CB(y) = 0,$$

und es ist folglich (Nr. 17, Bd. I, S. 45) die linke Seite dieser Differentialgleichung in der Form

$$CB = DA \tag{9}$$

darstellbar, wo D einen Differentialausdruck mit innerhalb E eindeutigen Coefficienten bedeutet.

Wenn umgekehrt die beiden Differentialausdrücke C und A in der Beziehung stehen, dass sich zwei ebenso beschaffene Differentialausdrücke B, D bestimmen lassen, für welche die Gleichung (9) erfüllt ist, wenn ferner C nicht von höherer Ordnung ist wie A, und B für höchstens soviel linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung $A = 0$ verschwindet, als die Differenz der Ordnungen von A und C beträgt, so lässt sich aus den n Ausdrücken

$$B(y_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

offenbar ein Fundamentalsystem von C zusammensetzen, d. h. es sind dann auch die Differentialgleichungen (1) und (5) cogredient.

Ist insbesondere A so beschaffen, dass sich zwei Differentialausdrücke B, D so angeben lassen, dass die Gleichung

$$AB = DA$$

erfüllt ist und dass B nicht für alle Lösungen der Differentialgleichung $A = 0$ verschwindet, so ist diese letztere Differentialgleichung reductibel.

165. Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten. Der Artbegriff. Sätze von Fuchs. Die Transformationsgruppen von Differentialgleichungen derselben Art.

Die vorhergehenden Betrachtungen gestatten in gewissem Sinne eine Uebertragung auf den Fall, wo man, statt für die Coefficienten der Differentialausdrücke $A(y)$, $B(y)$, $C(z)$ die Eindeutigkeit innerhalb E vorauszusetzen, irgend eine andere Eigenschaft der Coefficienten zu Grunde legt, die durch Differentiation und Ausübung rationaler Operationen nicht gestört wird (vergl. Nr. 27, Bd. I, S. 83).

Es bleiben dann nämlich die Sätze über die Reductibilität von (1), wie man aus der Herleitung ersieht, ohne Weiteres bestehen, wenn man die Cogredienz der Differentialgleichungen (1) und (5) durch das Bestehen einer Gleichung (6) zwischen den abhängigen Variabeln definirt. Will man dagegen den Begriff der Cogredienz auf die Ueber-

einstimmung der Verzweigungspunkte und der zu denselben gehörigen Fundamentalsubstitutionen gründen, so gelten jene Reductibilitätssätze im Allgemeinen nur, wenn die über die Coefficienten der Differentialausdrücke gemachten Voraussetzungen in Monodromieeigenschaften derselben bestehen. Diese beiden Gesichtspunkte sind also allemal wohl auseinander zu halten; wir wollen dies in dem besonders wichtigen Falle, wo die Coefficienten als rationale Functionen von x vorausgesetzt werden, des Näheren erörtern.

Sei also die Differentialgleichung (A) (S. 111) mit in x rationalen Coefficienten vorgelegt, dann ist die ganze x-Ebene als Bereich E anzusehen. Die singulären Stellen der Differentialgleichung sondern wir in vier Kategorien:

1. die wirklichen Verzweigungspunkte der Integrale,
$$a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_r;$$
2. diejenigen wesentlichen singulären Stellen, in deren Umgebung die Integrale zwar eindeutig aber unbestimmt sind;
3. diejenigen wesentlichen singulären Stellen, in denen die Integrale wie rationale Functionen (d. h. von ganzzahliger Ordnung) unendlich werden;
4. die ausserwesentlichen singulären Stellen.

Wenn eine homogene lineare Differentialgleichung (B) mit (A) die wirklichen Verzweigungspunkte ihrer Integrale und überdies auch bei geeigneter Wahl der Fundamentalsysteme die zugehörigen Fundamentalsubstitutionen gemein hat, so wird sie als mit (A) schlechthin cogredient zu bezeichnen sein. Ihre abhängige Variable z ist mit y durch eine Gleichung von der Form

$$z = r_0 y + r_1 y' + \cdots + r_{n-1} y^{(n-1)} = R(y) \tag{C}$$

verknüpft, wo die $r_0, r_1, \cdots r_{n-1}$ eindeutige Functionen von x bedeuten, auch brauchen die Coefficienten von (B) nur eindeutige, nicht rationale Functionen von x zu sein.

Wenn die mit (A) cogrediente Differentialgleichung

$$Q(y) = q_0 y^{(n)} + q_1 y^{(n-1)} + \cdots + q_n y = 0 \tag{B}$$

rationale Coefficienten hat ($q_0 = \text{const.}$), und beide Gleichungen (A) und (B) der Fuchs'schen Classe angehören, so berechnen sich aus den Gleichungen

$$z_\varkappa = r_0 y_\varkappa + r_1 y_\varkappa' + \cdots + r_{n-1} y_\varkappa^{(n-1)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

die aus (C) hervorgehen, indem man für y die Elemente $y_1, y_2, \cdots y_n$ eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (A) einsetzt, die

$$r_0, r_1, \cdots r_{n-1}$$

durch die Formeln

$$r_\varkappa = \frac{\Delta_\varkappa}{D(y_1, y_2, \cdots y_n)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n-1)$$

als eindeutige Functionen, und da dieselben als rationale Differentialfunctionen der $y_1, y_2, \cdots y_n, z_1, z_2, \cdots z_n$ auch keine Unbestimmtheitsstellen haben können, als rationale Functionen von x.

Wir sagen, nach Herrn Poincaré, von der Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten (B), sie gehöre mit (A) zur selbe Art, wenn die abhängige Variable z von (B) mit y durch eine Gle chung von der Form (C), in der die $r_0, r_1, \cdots r_{n-1}$ rationale Fun tionen bedeuten, verknüpft ist. Für Differentialgleichungen derselb Art stimmen demnach nicht nur die singulären Stellen der Kategorie sondern auch die der Kategorie 2. überein. Wir können gleich d Satz aussprechen:

Cogrediente Differentialgleichungen der Fuchs'sch Classe gehören zur selben Art.

Die Reductibilitätssätze der vorigen Nummer bleiben richtig, we man die Reductibilität einer linearen Differentialgleichung im Sin der Nr. 160 (S. 105) fasst und an die Stelle der Cogredienz die Z gehörigkeit zur selben Art setzt; d. h. wir haben die Sätze:

Eine mit (A) zur selben Art gehörige Differentialgl chung kann nur dann von niedrigerer als der n^{ten} Ordnu sein, wenn (A) reductibel ist.

Die sämmtlichen mit (A) zur selben Art gehörigen Diff rentialgleichungen n^{ter} Ordnung sind mit (A) völlig gleic berechtigt und sind gleichzeitig mit (A) irreductibel oder nic

Wenn zwei Integrale η, η_1 von (A) durch eine Gleichu der Form

$$\eta_1 = r_0\eta + r_1\eta' + \cdots + r_{n-1}\eta^{(n-1)}$$

mit rationalen $r_0, r_1, \cdots r_{n-1}$ verknüpft sind, so ist (A) r ductibel.

Der erste und zweite dieser Sätze rührt von Herrn Fuchs, d dritte von Herrn Frobenius her.

Ferner ergeben sich leicht die folgenden Sätze:

Wenn sich genau $\mu \leqq n$ linear unabhängige Lösung der Differentialgleichung (A) an der singulären Stelle $x =$ bestimmt verhalten, so verhalten sich ebensoviele line unabhängige Integrale einer jeden mit (A) zur selben A gehörigen Differentialgleichung (B) an eben dieser Stell

bestimmt, sofern der Differentialausdruck $R(y)$, der die abhängige Variable z von (B) durch y darstellt, für keines der sich bei $x = a$ bestimmt verhaltenden Integrale von (A) verschwindet.

Wenn die Stelle $x = a$ für die Differentialgleichung (A) eine Stelle der Bestimmtheit ist, so ist sie auch eine Stelle der Bestimmtheit für jede mit (A) zur selben Art gehörige Differentialgleichung.

Wenn (A) zur Fuchs'schen Classe gehört, so gehört auch jede Differentialgleichung derselben Art zur Fuchs'schen Classe.

Wir nennen Lösungen y, z der zur selben Art gehörigen Differentialgleichungen (A), (B), die durch die Gleichung (C) mit einander verknüpft sind, entsprechende Integrale. Wenn (A), (B) beide von der n^{ten} Ordnung sind, also insbesondere wenn (A) irreductibel ist, können wir auch von entsprechenden Fundamentalsystemen reden.

Im Folgenden setzen wir der Einfachheit wegen voraus, dass die betrachteten zur selben Art gehörigen Differentialgleichungen auch von derselben Ordnung sind.

Entsprechende Fundamentalsysteme von Differentialgleichungen derselben Art erleiden stets, insbesondere also auch bei jedem Umlaufe der unabhängigen Variabeln x, dieselbe Substitution. Also haben für entsprechende Fundamentalsysteme Differentialgleichungen derselben Art dieselbe Monodromiegruppe.

Sie haben aber auch dieselbe Transformationsgruppe.

Um dies zu beweisen, betrachten wir die zur selben Art gehörigen, durch die Beziehung (C) zwischen den abhängigen Variabeln verknüpften Differentialgleichungen (A) und (B) mit den entsprechenden Fundamentalsystemen $[y_\varkappa]$, $[z_\varkappa]$.

Bilden wir die empfindlichen Functionen (Nr. 147, S. 60)

$$u(y) = \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{0\varkappa} y_\varkappa + \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{1\varkappa} y_\varkappa' + \cdots + \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{n-1,\varkappa} y_\varkappa^{(n-1)},$$

$$v(y) = \sum_{\varkappa=1}^{n} B_{0\varkappa} z_\varkappa + \sum_{\varkappa=1}^{n} B_{1\varkappa} z_\varkappa' + \cdots + \sum_{\varkappa=1}^{n} B_{n-1,\varkappa} z_\varkappa^{(n-1)},$$

wo die $A_{i\varkappa}$, $B_{i\varkappa}$ willkürliche Functionen bedeuten, und die beiden in Bezug auf die höchste Ableitung im algebraischen Sinne irreductiblen algebraischen Differentialgleichungen niedrigster Ordnung mit in x und den $A_{i\varkappa}$ nebst deren Ableitungen, beziehungsweise x und den $B_{i\varkappa}$ nebst deren Ableitungen rationalen Coefficienten (vergl. Nr. 149, S. 65)

$$(10) \qquad \Theta(u, u', \cdots u^{(\nu)}; A_{i\varkappa}, x) = 0,$$

$$(11) \qquad \mathsf{H}(v, v', \cdots v^{(\mu)}; B_{i\varkappa}, x) = 0,$$

denen $u(y)$ beziehungsweise $v(z)$ Genüge leistet. Dann können wir bekanntlich (Nr. 150, S. 69) die Transformationsgruppen der Differentialgleichung (A) beziehungsweise (B) wie folgt definiren:

Bezeichnen wir durch

$$u(Sy), \quad v(Tz)$$

dasjenige, was aus $u(y)$ beziehungsweise $v(z)$ wird, wenn wir auf die $[y_\varkappa]$ die Substitution S, beziehungsweise auf die $[z_\varkappa]$ die Substitution T anwenden, so bilden diejenigen Substitutionen S, für welche $u(Sy)$ die Differentialgleichung (10) befriedigt, die Transformationsgruppe G von (A) und diejenigen Substitutionen T, für welche $v(Ty)$ der Differentialgleichung (11) genügt, die Transformationsgruppe H von (B).

Setzen wir nunmehr in $v(z)$ für die $[z_\varkappa]$ und deren Ableitungen die sich aus den Ausdrücken

$$z_\varkappa = R(y_\varkappa)$$

ergebenden Werthe ein, so erhält $v(z)$ die Gestalt

$$(12) \qquad v(z) = \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{A}_{i\varkappa} y_\varkappa^{(i)} = \bar{u}(y)$$

und genügt folglich der Differentialgleichung

$$(13) \qquad \Theta(\bar{u}, \bar{u}', \cdots \bar{u}^{(\nu)}; \overline{A}_{i\varkappa}, x) = 0.$$

Diese Differentialgleichung hat mit der Differentialgleichung (11) ein Integral gemein, sie muss folglich durch alle Integrale der Differentialgleichung (11), die wir ja (vergl. Nr. 150, S. 67) als im Koenigsberger'schen Sinne irreductibel voraussetzen können, befriedigt werden. Also genügen auch die Functionen $v(Tz)$, wo T eine der Gruppe H angehörige Substitution bedeutet, der Differentialgleichung (13). Nun ist aber offenbar

$$v(Tz) = \bar{u}(Ty);$$

andererseits können wir $\bar{u}(y)$ ebenso wie $u(y)$ als die zu (A) gehörige empfindliche Function ansehen, und es sind demnach die Lösungen von (13) in der Form

$$\bar{u}(Sy)$$

enthalten, wo S die Transformationen der Gruppe G durchläuft. Also muss jede Transformation T von H in G vorkommen, und da die Beziehung zwischen den Differentialgleichungen (A) und (B) eine gegenseitige ist, so folgt hieraus, wie behauptet wurde, die Identität der beiden Gruppen G und H.

166. Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe. Allgemeine Bemerkungen.

Sei $F(y)$ eine rationale Differentialfunction der $[y_\varkappa]$, die dem Rationalitätsbereiche angehört, d. h. gleich einer rationalen Function

$$F(y) = f(x)$$

von x ist, und möge ebenso $\Phi(z)$ eine rationale Differentialfunction der $[z_\varkappa]$ bedeuten, die einen in x rationalen Werth

$$\Phi(z) = g(x)$$

besitzt. Dann verwandelt sich $\Phi(z)$, wenn man für die $[z_\varkappa]$ und ihre Ableitungen ihre Ausdrücke durch die $[y_\varkappa]$ und deren Ableitungen einsetzt, in eine rationale Differentialfunction

$$\Phi(z) = \overline{F}(y)$$

der $[y_\varkappa]$, die gleich einer rationalen Function von x ist. Daraus kann man aber im Allgemeinen nicht schliessen, dass die beiden Differentialfunctionen $F(y)$ und $\overline{F}(y)$, wenn man in denselben die $y_1, y_2, \cdots y_n$ als unbestimmte Functionen auffasst, zur selben Gattung gehören, und ebensowenig, dass auch die rationale Differentialfunction der $[z_\varkappa]$

$$\overline{F}(z)$$

gleich einer rationalen Function von x wird.

Ein solcher Schluss ist nur in dem Falle zulässig, wo die formelle Invarianz mit der Invarianz als Function von x zusammenfällt, d. h. nur dann, wenn die Transformationsgruppe der beiden Differentialgleichungen (A), (B) die allgemeine lineare homogene Gruppe L ist. In diesem Falle verwandelt sich in der That jede invariante Differentialfunction der $[y_\varkappa]$ in eine derselben Gattung angehörige Function, wenn man an die Stelle der $[y_\varkappa]$ und ihrer Ableitungen die $[z_\varkappa]$ und ihre Ableitungen setzt. Denn jede solche Invariante ist ja, wie wir gezeigt haben (Nr. 136, S. 20), eine rationale Function der Determinantenquotienten

$$\frac{D_\varkappa(y_1, y_2, \cdots y_n)}{D(y_1, y_2, \cdots y_n)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

und für diese ist offenbar

$$\frac{D_\varkappa(z_1, z_2, \cdots z_n)}{D(z_1, z_2, \cdots z_n)} = \Re_\varkappa(x) \frac{D_\varkappa(y_1, y_2, \cdots y_n)}{D(y_1, y_2, \cdots y_n)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo die $\Re_\varkappa(x)$ rationale Functionen von x bedeuten.

Wir hatten oben (S. 120) bemerkt, dass cogrediente Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe nothwendig zur selben Art gehören; auf Grund des am Schlusse der vorigen Nummer bewiesenen Satzes folgt hieraus, dass für cogrediente Differentialgleichungen der Fuchs'schen

Classe auch die Transformationsgruppen übereinstimmen. Dies ist abe nur ein besonderer Fall des folgenden Satzes:

Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe, die die selbe Monodromiegruppe haben, besitzen auch dieselbe Trans formationsgruppe.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des in der Nr. 159 (S. 101 gefundenen Ergebnisses, wonach die Transformationsgruppe einer Diffe rentialgleichung der Fuchs'schen Classe die engste algebraische linear homogene Gruppe ist, welche die Monodromiegruppe dieser Gleichun als Untergruppe enthält.

Wir erkennen hieraus, dass nicht nur, wie bereits in der Nr. 16 (S. 107) bemerkt wurde, in den auf Reductibilität bezüglichen Frage sondern überhaupt bei allen auf den Gruppencharakter bezügliche Untersuchungen die Betrachtung der Monodromiegruppe ausreich wenn es sich um Differentialgleichungen der Fuchs'schen Class handelt. So erklärt sich auch die im ersten Augenblicke vielleich auffallende Erscheinung, dass in der historischen Entwickelung unsere Theorie die Transformationsgruppe einer linearen Differentialgleichun erst verhältnissmässig spät (1887 in der Arbeit von Herrn Picard aufgetreten ist, wenn man bedenkt, dass fast alle tiefer gehenden Specia untersuchungen der Theorie der linearen Differentialgleichungen sic auf Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe beziehen. Dagege ist zu erwarten, dass aus dem Studium der Transformationsgruppe für di Theorie derjenigen Differentialgleichungen, deren Integrale Unbestimmt heitsstellen darbieten, noch wichtige Ergebnisse zu ziehen sein werde

Man kann den Artbegriff auch etwas allgemeiner fassen, als wi es gethan haben, indem man sagt, zwei Differentialgleichungen (A und (B), deren Coefficienten sich innerhalb eines gewissen Bereiches wie rationale Functionen verhalten, gehören zur selben Art in Bezu auf diesen Bereich, wenn ihre abhängigen Variabeln durch ein Gleichung (C) verknüpft sind, in welcher die Coefficienten $r_0, r_1, \cdots r_{n-}$ Functionen bedeuten, die innerhalb E den Charakter von rationale Functionen haben. Wir werden aber im Folgenden nur gelegentlic von dieser Auffassung Gebrauch machen, da es keine Schwierigkeite darbietet, zu erkennen, was von den auf Differentialgleichungen de selben Art schlechthin bezüglichen Untersuchungen eine Uebertragun auf jenen allgemeineren Artbegriff zulässt. Ehe wir jedoch auf tiefer Untersuchungen über Differentialgleichungen derselben Art eingehe wollen wir eine wichtige Classe von Differentialgleichungen kennen lerne die unter diesen Begriff fallen und die uns zu interessanten allge meinen Eigenschaften einer linearen Differentialgleichung führen werde

Zweites Kapitel.

167. Systeme von Subdeterminanten der Determinante eines Fundamentalsystems. Associirte Differentialgleichungen. Der Franke'sche Satz.

Sei $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (A) und betrachten wir die Determinante

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots y_n' \\ . & . & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

dieses Fundamentalsystems.

Wir denken uns dann die sämmtlichen Subdeterminanten m^{ter} Ordnung dieser Determinante gebildet, wo $m < n$; die Anzahl dieser Subdeterminanten ist offenbar gleich

$$\nu^2 = \left\{\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots m}\right\}^2 = (n_m)^2.$$

Diejenigen dieser Subdeterminanten, die aus den Elementen des Systems

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots y_m \\ y_1' & y_2' & \cdots y_m' \\ . & . & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots y_m^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

gebildet sind, wollen wir durch

$$u_{11}, \quad u_{21}, \cdots u_{\nu 1}$$

bezeichnen und insbesondere

$$u_{11} = D(y_1, y_2, \cdots y_m)$$

nehmen. Ferner bezeichnen wir jene Determinanten, die aus $u_{\varkappa 1}$ dadurch entstehen, dass man die $y_1, y_2, \cdots y_m$ und deren Ableitungen durch die Ableitungen gleich hoher Ordnung irgend einer andern Combination von m verschiedenen der Integrale

$$y_1, y_2, \cdots y_n$$

ersetzt, durch

$$u_{\varkappa 2},\ u_{\varkappa 3},\ \cdots\ u_{\varkappa \nu},$$

so dass also

$$u_{i\varkappa} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu)$$

jene ν^2 Subdeterminanten m^{ter} Ordnung darstellen. Diejenigen De minanten, welche aus

$$u_{11},\ u_{21},\ \cdots\ u_{\nu 1}$$

hervorgehen, wenn wir in denselben an die Stelle von $y_1, y_2, \cdots$ irgend ein System von m linear unabhängigen Lösungen

$$\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{y}_2,\ \cdots\ \mathfrak{y}_m$$

der Differentialgleichung (A) setzen, mögen endlich durch

$$u_1,\ u_2,\ \cdots\ u_\nu$$

bezeichnet werden.

Bilden wir die Ableitung von u_i nach x und schaffen die event auftretenden Ableitungen höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der $\mathfrak{y}_1, \cdots$ mit Hülfe der Differentialgleichung (A) weg, so ist offenbar

$$\frac{du_i}{dx} = \overset{1}{\varphi}_{i1} u_1 + \overset{1}{\varphi}_{i2} u_2 + \cdots + \overset{1}{\varphi}_{i\nu} u_\nu \qquad (i = 1, 2, \cdots \nu),$$

und ebenso allgemein für die λ^{te} Ableitung

$$(1) \qquad \frac{d^\lambda u_i}{dx^\lambda} = \overset{\lambda}{\varphi}_{i1} u_1 + \overset{\lambda}{\varphi}_{i2} u_2 + \cdots + \overset{\lambda}{\varphi}_{i\nu} u_\nu \qquad (i = 1, 2, \cdots \nu),$$

wo die $\overset{\lambda}{\varphi}_{i\varkappa}$ rationale Functionen bedeuten, die sich aus den Coefficie von (A) durch Differentiation und rationale Operationen zusam setzen lassen.

Die Gleichungen (1) bleiben, wie aus ihrer Bildungsw sofort zu übersehen ist, bestehen, wenn man in densel die $u_1, u_2, \cdots u_\nu$ durch irgend eines der Systeme

$$u_{1\varkappa},\ u_{2\varkappa},\ \cdots\ u_{\nu\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu)$$

ersetzt.

Nehmen wir die Gleichungen (1) für $\lambda = 1, 2, \cdots \nu$ und de wir uns aus den so entstehenden ν Gleichungen die $\nu - 1$ Grösse

$$u_\varkappa, \quad \varkappa \neq i,$$

eliminirt, so ergiebt sich eine Gleichung von der Form

$$(2_i) \qquad \overset{i}{P}_\nu \frac{d^\nu u_i}{dx^\nu} + \overset{i}{P}_{\nu-1} \frac{d^{\nu-1} u_i}{dx^{\nu-1}} + \cdots + \overset{i}{P}_0 u_i = 0,$$

der die Functionen

$$u_{i1},\ u_{i2},\ \cdots\ u_{i\nu}$$

Genüge leisten und deren Coefficienten rationale Functionen von x sind. Der Coefficient der ν^{ten} Ableitung ist

$$(3_i) \qquad (-1)^{i-1}\overset{i}{P}_\nu = \left|\overset{\lambda}{\varphi}_{i\varkappa}\right| \qquad \begin{pmatrix}\lambda=1,2,\cdots\nu-1\\ \varkappa=1,2,\cdots i-1,i+1,\cdots\nu\end{pmatrix}.$$

Wenn diese Determinante von Null verschieden ist, so ist demnach die Differentialgleichung (2_i) auch wirklich von der ν^{ten} Ordnung. Wenn wir für $i=1$ den Index 1 in der Gleichung (2_i) weglassen, so genügt also u_1 für jede Wahl der $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m$ der Differentialgleichung

$$(2) \qquad P_\nu \frac{d^\nu u}{dx^\nu} + P_{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}u}{dx^{\nu-1}} + \cdots + P_0 u = 0,$$

die demnach auch durch

$$u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}$$

befriedigt wird.

Wenn diese letztere Differentialgleichung wirklich von der ν^{ten} Ordnung, d. h. wenn

$$(3) \qquad P_\nu = \left|\overset{\lambda}{\varphi}_{1\varkappa}\right| \qquad \begin{pmatrix}\lambda=1,2,\cdots\nu-1\\ \varkappa=2,3,\cdots\nu\end{pmatrix}$$

von Null verschieden ist, so kann man aus dem Gleichungssysteme, das sich aus (1) für

$$i=1, \quad \lambda=1,2,\cdots\nu-1$$

ergiebt, die $\nu-1$ Grössen $u_2, u_3, \cdots u_\nu$ berechnen und erhält

$$(\alpha) \qquad u_\varkappa = \chi_{\varkappa 0}u_1 + \chi_{\varkappa 1}u_1' + \cdots + \chi_{\varkappa,\nu-1}u_1^{(\nu-1)} \qquad (\varkappa=2,3,\cdots\nu),$$

wo die $\chi_{\varkappa\lambda}$ rationale Fnnctionen von x bedeuten; in diesem Falle sind also die Differentialgleichungen (2_i) für $i=2,3,\cdots\nu$ mit der Differentialgleichung (2) von derselben Art.

Wir setzen im Folgenden voraus, dass die Determinante P_ν von Null verschieden ist, was offenbar im Allgemeinen, d. h. für willkürliche Wahl der rationalen Functionen, welche die Coefficienten von (A) bilden, der Fall sein wird. Die Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung (2) soll dann die $(n-m)^{\text{te}}$ der ursprünglichen Differentialgleichung (A) associirte Differentialgleichung genannt werden. Wir haben nunmehr einige Eigenschaften dieser Differentialgleichung zu entwickeln.

Hierbei bedürfen wir eines merkwürdigen von Herrn Franke herrührenden Determinantensatzes, der wie folgt lautet:

Bilden wir aus den Elementen der Determinante

$$\varDelta = |a_{i\varkappa}| \qquad (i,\varkappa=1,2,\cdots n)$$

die sämmtlichen Subdeterminanten m^{ter} Ordnung und bezeichnen dieselben durch

$$b_{i\varkappa} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu;\ \nu = n_m),$$

so dass

$$b_{11} = |a_{i\varkappa}| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots m)$$

gesetzt wird und

$$b_{21},\ b_{31},\ \cdots\ b_{\nu 1}$$

die aus b_{11} durch Abänderung der ersten Indices der $a_{i\varkappa}$,

$$b_{i2},\ b_{i3},\ \cdots\ b_{i\nu}$$

die aus b_{i1} durch Abänderung der zweiten Indices der $a_{i\varkappa}$ h vorgehenden dieser Determinanten bedeuten, dann ist Determinante

$$\overset{m}{\varDelta} = |b_{i\varkappa}| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu)$$

eine Potenz der ursprünglichen Determinante, und zwar i

$$\overset{m}{\varDelta} = (\varDelta)^{(n-1)(m-1)}.$$

Man nennt in der Determinantentheorie das System der

$$(b_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu)$$

das $(n - m)^{\text{te}}$ dem Systeme der

$$(a_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

associirte System, und entsprechend auch die Determinante $\overset{m}{\varDelta}$ $(n - m)^{\text{te}}$ associirte Determinante von $\varDelta$.

Auf einen Beweis dieses Franke'schen Satzes gehen wir an die Stelle nicht ein, weil sich derselbe indirect als eine Folge der na stehenden Betrachtungen ergeben wird. Wie Borchardt bemerkt l ist der in Rede stehende Satz als besonderer Fall in dem sogenann Sylvester'schen Determinantensatze enthalten, für den Herr Frobeni im 86. Bande des Crelle'schen Journals (S. 54) einen eleganten Bew geliefert hat.

Wenden wir den Franke'schen Satz auf die Determinante

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n) = |y_\varkappa^{(i-1)}| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

an, so besagt derselbe, dass die aus den $u_{i\varkappa}$ $(i, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu)$ gebilde Determinante

$$\underset{(i, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu)}{|u_{i\varkappa}|} = [D(y_1, y_2, \cdots y_n)]^{(n-1)(m-1)}$$

ist. Hieraus folgt, da die $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem bilde

Die aus den $u_{i\varkappa}$ $(i, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu)$ gebildete Determinante i nicht identisch Null.

Betrachten wir die Gleichungen

$$(\beta) \qquad \frac{d^\lambda u_{1\varkappa}}{dx^\lambda} = \overset{\lambda}{\varphi}_{11} u_{1\varkappa} + \overset{\lambda}{\varphi}_{12} u_{2\varkappa} + \cdots + \overset{\lambda}{\varphi}_{1\nu} u_{\nu\varkappa}$$
$$(\varkappa = 1, 2, \cdots \nu;\ \lambda = 1, 2, \cdots \nu - 1),$$

die sich aus (1) ergeben, indem man $i = 1$ nimmt und die $u_1, u_2, \cdots u_\nu$ durch die $u_{1\varkappa}, u_{2\varkappa}, \cdots u_{\nu\varkappa}$ ersetzt, so erkennen wir, dass nach dem Multiplicationstheoreme der Determinanten

$$D(u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}) = \left|\overset{\lambda}{\varphi}_{1\varkappa}\right|_{\binom{\lambda = 1, 2, \cdots \nu - 1}{\varkappa = 2, 3, \cdots \nu}} \cdot \left|u_{i\varkappa}\right|_{\binom{i = 1, 2, \cdots \nu}{\varkappa = 1, 2, \cdots \nu}}$$

ist.

Wenn also, wie wir voraussetzten, die Determinante P_ν nicht verschwindet, so ist auch die Determinante des Functionssystems

$$u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}$$

nicht identisch Null, d. h. dieses Functionssystem stellt ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (2) dar.

168. Die Fundamentalgleichungen der associirten Differentialgleichungen. Geometrische Deutung. Integralcurve.

Es möge für den am Schlusse der vorigen Nummer bewiesenen Satz noch ein zweiter Beweis angedeutet werden, der sich nicht auf den Franke'schen Satz stützt und der uns zu einer Reihe wichtiger Bemerkungen Anlass geben wird.

Sei $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ ein Fundamentalsystem von (A), welches mit $y_1, y_2, \cdots y_n$ durch die Gleichungen

$$\eta_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{i\varkappa} y_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

verknüpft ist, wo also

$$\Delta = |a_{i\varkappa}| \neq 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n).$$

Dann ist bekanntlich

$$\left|\eta_\varkappa^{(i-1)}\right| = |a_{i\varkappa}| \cdot \left|y_\varkappa^{(i-1)}\right| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n);$$

bilden wir also aus den Elementen der Determinante

$$D(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n) = \left|\eta_\varkappa^{(i-1)}\right|$$

die Subdeterminanten m^{ter} Ordnung und bezeichnen dieselben derart durch

$$v_{i\varkappa} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu),$$

dass $v_{i\varkappa}$ aus $u_{i\varkappa}$ hervorgeht, indem wir in $u_{i\varkappa}$ die $y_1, y_2, \cdots y_n$ durch die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ ersetzen, so ist nach dem in der Nr. 30 (Bd. I, S. 93, Gleichung (5)) erwähnten Satze über die Subdeterminanten componirter Systeme, bei geeigneter Wahl der Bezeichnung,

$$v_{i\varkappa} = \sum_{h=1}^{\nu} b_{h\varkappa} u_{ih} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu),$$

also insbesondere für $i = 1$

$$(4) \qquad v_{1\varkappa} = \sum_{h=1}^{\nu} b_{h\varkappa} u_{1h} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu);$$

die $v_{1\varkappa}$ sind demnach ebenfalls Lösungen der Differentialgleichung (2).

Wir wollen im Folgenden die $u_{1\varkappa}$ als die dem Fundamentalsysteme $y_1, y_2, \cdots y_n$ entsprechenden Lösungen der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung bezeichnen, dann können wir also den Satz aussprechen:

Wenn die Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ der Differentialgleichung (A) eine lineare Substitution S erfahren, so erfahren die entsprechenden Integrale der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Substitution von S.

Sei nun $x = a$ ein Verzweigungspunkt der Integrale von (A) und bedeute $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ das zu diesem Punkte gehörige canonische Fundamentalsystem. Wir setzen der Einfachheit wegen voraus, dass die Wurzeln

$$\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$$

der zu $x = a$ gehörigen Fundamentalgleichung sämmtlich von einander verschieden sind. Dann ist also

$$\eta_\varkappa = (x-a)^{r_\varkappa} \mathfrak{P}_\varkappa(x \mid a) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo $\mathfrak{P}_\varkappa(x \mid a)$ eine nach ganzen Potenzen von $x - a$ fortschreitende Reihe und $r_\varkappa$ einen der Werthe von

$$\frac{1}{2\pi i} \log \omega_\varkappa$$

bedeutet.

Bilden wir die den $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ entsprechenden Lösungen

$$v_{1\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu)$$

der Differentialgleichung (2), dann ist also

$$v_{1\varkappa} = \begin{vmatrix} \eta_{\varkappa_1} & \eta_{\varkappa_2} & \cdots & \eta_{\varkappa_m} \\ \eta'_{\varkappa_1} & \eta'_{\varkappa_2} & \cdots & \eta'_{\varkappa_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta^{(m-1)}_{\varkappa_1} & \eta^{(m-1)}_{\varkappa_2} & \cdots & \eta^{(m-1)}_{\varkappa_m} \end{vmatrix},$$

wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_m$ ein System von m verschiedenen der Zahlen $1, 2, \cdots n$ bedeutet. Folglich haben wir in der Umgebung von $x = a$ für $v_{1\varkappa}$ die Entwickelung

$$(5) \qquad v_{1\varkappa} = (x - a)^{r_{\varkappa_1} + r_{\varkappa_2} + \cdots + r_{\varkappa_m}} P_\varkappa(x|a) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu),$$

wo $P_\varkappa(x|a)$ eine nach ganzen Potenzen von $x - a$ fortschreitende Reihe darstellt. Setzen wir

$$(6) \qquad \Omega_\varkappa = e^{2\pi i (r_{\varkappa_1} + r_{\varkappa_2} + \cdots + r_{\varkappa_m})} = \omega_{\varkappa_1} \omega_{\varkappa_2} \cdots \omega_{\varkappa_m},$$

so müssen diese ν Grössen nach den Ergebnissen des dritten Abschnittes der zum Punkte $x = a$ gehörigen Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (2) genügen; im Allgemeinen sind dieselben von einander verschieden, wir wollen dies der Einfachheit wegen annehmen. Dann sind die ν Integrale (5) linear unabhängig (vergl. Nr. 31, Bd. I, S. 100) und bilden folglich ein Fundamentalsystem und zwar das zu $x = a$ gehörige canonische Fundamentalsystem der Differentialgleichung (2).

Hieraus folgt nun sofort, dass auch jedes einem Fundamentalsysteme $y_1, y_2, \cdots y_n$ von (A) entsprechende Lösungssystem $u_{1\varkappa}$ der Differentialgleichung (2) ein Fundamentalsystem von (2) sein muss; denn bestünde zwischen den $u_{1\varkappa}$ eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten, so würde aus den Gleichungen (4) das Bestehen einer eben solchen Relation zwischen den $v_{1\varkappa}$ folgen.

Beiläufig lernen wir, dass die Grössen (6) die Wurzeln der zum Punkte $x = a$ gehörigen Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (2) darstellen. Wir wollen uns diese Fundamentalgleichung bilden.

Wenn das Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ von (A) bei einem einfachen Umlaufe der unabhängigen Variabeln x um den Punkt $x = a$ die Substitution

$$\Sigma = (\alpha_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

erfährt, so lautet die zu $x = a$ gehörige Fundamentalgleichung von (A)

$$(7) \qquad |\alpha_{\varkappa i} - \delta_{\varkappa i}\omega| = 0 \qquad (\varkappa, i = 1, 2, \cdots n).$$

Das entsprechende Fundamentalsystem $u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}$ der $(n - m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung (2) erleidet dann bei demselben Umlaufe die $(n - m)^{\text{te}}$ associirte Substitution

$$(\beta_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu)$$

von Σ, und die zu $x = a$ gehörige Fundamentalgleichung von (2) lautet demgemäss

$$(8) \qquad |\beta_{\varkappa i} - \delta_{\varkappa i}\omega| = 0 \qquad (\varkappa, i = 1, 2, \cdots \nu).$$

Also sind, wie Herr G. Rados bemerkt hat, die Wurzeln der Gleichung (8) die Producte von je m verschiedenen der Wurzeln der Gleichung (7), und hieraus ergiebt sich nun, wenn wir in den linken Seiten der Gleichungen (7) und (8) $\omega = 0$ setzen, der Franke'sche Satz, da ja die Determinanten

$$|\alpha_{i\varkappa}| = \pm\, \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n),$$
$$|\beta_{i\varkappa}| = \pm\, \Omega_1 \Omega_2 \cdots \Omega_\nu \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu)$$

sind.

Die hier durchgeführten Betrachtungen leiten uns zu einer sehr wichtigen und folgenreichen Auffassung der Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung hin, die wir jetzt darlegen werden, indem wir an gewisse geometrische, von H. G. Grassmann in seiner „Ausdehnungslehre" eingeführte Gesichtspunkte anknüpfen.

Hat man n stetig veränderliche reale Grössen

$$x_1, x_2, \cdots x_n,$$

die nur abgesehen von einem allen gemeinsamen Factor bestimmt sind, so kann man dieselben als die homogenen Coordinaten eines Punktes einer $(n-1)$-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeit, oder, wie man sich kürzer ausdrückt, eines $(n-1)$-dimensionalen Raumes R_{n-1} auffassen. Jedes Grössensystem, dessen n Elemente nicht sämmtlich verschwinden, bestimmt auf diese Weise einen Punkt des R_{n-1}.

Betrachtet man die Coordinaten von m verschiedenen solchen Punkten

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} x_1' \;\; x_2' \;\cdots\; x_n', \\ x_1'' \;\; x_2'' \;\cdots\; x_n'', \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ x_1^{(m)} \; x_2^{(m)} \cdots x_n^{(m)}, \end{cases}$$

die so beschaffen sind, dass die nm Grössen (I) ein System vom Range m bilden, dann bestimmt die Gesammtheit derjenigen Punkte, deren Coordinaten sich in der Form

$$\text{(II)} \qquad x_h = \lambda_1 x_h' + \lambda_2 x_h'' + \cdots + \lambda_m x_h^{(m)} \qquad (h = 1, 2, \cdots n)$$

darstellen lassen, wo die $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$ Constanten bedeuten, eine in dem R_{n-1} enthaltene Mannigfaltigkeit $(n-m)^{\text{ter}}$ Stufe, $(m-1)^{\text{ter}}$ Dimension. Man kann dieselbe durch $(n-m)$ homogene lineare Gleichungen zwischen den laufenden Coordinaten eines veränderlich gedachten Punktes darstellen; Grassmann hat aber neben dieser Darstellung durch Gleichungen auch eine Bestimmung jener ebenen Mannigfaltigkeit durch Coordinaten eingeführt.

Er definirt nämlich als die homogenen Coordinaten der durch die Gleichungen (II) bestimmten ebenen Mannigfaltigkeit oder (wie wir kürzer sagen wollen) Ebene $(n-m)^{\text{ter}}$ Stufe, ein System von Zahlen, welches den aus dem System (I) gebildeten

$$\nu = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots m}$$

Determinanten m^{ter} Ordnung proportional ist. Diese Definition rechtfertigt sich dadurch, dass man zu denselben Coordinaten kommt, wenn man statt von den m Punkten mit den Coordinaten (I) von irgend welchen anderen m Punkten der Ebene $(n-m)^{\text{ter}}$ Stufe, die nicht schon in einer Ebene $(n-m+1)^{\text{ter}}$ Stufe liegen, ausgeht.

Im Sinne einer bei der geometrischen Interpretation functionentheoretischer Verhältnisse seit Clebsch üblichen Uebertragungsweise behält man die für den Fall realer Grössen $x_1, x_2, \cdots x_n$ eingeführte Terminologie auch in dem Falle bei, wo diese Grössen beliebige complexe Werthe anzunehmen vermögen.

Wir werden also die Werthe, welche ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ der Differentialgleichung (A) an irgend einer Stelle x annimmt, auch als die homogenen Coordinaten eines Punktes im R_{n-1} auffassen können und auf diese Weise, wenn wir x alle complexen Werthe durchlaufen lassen, ein Gebilde $(n-2)^{\text{ter}}$ Stufe, eine Curve, wie wir sagen wollen, im R_{n-1} erhalten. Wir denken uns diese Curve $\mathfrak{C}$ in der Form

$$(9) \qquad y_\varkappa = y_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

dargestellt. Es entspricht dann jedem nicht singulären Werthe von x ein Punkt der Curve $\mathfrak{C}$, da ja für keinen solchen Werth alle n Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ verschwinden können; bei dieser geometrischen Interpretation wird also ein Uebelstand vermieden, der sich in der Nr. 133 (S. 11) bei der daselbst dargelegten geometrischen Deutung unangenehm bemerkbar machte.

169. Geometrische Deutung der Integrale der associirten Differentialgleichungen. Contragredienz.

Es kann weder die Curve $\mathfrak{C}$ in ihrer Totalität noch ein beliebig kleines continuirliches Stück von $\mathfrak{C}$ in einer Ebene irgend welcher Stufe des R_{n-1} liegen; denn dies würde das Bestehen von homogenen linearen Beziehungen mit von x unabhängigen Coefficienten zwischen den $y_1, y_2, \cdots y_n$ zur Folge haben. Diese Curve ist also eine $(n-2)$-fach gekrümmte, oder, wie sich Herr Lie ausdrückt, eine möglichst gekrümmte Curve des R_{n-1}.

Betrachten wir $m (< n)$ einander unendlich benachbarte reg Punkte der Curve $\mathfrak{C}$ und denken uns durch dieselben eine I $(n-m)^{\text{ter}}$ Stufe hindurchgelegt, so nennen wir diese eine Tan tialebene $(n-m)^{\text{ter}}$ Stufe der Curve $\mathfrak{C}$.

Auf Grund der Principien der Differentialrechnung ist es leich zusehen, dass, wenn $y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x)$ die Coordinaten eines lären Punktes unserer Curve sind, die $(m-1)$ Punkte, deren Co naten durch

$$\begin{matrix} y_1'(x), & y_2'(x), & \cdots y_n'(x), \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(m-1)}(x), & y_2^{(m-1)}(x), & \cdots y_n^{(m-1)}(x) \end{matrix}$$

dargestellt werden, der durch den Punkt mit den Coordinaten

$$y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x)$$

hindurchgelegten Tangentialebene $(n-m)^{\text{ter}}$ Stufe angehören. homogenen Coordinaten dieser Tangentialebene im Sinne von Gı mann sind also proportional den ν aus den Elementen des Sys

$$\begin{matrix} y_1(x), & y_2(x), & \cdots y_n(x), \\ y_1'(x), & y_2'(x), & \cdots y_n'(x), \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(m-1)}(x), & y_2^{(m-1)}(x), & \cdots y_n^{(m-1)}(x) \end{matrix}$$

gebildeten Determinanten m^{ter} Ordnung; dies sind aber genau u Determinanten $u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}$. D. h.:

Die Coordinaten der in dem Punkte $(y_1, y_2, \cdots y_n)$ Integralcurve $\mathfrak{C}$ gelegten Tangentialebene $(n-m)^{\text{ter}}$ S sind proportional den dem Fundamentalsysteme $[y_x]$ sprechenden Lösungen der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differen gleichung von (A).

Betrachten wir insbesondere die Tangentialebene erster Stufe wir für $n > 3$ wohl auch als Tangentialebene schlechthin, ebens die Ebene erster Stufe, kurz als Ebene bezeichnen), so sind Coordinaten proportional den zu den Elementen $y_1^{(n-1)}, \cdots y_n^{(n-1)}$ hörigen Subdeterminanten der Determinante

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n);$$

diese n Subdeterminanten sind aber nach den Ergebnissen der N (Bd. I, S. 62) nichts anderes wie die mit dem Factor

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n) = \text{const. } e^{-\int p_1 dx}$$

multiplicirten Elemente des dem Fundamentalsysteme $[y_\varkappa]$ adjungirten Fundamentalsystems $z_1, z_2, \cdots z_n$ der zu (A) adjungirten Differentialgleichung (A'). Wir können also sagen:

Die erste Associirte der Differentialgleichung (A) geht aus der zu (A) adjungirten Differentialgleichung (A') dadurch hervor, dass man in der letzteren die abhängige Variable z mit dem Factor

$$e^{-\int p_1 dx}$$

multiplicirt.

Die Elemente $z_1, z_2, \cdots z_n$ des zu $y_1, y_2, \cdots y_n$ adjungirten Fundamentalsystems können als die Coordinaten der Tangentialebene (für $n = 3$ der Tangente im Sinne der gewöhnlichen Geometrie), die an die Integralcurve $\mathfrak{C}$ im Punkte $(y_1, y_2, \cdots y_n)$ gelegt ist, aufgefasst werden.

Die Gleichungen

$$z_\varkappa = z_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n) \tag{10}$$

stellen dann, wie wir sagen können, die Curve $\mathfrak{C}$ in Ebenencoordinaten (für $n = 3$, in Liniencoordinaten) dar.

Die Ausübung einer linearen Substitution auf die Coordinaten $x_1, x_2, \cdots x_n$ kann geometrisch in doppelter Weise gedeutet werden. Hält man den Punkt fest, dessen Coordinaten proportional sind den $x_1, x_2, \cdots x_n$, so kann man die Ausdrücke

$$\xi_\varkappa = \sum_{i=1}^{n} a_{\varkappa i} x_i \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n), \tag{11}$$

$$|a_{i\varkappa}| \neq 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

als die Coordinaten desselben Punktes in einem neuen Coordinatensysteme, dessen Fundamental-n-flach durch die n Ebenen

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\varkappa i} x_i = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

gebildet wird, auffassen. Betrachtet man dagegen das Coordinatensystem als fest, so wird durch die Gleichungen (11) jedem Punkte $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ des R_{n-1} ein wohlbestimmter anderer Punkt $(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)$ zugeordnet, und man nennt diese Art der Zuordnung bekanntlich eine collineare. Wir werden uns im Folgenden stets dieser letzteren Interpretation bedienen und dementsprechend jede lineare Transformation (11) als eine Collineation auffassen.

Es stehen dann also alle Integralcurven, die zu einer linearen Differentialgleichung (A) gehören, in collinearer

Beziehung zu einander, und jede Integralcurve wird durc[h] die Collineationen der Monodromiegruppe der Differential[-] gleichung in sich selbst transformirt.

Wenn die $y_1, y_2, \cdots y_n$ irgend eine lineare Substitution

$$S = (a_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

erfahren, so erfahren, wie wir in der Nr. 168 (S. 130) gezeigt habe[n] die entsprechenden Lösungen $u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}$ der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirte[n] Differentialgleichung die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Substitution

$$(b_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu),$$

deren Elemente die Subdeterminanten m^{ter} Ordnung der Determinant[e]

$$|a_{i\varkappa}| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

sind.

Wir schliessen daraus, dass die Monodromiegruppe de[r] $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung aus den $(n-m)^{\text{te[n]}}$ associirten Substitutionen der Monodromiegruppe h von (A[)] besteht; wir nennen diese Gruppe wohl auch die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte von h.

Aber auch zwischen der Transformationsgruppe von (A[)] und der seiner $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung be[-] steht eine ähnliche Beziehung.

In der That ist zunächst klar, dass die Gesammtheit der $(n-m)^{\text{te[n]}}$ associirten Substitutionen der Substitutionen einer Gruppe selbst wiede[r] eine Gruppe bildet, denn nach dem Satze über die Subdeterminante[n] componirter Systeme (Nr. 30, Bd. I, S. 93, Gleich. (5)) ist die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte einer aus zwei Substitutionen componirten Substitution [in] derselben Reihenfolge aus den $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten der beiden Com[-] ponenten zusammengesetzt.

Wir können also allgemein zu jeder Gruppe linear[er] homogener Substitutionen eine $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Grup[pe] herstellen.

Sei nun H die Transformationsgruppe von (A) und bilden wir d[ie] $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Gruppe $H^{(n-m)}$ von H. Bedeute ferner

$$\mathfrak{R}(u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu})$$

eine rationale Differentialfunction der $u_{1\varkappa}$, die bei den Transformatio[nen] von $H^{(n-m)}$ ungeändert bleibt, dann ist diese Function auch als rati[o-] nale Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$ darstellbar und bleibt a[ls] solche bei den Transformationen von H ungeändert; sie ist also ration[al] in x. Umgekehrt möge $\mathfrak{R}(u)$ rational durch x ausdrückbar sein, dan[n]

bleibt $\Re(u)$, als Function der $y_1, y_2, \cdots y_n$ dargestellt, bei den Transformationen von H ungeändert, also als Function der $u_{1\varkappa}$ bei den Transformationen von $H^{(n-m)}$. Das heisst, die Gruppe $H^{(n-m)}$ besitzt die beiden durch den Picard-Vessiot'schen Doppelsatz ausgedrückten Eigenschaften der Transformationsgruppe der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung, sie muss also nach einer in der Nr. 151 (S. 73) gemachten Bemerkung mit dieser Transformationsgruppe identisch sein.

Dividirt man die Elemente der ersten einer Substitution S associirten Substitution durch die Determinante von S, so erhält man die zu S reciproke Substitution. Adjungirte Fundamentalsysteme erfahren nach dem Satze der Nr. 23 (Bd. I, S. 65) stets einander reciproke Substitutionen. Also haben wir den Satz:

Die Transformationsgruppe und die Monodromiegruppe der einer Differentialgleichung adjungirten Differentialgleichung bestehen aus den reciproken Substitutionen der entsprechenden Gruppen der ursprünglichen Differentialgleichung.

Oder, da beide Gruppen aus paarweise inversen Transformationen bestehen und (Nr. 30, Bd. I, S. 95; vergl. Nr. 150, S. 70) die inverse der reciproken die transponirte ursprüngliche Substitution ist, so können wir auch sagen:

Transformationsgruppen sowohl wie Monodromiegruppen adjungirter Differentialgleichungen gehen durch Transposition ihrer Substitutionen auseinander hervor.

Da Differentialgleichungen derselben Art und gleicher Ordnung dieselbe Transformations- und Monodromiegruppe besitzen, wenn man entsprechende, d. h. durch die die Artbeziehung darstellende Relation mit einander verknüpfte Fundamentalsysteme zu Grunde legt, so gelten dieselben Beziehungen auch zwischen der Gruppe einer Differentialgleichung (A) und der Gruppe irgend einer mit der adjungirten von (A) zur selben Art gehörigen Differentialgleichung. Wenn wir uns also einer in der Invariantentheorie der algebraischen Formen gebräuchlichen Ausdrucksweise bedienen, wonach zwei Systeme von Grössen, die einander reciproke Substitutionen erleiden, als contragredient bezeichnet werden (vergl. Nr. 23, Bd. I, S. 66), so können wir sagen:

Ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ von (A) ist mit dem entsprechenden Fundamentalsysteme $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$ einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, die mit der Adjungirten von (A) zur selben Art gehört, contragredient in Bezug auf alle Transformationen der Transformationsgruppe von (A).

Sind zwei Variabelnsysteme

$$x_1, x_2, \cdots x_n,$$
$$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$$

contragredient in Bezug auf eine Substitution S, welche die x_1, erfahren, so folgt aus einfachen Determinantensätzen, dass die Form

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n$$

bei Anwendung der Substitution S ungeändert bleibt. Bilden den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^{(\alpha)}\xi_i^{(\beta)},$$

wo α, β irgendwelche der Zahlen 0, 1, 2, $\cdots$ bedeuten, so bl selbe bei allen Substitutionen der Transformationsgruppe H ungeändert. Dieser Ausdruck ist aber eine rationale Differe tion der $y_1, y_2, \cdots y_n$, er hat folglich einen in x rat Werth. Als Beispiel hierfür können die in der Nr. 23 (Bd. Gleich. (19)) aufgestellten Relationen zwischen den Elementen ac Fundamentalsysteme gelten.

170. **Algebraische Beziehungen zwischen den Elementen Fundamentalsystems der höheren Associirten. Princip der**

Die geometrischen Sätze über die Coordinaten der Ebe schiedener Stufe lassen sich nun in ebenso viele Sätze über ziehungen zwischen den Fundamentalsystemen der zu (A) a Differentialgleichungen umbilden.

Besonders wichtig ist der Satz, dass zwischen den Co der Ebenen 2ter, 3ter, $\cdots (n-2)^{\text{ter}}$ Stufe identische homoge braische Beziehungen von höherem als dem ersten Grade best folgt aus demselben:

Die Elemente eines Fundamentalsystems der 2ten, $(n-2)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung befriediger lineare homogene algebraische Gleichungen.

Wir wollen für den Fall einer Differentialgleichung vierter

$$(A_4) \qquad \frac{d^4y}{dx^4} + p_1\frac{d^3y}{dx^3} + p_2\frac{d^2y}{dx^2} + p_3\frac{dy}{dx} + p_4y = 0$$

die zwischen den Integralen der zweiten associirten Differentialg die also in diesem Falle von der sechsten Ordnung ist, be Relation herleiten. Wir bilden aus dem Systeme

$$\begin{pmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ y_1', & y_2', & y_3', & y_4' \end{pmatrix}$$

die sechs möglichen Determinanten zweiter Ordnung

$$y_i y_\varkappa' - y_\varkappa y_i' = \omega_{i\varkappa} \qquad (i<\varkappa),$$

dann bilden diese im Allgemeinen ein Fundamentalsystem der zweiten associirten Differentialgleichung. Der Laplace'sche Determinantensatz, auf die identisch verschwindende Determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \end{vmatrix}$$

angewandt, liefert die gesuchte Beziehung

$$(\gamma) \qquad \omega_{12}\omega_{34} - \omega_{13}\omega_{24} + \omega_{14}\omega_{23} = 0;$$

es ist die aus den Elementen der analytischen Geometrie wohlbekannte Gleichung, die zwischen den Plücker'schen Coordinaten einer geraden Linie des gewöhnlichen dreidimensionalen Raumes besteht.

Um die analogen Relationen im allgemeinsten Falle aufstellen zu können, knüpfen wir an das in der neueren Geometrie so fruchtbar gewordene Princip der Dualität an.

Aus dem Begriffe des ebenen $(n-1)$-fach ausgedehnten Raumes R_{n-1} folgt, dass ebenso wie $(n-1)$ Punkte (Ebenen $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe) von allgemeiner Lage eine Ebene (erster Stufe) bestimmen, auch umgekehrt $(n-1)$ Ebenen von allgemeiner Lage einen Punkt (ihren Schnittpunkt) bestimmen. Allgemein wird durch $(n-m)$ Ebenen von allgemeiner Lage eine Ebene m^{ter} Stufe bestimmt, ebenso wie $(n-m)$ Punkte gerade zur Bestimmung einer Ebene $(n-m)^{\text{ter}}$ Stufe hinreichen. Daraus folgt, dass jeder Satz der Geometrie des R_{n-1}, der sich auf Lagenverhältnisse von ebenen Gebilden bezieht, in einen ebenfalls richtigen Satz übergeht, wenn man darin an die Stelle des Wortes „Ebene" das Wort „Punkt", und allgemein an die Stelle des Wortes „Ebene m^{ter} Stufe" das Wort „Ebene $(n-m)^{\text{ter}}$ Stufe", für $m = 2, 3, \cdots n-2$, setzt. Dies ist das Princip der Dualität. Es stehen also im R_{n-1}

die Ebene m^{ter} Stufe | und die Ebene $(n-m)^{\text{ter}}$ Stufe

$$(m = 1, 2, \cdots n-1)$$

einander dualistisch gegenüber. Je nachdem n gerade oder ungerade ist, giebt es oder giebt es nicht ein sich selbst dualistisches ebenes Gebilde.

Im Sinne dieser Auffassung werden wir also zunächst den als Punktcoordinaten gedeuteten Lösungen $y_1, y_2, \cdots y_n$ der gegebenen Differentialgleichung (A) die entsprechenden Lösungen der ersten associirten Differentialgleichung oder die von denselben nur durch den gemeinsamen Factor

(12) $$\frac{\text{const.}}{D(y_1, y_2, \cdots y_n)} = e^{\int p_1 dx}$$

verschiedenen Elemente des adjungirten Fundamentalsystems $z_1, z_2, \cdots z_n$ der zu (A) adjungirten Differentialgleichung als Ebenencoordinaten gegenüberstellen. Die bekannten Beziehungen zwischen adjungirten Fundamentalsystemen und die in der Nr. 169 (S. 137) aufgestellten Sätze entsprechen der dualistischen Beziehung zwischen Punkt und Ebene. Entsprechend werden wir dann allgemein die Lösungen

$$u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu} \qquad (\nu = n_m)$$

der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung, die wir durch $(A^{(n-m)})$ bezeichnen wollen, mit den Lösungen der m^{ten} associirten Differentialgleichung $(A^{(m)})$ in Beziehung zu setzen suchen.

Wir bezeichnen die zu der Subdeterminante m^{ter} Ordnung $u_{i\varkappa}$ von $D(y_1, y_2, \cdots y_n)$ adjungirte Subdeterminante $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung durch

$$v_{\nu-i+1, \nu-\varkappa+1},$$

so dass also, wenn, abgesehen vom Vorzeichen,

$$u_{i\varkappa} = \left| y_\alpha^{(\beta-1)} \right| \qquad (\alpha = i_1, i_2, \cdots i_m;\ \beta = \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_m)$$

ist, ebenfalls abgesehen vom Vorzeichen

$$v_{\nu-i+1, \nu-\varkappa+1} = \left| y_\alpha^{(\beta-1)} \right| \qquad (\alpha = i_1', i_2', \cdots i_{n-m}';\ \beta = \varkappa_1', \varkappa_2', \cdots \varkappa_{n-m}')$$

zu nehmen ist, wo die beiden Zahlenreihen

$$i_1, i_2, \cdots i_m, i_1', i_2', \cdots i_{n-m}',$$
$$\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_m, \varkappa_1', \varkappa_2', \cdots \varkappa_{n-m}'$$

je eine Permutation der Zahlen $1, 2, \cdots n$ darstellen. Die Anzahl der $v_{i\varkappa}$ stimmt dann wegen der Gleichung

$$n_m = n_{(n-m)} = \nu$$

mit der Anzahl der $u_{i\varkappa}$ überein; überdies denken wir uns die Bezeichnung so gewählt, dass

(13) $$v_{1\varkappa} = \left| y_\alpha^{(\beta-1)} \right| \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n-m;\ \beta = \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_{n-m})$$

ist, so dass also die

$$v_{11}, v_{12}, \cdots v_{1\nu}$$

das den $y_1, y_2, \cdots y_n$ entsprechende Fundamentalsystem der m^{ten} associirten Differentialgleichung $(A^{(m)})$ darstellen.

Dann bestehen nach dem Laplace'schen Determinantensatze die Gleichungssyteme

$$(14) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\nu} u_{i\varkappa} v_{\nu-i+1,\,\nu-\varkappa+1} = D(y_1, y_2, \cdots y_n),$$

$$(15) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\nu} u_{\lambda\varkappa} v_{\nu-i+1,\,\nu-\varkappa+1} = 0, \quad \lambda \neq i;$$

$$(16) \qquad \sum_{i=1}^{\nu} u_{i\varkappa} v_{\nu-i+1,\,\nu-\varkappa+1} = D(y_1, y_2, \cdots y_n),$$

$$(17) \qquad \sum_{i=1}^{\nu} u_{i\lambda} v_{\nu-i+1,\,\nu-\varkappa+1} = 0, \quad \lambda \neq \varkappa,$$

wenn wir uns die Vorzeichen der $u_{i\varkappa}, v_{i\varkappa}$ in geeigneter Weise gewählt denken.

Diesen Gleichungen sind noch die folgenden an die Seite zu stellen.

Bedeuten $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-m}$ irgendwelche $(n-m)$ linear unabhängige Lösungen von (A) und $v_\varkappa$ diejenige Determinante, die aus den $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-m}$ nebst deren Ableitungen ebenso gebildet ist, wie $v_{i\varkappa}$ aus den $y_1, y_2, \cdots y_{n-m}$ nebst deren Ableitungen, so bestehen die den Gleichungen (α) (Nr. 167, S. 127) analogen Beziehungen

$$(\alpha') \qquad v_\varkappa = \psi_{\varkappa 0} v_1 + \psi_{\varkappa 1} v_1' + \cdots + \psi_{\varkappa,\,\nu-1} v_1^{(\nu-1)},$$

wo die $\psi_{\varkappa i}$ rationale Functionen von x bedeuten. Wenn nun die n Integrale

$$\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-m}$$

ein Fundamentalsystem von (A) constituiren, so ist die Determinante

$$(18) \qquad D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-m}) = \text{const.}\, e^{-\int p_1 dx};$$

bezeichnen wir also mit $v_{\nu-i+1}$ die zur Subdeterminante m^{ter} Ordnung u_i adjungirte Subdeterminante $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung von (18), so ist nach dem Laplace'schen Satze

$$\sum_{i=1}^{\nu} u_i v_{\nu-i+1} = \text{const.}\, e^{-\int p_1 dx}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung die sich aus (α), (α') ergebenden Werthe ein, so erhalten wir linker Hand einen Ausdruck von der Gestalt

$$\sum_{\alpha=0}^{\nu-1}\sum_{\beta=0}^{\nu-1} u_1^{(\alpha)} v_1^{(\beta)} P_{\alpha\beta},$$

wo die $P_{\alpha\beta}$ rationale Functionen von x bedeuten, d. h. eine **bilineare Form** von u_1, v_1 und deren $(\nu - 1)$ ersten Ableitungen. Schreiben wir u an die Stelle von u_1, v an die Stelle von v_1, so ist also

$$(19) \qquad Z = \sum_{\alpha=0}^{\nu-1}\sum_{\beta=0}^{\nu-1} u^{(\alpha)} v^{(\beta)} P_{\alpha\beta} = \text{const.}\, e^{-\int p_1 dx},$$

und hierin bedeuten nun u, v irgend zwei geeignet gewählte Integrale der Differentialgleichungen $(A^{(n-m)})$, $(A^{(m)})$. Insbesondere ist die Gleichung (19) stets erfüllt für

$$u = u_{1\varkappa}, \quad v = v_{1,\nu-\varkappa+1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu);$$

für diese Integralpaare folgt dieselbe auch unmittelbar aus den Gleichungen (16).

Wenn n eine **gerade Zahl**

$$n = 2m$$

ist, so fallen die Differentialgleichungen $(A^{(m)})$, $(A^{(n-m)})$ zusammen, die $v_{i\varkappa}$ sind mit den $u_{i\varkappa}$ identisch, und die im Allgemeinen bilineare Form Z verwandelt sich in eine **quadratische Form**

$$(20) \qquad \sum_{\alpha=0}^{\nu-1}\sum_{\beta=0}^{\nu-1} u^{(\alpha)} u^{(\beta)} P_{\alpha\beta} = \text{const.}\, e^{-\int p_1 dx}.$$

Ferner folgt in diesem Falle aus (15) für $\lambda = 1$, $i = \nu$ die Beziehung

$$(21) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\nu} u_{1\varkappa} u_{1,\nu-\varkappa+1} = 0,$$

die für $n = 4$ in die für die Differentialgleichung vierter Ordnung gefundene Beziehung (γ) (S. 139) übergeht.

171. Beziehungen zwischen den Adjungirten der associirten Differentialgleichungen.

Wir wollen nun die **Adjungirte** der Differentialgleichung $(A^{(n-m)})$ aufsuchen, oder, genauer gesprochen, die **erste Associirte** dieser Differentialgleichung.

Zufolge unserer Voraussetzung bilden die

$$u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}$$

ein Fundamentalsystem von $(A^{(n-m)})$; die Integrale der ersten Associirten von $(A^{(n-m)})$ sind also nichts Anderes, wie die zu den Elementen

$$u_{11}^{(\nu-1)},\ u_{12}^{(\nu-1)},\ \cdots\ u_{1\nu}^{(\nu-1)}$$

gehörigen Subdeterminanten der Determinante

$$\left|u_{1\varkappa}^{(i-1)}\right| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu);$$

wir bezeichnen die zu $u_{1\varkappa}^{(\nu-1)}$ gehörige dieser Subdeterminanten durch $w_{1\varkappa}$. Dann folgt zunächst aus der in der Nr. 167 (S. 129) gefundenen Gleichung

(22)
$$\underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots\nu)}{\left|u_{1\varkappa}^{(i-1)}\right|} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \overset{1}{\varphi}_{11} & \overset{1}{\varphi}_{12} & \cdots & \overset{1}{\varphi}_{1\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{(\nu-1)}{\varphi}_{11} & \overset{(\nu-1)}{\varphi}_{12} & \cdots & \overset{(\nu-1)}{\varphi}_{1\nu} \end{vmatrix} \cdot \underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots\nu)}{\left|u_{i\varkappa}\right|}$$

nach dem Satze über die Subdeterminanten componirter Systeme (Nr. 30, Bd. I, S. 93)

(23)
$$w_{1\varkappa} = \sum \left|\overset{(i-1)}{\varphi}_{1h}\right| \left|u_{h\lambda}\right| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots \nu-1, \\ h = h_1, h_2, \cdots h_{\nu-1}, \\ \lambda = 1, 2, \cdots \varkappa-1, \varkappa+1, \cdots \nu \end{pmatrix},$$

wo sich das Summenzeichen auf die ν möglichen Combinationen

$$h_1,\ h_2,\ \cdots\ h_{\nu-1}$$

von je $(\nu - 1)$ der Zahlen $1, 2, \cdots \nu$ bezieht und

$$\overset{0}{\varphi}_{11} = 1,\quad \overset{0}{\varphi}_{1\lambda} = 0 \qquad (\lambda > 1)$$

zu nehmen ist.

Bilden wir nun das Determinantenproduct

(24)
$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1\nu} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{\nu1} & u_{\nu2} & \cdots & u_{\nu\nu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_{1\nu} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ v_{1,\nu-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{11} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1\nu} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D & u_{\nu2} & u_{\nu3} & \cdots & u_{\nu\nu} \end{vmatrix},$$

wo D kurz für $D(y_1, y_2, \cdots y_n)$ geschrieben wurde und die Richtigkeit der Gleichung (24) sofort erhellt, wenn man die Gleichungen (14), (15) beachtet, so ist also, abgesehen vom Vorzeichen,

(25)
$$\underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots\nu)}{\left|u_{i\varkappa}\right|} \cdot v_{1\nu} = D(y_1, y_2, \cdots y_n) \underset{\begin{pmatrix} h = 1, 2, \cdots \nu-1 \\ \lambda = 2, 3, \cdots \nu \end{pmatrix}}{\left|u_{h\lambda}\right|}.$$

Ebenso folgt allgemein

$$\underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots\nu)}{\left|u_{i\varkappa}\right|} \cdot v_{\alpha\beta} = D(y_1, y_2, \cdots y_n) \underset{\begin{pmatrix} h = 1, \cdots \nu-\alpha, \nu-\alpha+2, \cdots \nu \\ \lambda = 1, \cdots \nu-\beta, \nu-\beta+2, \cdots \nu \end{pmatrix}}{\left|u_{h\lambda}\right|}.$$

Setzen wir die sich hieraus ergebenden Werthe in die rechte Seite der Gleichung (23) ein, so erhalten wir mit Rücksicht auf den F r a n k e schen Satz

$$w_{1\varkappa} = [D(y_1, y_2, \cdots y_n)]^{(n-1)(m-1)-1} \sum_{h=2}^{\nu} \Phi_h v_{\nu-h+1, \nu-\varkappa+1},$$

wo die Φ_h rationale Functionen von x bedeuten, und wenn wir noch die sich aus (α') (S. 141) ergebenden Gleichungen

$$v_{\nu-h+1, \mu} = \psi_{\nu-h+1, 0} v_{1\mu} + \psi_{\nu-h+1, 1} v_{1\mu}' + \cdots + \psi_{\nu-h+1, \nu-1} v_{1\mu}^{(\nu-1)}$$

beachten,

$$(26) \qquad w_{1\varkappa} = [D(y_1, y_2, \cdots y_n)]^{(n-1)(m-1)-1} \sum_{h=0}^{\nu-1} \Psi_h v_{1, \nu-\varkappa+1}^{(h)}$$
$$(\varkappa = 1, 2, \cdots \nu),$$

wo die Ψ_h ebenfalls rationale Functionen von x sind.

Die Integrale der zu $(A^{(n-m)})$ adjungirten Differentialgleichung gehen aus den

$$w_{11}, w_{12}, \cdots w_{1\nu}$$

durch Division mit

$$\left|u_{i\varkappa}^{(i-1)}\right| = P_\nu \left|u_{i\varkappa}\right| = P_\nu [D(y_1, y_2, \cdots y_n)]^{(n-1)(m-1)}$$

hervor, die Gleichung (26) enthält also den Satz:

Die lineare Differentialgleichung, welche aus der Adjungirten der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung von (A) dadurch hervorgeht, dass man die abhängige Variable dieser Adjungirten mit $D(y_1, y_2, \cdots y_n)$ multiplicirt, gehört mit der m^{ten} Associirten zur selben Art.

In diesem Satze findet die dualistische Beziehung zwischen den Ebenen $(n-m)^{\text{ter}}$ und m^{ter} Stufe des R_{n-1} ihren Ausdruck.

Drittes Kapitel.

172. Transformation der Differentialgleichung. Canonische Form.

Um den am Schlusse der vorigen Nummer ausgesprochenen Satz und noch einige andere sich an denselben anschliessende Sätze in eleganterer Form darstellen zu können, wenden wir uns jetzt einer principiell wichtigen Betrachtung zu, die mit der Interpretation der $y_1, y_2, \cdots y_n$ als homogener Punktcoordinaten zusammenhängt.

Da die homogenen Coordinaten eines Punktes nur abgesehen von einem allen gemeinsamen Factor bestimmt sind, so werden wir dieselbe Curve $\mathfrak{C}$ erhalten, wenn wir die Integrale

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots y_n(x)$$

sämmtlich mit einem Factor multipliciren, der auch noch eine Function von x sein kann. Dies kommt aber darauf hinaus, dass wir durch die Gleichung

$$(1) \qquad y = \lambda \bar{y},$$

wo λ eine Function von x bedeutet, in die Differentialgleichung (A) (S. 111) eine neue abhängige Variable einführen. Die sich für $\bar{y}$ ergebende, transformirte Differentialgleichung lautet:

$$(\bar{A}) \qquad \bar{y}^{(n)} + \bar{p}_1 \bar{y}^{(n-1)} + \bar{p}_2 \bar{y}^{(n-2)} + \cdots + \bar{p}_n \bar{y} = 0,$$

wo (vergl. Nr. 81, Bd. I, S. 287)

$$(2) \qquad \begin{cases} \bar{p}_1 = p_1 + n \dfrac{\lambda'}{\lambda}, \\ \bar{p}_2 = p_2 + (n-1) p_1 \dfrac{\lambda'}{\lambda} + n_2 \dfrac{\lambda''}{\lambda}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \bar{p}_n = p_n + p_{n-1} \dfrac{\lambda'}{\lambda} + \cdots + \dfrac{\lambda^{(n)}}{\lambda} \end{cases}$$

gesetzt würde. Zufolge der ersten Gleichung des Systems (2) muss der Factor λ der Gleichung

$$(3) \qquad \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{n} (\bar{p}_1 - p_1)$$

genügen, d. h. es muss

$$(4) \qquad \lambda = e^{\frac{1}{n}\int(\bar{p}_1 - p_1)dx}$$

sein. Wir sehen hieraus, dass wir den Coefficienten $\bar{p}_1$ noch **willkü** **lich** vorschreiben können, ist dieser aber fixirt, so sind die übrig Coefficienten der transformirten Differentialgleichung auch vollkomm bestimmt.

Wenn **insbesondere** $\bar{p}_1$ **als rationale Function gewäh wird**, so sind die Coefficienten der transformirten Diff rentialgleichung, falls man λ durch die Gleichung (4) b stimmt, stets rationale Functionen von x, da sich ja nach (

$$\frac{\lambda^{(x)}}{\lambda} \qquad (x = 1, 2, 3 \cdots)$$

als rationale Function von x berechnen lässt.

Die Gesammtheit der Transformationen (1), wo λ durch ei Gleichung von der Form (3) mit willkürlichem $\bar{p}_1$ definirt wird, bild offenbar eine **Gruppe**. Dieselbe hängt von den Bestimmungsstück der noch willkürlich zu wählenden Function $\bar{p}_1$ als Parametern ab, ist also von wesentlich anderer Beschaffenheit, wie die im neunt Abschnitte betrachteten Gruppen. Denken wir uns z. B. $\bar{p}_1$ als rat nale Function und die Gradzahlen des Zählers und Nenners von fixirt, so stellt die Gleichung (1) eine continuirliche Schaar die Gruppe dar, die von einer bestimmten endlichen Anzahl von Pa metern abhängt. Solcher Schaaren enthält aber unsere Gruppe u **endlich viele**, während die im neunten Abschnitte untersuch Gruppen stets nur aus einer **endlichen** Anzahl continuirlicher Schaa zusammengesetzt waren. **Nichtsdestoweniger lassen sich in g wissem Sinne auch für diese Gruppen Differentialinvariant aufstellen.**

Wir können nämlich an Stelle der Gruppe (1) die durch die Gl chungen (2) dargestellte Gruppe von Transformationen der $p_1, p_2, \cdots$ in die $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \cdots \bar{p}_n$ betrachten und fragen nun: giebt es Differenti functionen der $p_1, p_2, \cdots p_n$, die formell ungeändert bleiben, we man in denselben die $p_1, p_2, \cdots p_n$ durch die $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \cdots \bar{p}_n$ ersetzt

Bilden wir

$$\mu = e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}, \quad \bar{\mu} = e^{-\frac{1}{n}\int \bar{p}_1 dx},$$

so ist nach Gleichung (4)

$$\lambda = \frac{\mu}{\bar{\mu}};$$

wenn also

$$y = \mu \mathfrak{y}, \quad \bar{y} = \bar{\mu}\bar{\mathfrak{y}}$$

gesetzt wird, so erhalten wir

$$\mathfrak{y} = \bar{\mathfrak{y}}.$$

In der Differentialgleichung für $\mathfrak{y}$, die wir schon in der Nr. 81 (Bd. I, S. 288) kennen gelernt haben, ist der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung gleich Null; dieselbe hat also die Form

$$(\mathfrak{A}) \qquad \mathfrak{y}^{(n)} + \mathfrak{p}_2 \mathfrak{y}^{(n-2)} + \mathfrak{p}_3 \mathfrak{y}^{(n-3)} + \cdots + \mathfrak{p}_n \mathfrak{y} = 0.$$

Die $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \cdots \mathfrak{p}_n$ sind rationale ganze Functionen der $p_1, p_2, \cdots p_n$ und ihrer Ableitungen; man findet

$$\mathfrak{p}_2 = -\frac{n-1}{2} p_1' - \frac{n-1}{2n} p_1^2 + p_2,$$

$$\mathfrak{p}_3 = -\frac{1}{3} \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} p_1'' + \frac{2}{3n^2} \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} p_1^3 - \frac{n-2}{n} p_1 p_2 + p_3,$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}_4 = &-\frac{1}{4}(n-1)_3 p_1^{(3)} + \frac{3}{4n}(n-1)_3 p_1'^2 + \frac{3}{2n^2}(n-1)_3 p_1^2 p_1' \\ &- \frac{3}{4n^3}(n-1)_3 p_1^4 - \frac{1}{n}(n-2)_2 p_1' p_2 + \frac{1}{n^2}(n-2)_2 p_1^2 p_2 \\ &- \frac{n-3}{n} p_1 p_3 + p_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}_5 = &(n-1)_4 \left\{ -\frac{1}{5} p_1^{(4)} + \frac{2}{n} p_1' p_1'' + \frac{2}{n^2} p_1^2 p_1'' - \frac{4}{n^3} p_1^3 p_1' + \frac{4}{5n^4} p_1^5 \right\} \\ &+ (n-2)_3 \left\{ -\frac{1}{n} p_1'' p_2 + \frac{3}{n^2} p_1 p_1' p_2 - \frac{1}{n^3} p_1^3 p_2 \right\} \\ &+ (n-3)_2 \left\{ -\frac{1}{n} p_1' p_3 + \frac{1}{n^2} p_1^2 p_3 \right\} - \frac{n-4}{n} p_1 p_4 + p_5,\end{aligned}$$

. . . .

Es sind aber offenbar die $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \cdots \mathfrak{p}_n$ genau dieselben rationalen ganzen Functionen der $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \cdots \bar{p}_n$ und ihrer Ableitungen, also sind es die gesuchten Differentialinvarianten der durch die Gleichungen (2) bei willkürlichem λ dargestellten Gruppe, und wir können sagen, dass die Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) selbst gewissermassen eine Invariante für die Transformationen (1) der Differentialgleichung (A) bildet.

Für diejenigen Betrachtungen, die sich an die Interpretation der $y_1, y_2, \cdots y_n$ als homogener Coordinaten eines Punktes im R_{n-1} anschliessen, werden wir demnach zweckmässig von der Form ($\mathfrak{A}$) der Differentialgleichung als canonischer Form Gebrauch machen können.

In Bezug auf diese canonische Form hatten wir bereits in der Nr. 81 (Bd. I, S. 288) gezeigt, dass für dieselbe

1) die Determinante eines jeden Fundamentalsystems gleich einer Constanten,

2) die Determinante jeder Substitution, die ein Funda- mentalsystem bei einem Umlaufe der unabhängigen Variabeln erleidet, gleich Eins ist.

Die letztere Eigenschaft können wir auch so ausdrücken, dass wir sagen, die Monodromiegruppe der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) sei uni- modular (vergl. a. a. O.), oder sie sei eine Untergruppe der speciellen linearen Gruppe $\bar{L}$ (Nr. 156, S. 92). Es ist aber auch die Trans- formationsgruppe von ($\mathfrak{A}$) entweder die specielle lineare Gruppe $\bar{L}$ selbst oder doch in $\bar{L}$ als Untergruppe enthalten. In der That ist offenbar

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n)$$

eine Differentialfunction, die bei den Transformationen von $\bar{L}$ und auch nur bei diesen linearen Transformationen ungeändert bleibt; die Trans- formationsgruppe einer Differentialgleichung (A) mit rationalen Coeffi- cienten und dem Fundamentalsysteme $y_1, y_2, \cdots y_n$ wird also dann und nur dann eine Untergruppe von $\bar{L}$ (beziehungsweise $\bar{L}$ selbst) sein, wenn

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n) = \text{const.}\, e^{-\int p_1 dx}$$

rational in x, d. h. wenn der Coefficient p_1 der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung die logarithmische Ableitung einer rationalen Function ist. Das letztere ist ja aber der Fall, wenn dieser Coefficient wie in ($\mathfrak{A}$) den Werth Null hat.

Beiläufig bemerken wir, dass sich demnach durch eine Transforma- tion von der Form (1) jede lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten in eine solche transformiren lässt, deren Transformations- gruppe eine unimodulare ist; man braucht zu dem Ende λ nur durch die Gleichung (4) zu bestimmen, nachdem man für $\bar{p}_1$ die logarithmische Ableitung irgend einer rationalen Function gesetzt hat.

173. Integralquotienten. Associirte Differentialgleichungen für die canonische Form.

Bei Anwendung der Transformation (1) bleibt der Quotient irgend zweier particularer Integrale der Differentialgleichung (A) ungeändert. Wir schliessen daraus, dass die linke Seite der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) nur von den Integralquotienten, nicht wie im Allgemeinen von den Integralen eines Fundamentalsystems selbst abhängen kann. Dies bestätigt sich sehr einfach, indem wir beachten, dass, wenn

$$y_\varkappa = \mu\, \mathfrak{y}_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

gesetzt wird, so dass also

$$\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$$

ein Fundamentalsystem von ($\mathfrak{A}$) bedeutet, zufolge der Gleichung (12) der Nr. 22 (Bd. I, S. 60)

$$D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n) = \mathfrak{y}_1^n D\left(1, \frac{\mathfrak{y}_2}{\mathfrak{y}_1}, \cdots \frac{\mathfrak{y}_n}{\mathfrak{y}_1}\right) \tag{5}$$

ist. Setzen wir also die Quotienten

$$\frac{\mathfrak{y}_\varkappa}{\mathfrak{y}_1} = \frac{y_\varkappa}{y_1} = \eta_{\varkappa-1} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n), \tag{6}$$

und bezeichnen den constanten Werth der Determinante (5) durch c, so ist

$$\mathfrak{y}_1^n = \frac{c}{D(\eta_1', \eta_2', \cdots \eta_{n-1}')}, \tag{7}$$

da offenbar

$$D\left(1, \frac{\mathfrak{y}_2}{\mathfrak{y}_1}, \cdots \frac{\mathfrak{y}_n}{\mathfrak{y}_1}\right) = \begin{vmatrix} \eta_1' & \eta_2' & \cdots & \eta_{n-1}' \\ \eta_1'' & \eta_2'' & \cdots & \eta_{n-1}'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_1^{(n-1)} & \eta_2^{(n-1)} & \cdots & \eta_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ist.

Also ist, abgesehen von einem constanten Factor, ein Fundamentalsystem von ($\mathfrak{A}$) und damit diese Differentialgleichung selbst bestimmt, wenn die $(n-1)$ Integralquotienten (6) von ($\mathfrak{A}$) oder (A) bekannt sind. Die Betrachtung der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) an Stelle der allgemeinen (A) kommt somit darauf hinaus, dass wir statt eines Fundamentalsystems von Integralen ein — so wollen wir uns ausdrücken — Fundamentalsystem von Integralquotienten (6) untersuchen. Hierin liegt die principielle Bedeutung der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$).

Bemerken wir ferner, dass die Eigenschaft 1) der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) für die Form derselben auch charakteristisch ist. In der That folgt daraus, dass die Determinante eines Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdots y_n$ einer Differentialgleichung (A) gleich einer Constanten ist,

$$e^{-\int p_1 dx} = \text{const.},$$

also $p_1 = 0$, d. h. der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung verschwindet. Wir schliessen hieraus, dass, wenn in einer Differentialgleichung der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung verschwindet, dies auch nothwendig für die adjungirte Differentialgleichung der Fall sein muss, ein Ergebniss, welches übrigens auch unmittelbar aus der expliciten Form des adjungirten Differentialausdruckes (Nr. 24, Bd. I, S. 69) abzulesen ist.

Denken wir uns nun für die Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) die a ciirten Differentialgleichungen der verschiedenen Stufen aufgest indem wir dabei die für (A) eingeführten Bezeichnungen festhalten nur statt der lateinischen Buchstaben deutsche schreiben.

Dann ist zunächst die erste associirte Differentialgleichung von mit der zu ($\mathfrak{A}$) adjungirten Differentialgleichung identisch, und Theorem der Nr. 171 (S. 144) lässt sich einfach so aussprechen:

Die Adjungirte der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Different gleichung von (A) gehört mit der m^{ten} Associirten zur sell Art.

Wir wollen zwei Fundamentalsysteme der $(n-m)^{\text{ten}}$ und der associirten Differentialgleichung dann als einander entsprechen bezeichnen, wenn das eine aus dem adjungirten des anderen durch die Artbeziehung darstellenden Relationen hervorgeht. Offenbar s dann diejenigen Fundamentalsysteme von ($\mathfrak{A}^{(n-m)}$) und ($\mathfrak{A}^{(m)}$) einan entsprechend, die einem und demselben Fundamentalsysteme von entsprechen, d. h. also z. B.

$$\mathfrak{u}_{11},\ \mathfrak{u}_{12},\ \cdots\ \mathfrak{u}_{1\nu} \quad \text{und} \quad \mathfrak{v}_{1\nu},\ \mathfrak{v}_{1\,\nu-1},\ \cdots\ \mathfrak{v}_{11}.$$

Diese Fundamentalsysteme sind demnach contragredient und es gel für dieselben die allgemeinen, in der Nr. 169 (S. 138) für derart Systeme aufgestellten Sätze. Es ist also

$$\sum_{\varkappa=1}^{\nu} \mathfrak{u}_{1\varkappa}^{(\alpha)} \mathfrak{v}_{1,\,\nu-\varkappa+1}^{(\beta)}$$

für irgendwelche nicht negativen, ganzzahligen Werthe der α, β gle einer rationalen Function von x. Beispiele hierfür liefern Relationen (14), (15) der Nr. 170 (S. 141).

In Bezug auf die associirte Differentialgleichung ($\mathfrak{A}^{(n-m)}$) ist n zu bemerken, dass für dieselbe der Coefficient der $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Ableit im Allgemeinen zwar nicht verschwindet, aber jedenfalls gleich logarithmischen Ableitung einer rationalen Function wird. In That ist

$$\left|\mathfrak{u}_{i\varkappa}\right|_{(i,\,\varkappa=1,\,2,\,\cdots\,\nu)} = [D(\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{y}_2,\ \cdots\ \mathfrak{y}_n)]^{(n-1)(m-1)} = \text{const.},$$

und folglich nach Gleichung (22) Nr. 171 (S. 143)

$$D(\mathfrak{u}_{11},\ u_{12},\ \cdots\ \mathfrak{u}_{1\nu}) = \Phi_m,$$

wo Φ_m eine rationale Function von x bedeutet. Es sind also a für die associirten Differentialgleichungen von ($\mathfrak{A}$) Tr formations- und Monodromiegruppen unimodular.

Wenn in einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung zwar nicht Null, aber gleich der logarithmischen Ableitung einer rationalen Function ist, so bleiben die für die Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) eben abgeleiteten Sätze dennoch bestehen, d. h. es sind dann auch in den $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichungen die Coefficienten der $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Ableitung logarithmische Ableitungen rationaler Functionen, und die Adjungirte der $(n-m)^{\text{ten}}$ Associirten gehört mit der m^{ten} Associirten zur selben Art. Von dieser Bemerkung werden wir später Gebrauch zu machen haben.

Es lassen sich noch zahlreiche Sätze über die associirten Differentialgleichungen aufstellen, namentlich solche, die sich auf die Associirten der Associirten beziehen, z. B. Beziehungen zwischen den Associirten einer Differentialgleichung und denen ihrer Adjungirten. Allgemein gilt der von Herrn Forsyth aufgestellte Satz, dass das System der abhängigen Variablen der zu einer Differentialgleichung associirten Differentialgleichungen insofern ein in sich abgeschlossenes ist, als durch Bildung von Associirten der associirten Differentialgleichungen immer nur solche abhängige Variable auftreten, die durch die Elemente jenes Systems ganz und rational darstellbar sind. Wir begnügen uns mit diesem flüchtigen Hinweise, indem wir bemerken, dass die genaue Formulirung und Herleitung dieser Sätze insofern keine wesentlichen Schwierigkeiten darbietet, als dieselben auf bekannten Determinantensätzen (vergl. die Abhandlung Franke's im Bd. 61 des Crelle'schen Journals) beruhen. Wir haben uns auf die Darlegung derjenigen Beziehungen beschränkt, die bis jetzt bei speciellen Problemen Anwendung gefunden haben, und wollen jetzt ebenfalls mit Rücksicht auf solche Anwendungen noch eine etwas allgemeinere Formulirung der auf die associirten Differentialgleichungen bezüglichen Untersuchungen vorführen.

174. Verallgemeinerung des Begriffes der associirten Differentialgleichungen. Associirte Arten und Gruppen.

Wir wollen der einfacheren Ausdrucksweise wegen von vorneherein annehmen, dass in der Differentialgleichung (A) der Coefficient p_1 der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung die logarithmische Derivirte einer rationalen Function sei. Dann ist also die Determinante eines Fundamentalsystems eine rationale Function, und Transformations- sowie Monodromiegruppe sind unimodular.

Diese Eigenschaft bleibt nun erhalten, wenn wir von der Differentialgleichung (A) durch eine Beziehung

(C) $$z = r_0 y + r_1 y' + \cdots + r_{n-1} y^{(n-1)} = R(y)$$

zu einer Differentialgleichung (B) derselben Art überg
Denn wenn $y_1, y_2, \cdots y_n$; $z_1, z_2, \cdots z_n$ entsprechende Fundar
systeme von (A) und (B) sind, also die Gleichungen

$$z_\varkappa = r_0 y_\varkappa + r_1 y_\varkappa' + \cdots + r_{n-1} y_\varkappa^{(n-1)}$$

und die daraus durch Differentiation und Anwendung der Diffe
gleichung (A) folgenden

$$z_\varkappa^{(\lambda)} = r_{\lambda 0} y_\varkappa + r_{\lambda 1} y_\varkappa' + \cdots + r_{\lambda\, n-1} y_\varkappa^{(n-1)} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n-1$$

bestehen, so ist

$$D(z_1, z_2, \cdots z_n) = \left| r_{i-1, \varkappa-1} \right|_{(i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)} D(y_1, y_2, \cdots y_n),$$

wo

$$r_{0, \varkappa-1} = r_{\varkappa-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

gesetzt wurde, d. h. es ist auch in (B) die Determinante des
mentalsystems rational.

Mögen nun n mit (A) zur selben Art gehörige Diffe
gleichungen

($^\lambda$A) $$^\lambda y^{(n)} + {}^\lambda p_1 {}^\lambda y^{(n-1)} + \cdots + {}^\lambda p_n {}^\lambda y = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n)$$

vorgelegt sein, die mit (A) durch die Beziehungen

($^\lambda$C) $$^\lambda y = {}^\lambda r_0 y + {}^\lambda r_1 y' + \cdots + {}^\lambda r_{n-1} y^{(n-1)} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n)$$

verknüpft und von der n^{ten} Ordnung sind. Seien ferner die rati
Functionen, welche die Coefficienten der Gleichungen ($^\lambda$C) bild
beschaffen, dass die Determinante

(1) $$\left| {}^i r_{\varkappa-1} \right|_{(i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)} \neq 0$$

ist, dann lassen sich die Gleichungen ($^\lambda$C) nach $y, y', \cdots y^{(n-}$
lösen, und es ist folglich die abhängige Variable z jeder mit (
selben Art gehörigen Differentialgleichung ebenso wie jede Ab
von z homogen linear mit rationalen Coefficienten durch die

$$^1 y,\ {}^2 y,\ \cdots\ {}^n y$$

darstellbar.

Sei $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem von (A) und

(2) $$^\lambda y_\varkappa = {}^\lambda r_0 y_\varkappa + {}^\lambda r_1 y_\varkappa' + \cdots + {}^\lambda r_{n-1} y_\varkappa^{(n-1)} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots n),$$

dann bilden die

$$^\lambda y_1,\ {}^\lambda y_2,\ \cdots\ {}^\lambda y_n$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (${}^{\lambda}A$) und es ist

(3) $$\left|{}^{\lambda}y_{\varkappa}\right| = \left|{}^{\lambda}r_{\varkappa-1}\right| \cdot \left|y_{\varkappa}^{(\lambda-1)}\right| \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots n),$$

also zufolge der Ungleichung (1)

(4) $$D = \left|{}^{\lambda}y_{\varkappa}\right| \neq 0 \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots n).$$

Bilden wir die sämmtlichen Subdeterminanten m^{ter} Ordnung der Determinante D

$$\mathfrak{U}_{i\varkappa} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots \nu;\ \nu = n_m),$$

wobei die Indexbezeichnung so gewählt sein mag, dass wenn

$$\mathfrak{U}_{i\varkappa} = \left|{}^{\lambda}y_{\mu}\right| \qquad \begin{pmatrix}\lambda = i_1, i_2, \cdots i_m \\ \mu = \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_m\end{pmatrix}$$

gesetzt wird, bei denjenigen $\mathfrak{U}_{i\varkappa}$, die denselben ersten Index i haben, die Zahlen $i_1, i_2, \cdots i_m$ dieselben sind, während bei den $\mathfrak{U}_{i\varkappa}$ mit demselben zweiten Index $\varkappa$ die Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_m$ übereinstimmen. Wir wollen auch gleich

$$\mathfrak{U}_i = \left|{}^{\lambda}\mathfrak{y}_{\mu}\right| \qquad \begin{pmatrix}\lambda = i_1, i_2, \cdots i_m \\ \mu = 1, 2, \cdots m\end{pmatrix}$$

setzen, wo

(5) $${}^{\lambda}\mathfrak{y}_{\mu} = {}^{\lambda}r_0 \mathfrak{y}_{\mu} + {}^{\lambda}r_1 \mathfrak{y}_{\mu}' + \cdots + {}^{\lambda}r_{n-1} \mathfrak{y}_{\mu}^{(n-1)} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots m),$$

und $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m$ irgend m linear unabhängige Integrale von (A) sind.

Zufolge des oft benutzten Satzes über die Subdeterminanten componirter Systeme ist alsdann

(6) $$\left|{}^{i}y_{\varkappa}\right| = \sum_{(h_1, h_2, \cdots h_m)} \left|{}^{i}r_{h-1}\right| \left|y_{\varkappa}^{(h-1)}\right| \qquad \begin{pmatrix}i = i_1, i_2, \cdots i_m \\ \varkappa = \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_m \\ h = h_1, h_2, \cdots h_m\end{pmatrix}$$

und allgemein

(7) $$\left|{}^{i}\mathfrak{y}_{\varkappa}\right| = \sum_{(h_1, h_2, \cdots h_m)} \left|{}^{i}r_{h-1}\right| \left|\mathfrak{y}_{\varkappa}^{(h-1)}\right| \qquad \begin{pmatrix}i = i_1, i_2, \cdots i_m \\ \varkappa = 1, 2, \cdots m \\ h = h_1, h_2, \cdots h_m\end{pmatrix},$$

wo sich die Summenzeichen auf alle ν möglichen Combinationen $h_1, h_2, \cdots h_m$ der Zahlen $1, 2, \cdots n$ zu je m beziehen. Die Gleichungen (7) lassen sich in der Form

(7a) $$\mathfrak{U}_i = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \overline{R}_{i\lambda} u_{\lambda} \qquad (i = 1, 2, \cdots \nu)$$

darstellen, oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (α) der Nr. 1
(S. 127) in der Form

$$(8) \qquad \mathfrak{U}_i = R_{i0} u_1 + R_{i1} u_1' + \cdots + R_{i,\nu-1} u_1^{(\nu-1)},$$

wo die $\overline{R}_{i\varkappa}$ sowohl wie die $R_{i\varkappa}$ rationale Functionen von x bedeut
dies besagt aber:

Die Grössen $\mathfrak{U}_i$ genügen für jede Wahl des Integr
systems $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m$ einer homogenen linearen Differenti
gleichung ν^{ter} Ordnung $(A_i^{(n-m)})$; diese Differentialgleichung
gehören für alle Werthe $i = 1, 2, \cdots \nu$ mit der $(n-m)^{\text{ten}}$ ass
ciirten Differentialgleichung $(A^{(n-m)})$ von (A) zur selben A
und im Allgemeinen bilden die Determinanten

$$\mathfrak{U}_{i1}, \mathfrak{U}_{i2}, \cdots \mathfrak{U}_{i\nu}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $(A_i^{(n-m)})$.

Die letztere Aussage ergiebt sich daraus, dass zufolge der G
chungen (7) die Gleichung (8) befriedigt wird, wenn man an die St
von $\mathfrak{U}_i$ setzt $\mathfrak{U}_{i\varkappa}$ und zugleich an die Stelle von u_1 das particul
Integral $u_{1\varkappa}$ von $(A^{(n-m)})$.

Aus dem eben bewiesenen Satze folgt als besonderer Fall
nachstehende Satz:

Die $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichungen all
zu einer und derselben Art gehörigen Differentialgleichung
gehören ebenfalls zu einer und derselben Art; wir woll
diese die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Art der ursprünglichen A
nennen.

Wenn, wie wir es voraussetzten, in den Differentialgleichung
n^{ter} Ordnung der durch (A) bestimmten Art die Coefficienten d
$(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitungen die logarithmischen Derivirten rationaler Fu
tionen sind, so ist also die allen diesen Differentialgleichungen gemei
same Transformationsgruppe H unimodular; wir sagen dann kurz, d
Art selbst sei unimodular. Offenbar ist dann auch die $(n-m$
associirte Art unimodular, und es gehört demnach insbesondere d
adjungirte Differentialgleichung jeder mit (A) zur selben Art gehörig
Differentialgleichung in die erste associirte Art. Wir haben folgli
den Satz:

Die sämmtlichen adjungirten Differentialgleichungen d
zu einer unimodularen Art gehörigen Differentialgleichung
gehören selbst wieder zu einer Art, und es ist dann offenb
auch umgekehrt jede zu dieser „adjungirten“ Art gehöri

Differentialgleichung die adjungirte einer Differentialgleichung der ursprünglichen Art.

Hieraus folgt auf Grund des Satzes der Nr. 173 (S. 150):

Die Differentialgleichungen der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten und der m^{ten} associirten Art sind einander paarweise adjungirt.

Bei den vorhergehenden Betrachtungen haben wir stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Differentialgleichung $(A^{(n-m)})$ der zum Ausgangspunkte gewählten Differentialgleichung auch wirklich von der ν^{ten} Ordnung sei, denn nur wenn dies der Fall ist, können wir durch dieselbe die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Art definiren (vergl. Nr. 163, S. 115). Im Anschlusse hieran bemerken wir, dass der Fall, dass eine der Differentialgleichungen $(A_i^{(n-m)})$ von niedrigerer als der ν^{ten} Ordnung wird, nur dann eintreten kann, wenn die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Art reductibel ist. So können wir uns nämlich ausdrücken, da wir nach dem in der Nr. 165 (S. 120) bewiesenen Fuchs'schen Satze wissen, dass, wenn eine Differentialgleichung der Art reductibel ist, dies auch für jede Differentialgleichung der Art gelten muss. Die Reductibilität der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Art hängt wesentlich ab von der Structur der zur Transformationsgruppe H von (A) gehörigen $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Gruppe $H^{(n-m)}$ (vergl. Nr. 169, S. 136).

Es ist nämlich nach den Sätzen der Nr. 161 (S. 106) die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Art dann und nur dann reductibel, wenn die Gruppe $H^{(n-m)}$ in dem a. a. O. fixirten Sinne reductibel ist.

Eine lineare Differentialgleichung ist stets mit ihrer adjungirten gleichzeitig reductibel oder irreductibel (Nr. 27, Bd. I, S. 85); wenn also die Differentialgleichung (A) irreductibel ist, so ist auch die ganze durch dieselbe definirte Art und zugleich ihre erste associirte Art irreductibel. Dagegen kann es sich ereignen, dass eine der anderen $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Arten (für $m < n-1$) reductibel wird, wenn auch die ursprüngliche Art irreductibel ist. Jedenfalls wissen wir:

Die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte und die m^{te} associirte Art sind stets gleichzeitig irreductibel oder reductibel.

Während die Differentialgleichungen der ersten associirten Art (oder was dasselbe heisst, der adjungirten Art) stets Adjungirte von Differentialgleichungen der ursprünglichen Art sind, kann es unter den Differentialgleichungen der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Art im Allgemeinen (für $1 < m < n-1$) solche geben, die weder $(n-m)^{\text{te}}$ Associirte einer Differentialgleichung der ursprünglichen Art sind, noch auch durch Determinanten von der Form $\mathfrak{U}_i$ befriedigt werden.

In der That sind die abhängigen Variabeln derjenigen Differenti[illegible] gleichungen der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Art, die durch Determinant[illegible] der Form $\mathfrak{U}_i$ befriedigt werden, mit u_1 und seinen Ableitungen du[illegible] Gleichungen von der Form (8) verknüpft, wo die Coefficienten

$$(9) \qquad R_{i0},\ R_{i1},\ \cdots\ R_{i,\nu-1}$$

aus den Coefficienten der Gleichungen (α) (S. 127) und den Coefficient[illegible]

$$(10) \qquad \overline{R}_{i1},\ \overline{R}_{i2},\ \cdots\ \overline{R}_{i\nu}$$

der Gleichungen (7a) in ganz bestimmter Weise zusammengesetzt si[illegible] Die Grössen (10) sind aber gewisse Subdeterminanten m^{ter} Ordnu[illegible] der Determinante n^{ter} Ordnung

$$\left|{}^{i}r_{k-1}\right| \qquad (i, k = 1, 2, \cdots n)$$

und genügen als solche im Allgemeinen gewissen algebraischen Rel[illegible] tionen von ähnlicher Beschaffenheit, wie etwa die Relation (γ) (S. 13[illegible] zwischen den homogenen Coordinaten einer geraden Linie im gewöh[illegible] lichen Raume. Diese algebraischen Beziehungen zwischen den Grösse[illegible] (10) haben wieder algebraische Beziehungen zwischen den Coefficiente[illegible] (9) zur Folge.

Eine Differentialgleichung der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Art wird al[illegible] dann und nur dann durch Functionen von der Form $\mathfrak{U}_i$ befriedi[illegible] werden können, wenn ihre abhängige Variable in der Gestalt

$$(11) \qquad R_0 u_1 + R_1 u_1' + \cdots + R_{\nu-1} u_1^{(\nu-1)}$$

darstellbar ist, wo die rationalen Functionen $R_0, R_1, \cdots R_{\nu-1}$ jen[illegible] für die Grössen (9) geltenden algebraischen Beziehungen Genüge leist[illegible] Diese Differentialgleichungen erschöpfen also im Allgemeinen nicht [illegible] ganze $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Art, sondern bilden innerhalb derselb[illegible] nur einen gewissen Typus und zwar, wie wir sagen können, ei[illegible] algebraischen Typus, da er durch gewisse algebraische Beziehun[illegible] zwischen den Coefficienten des Ausdruckes (11) charakterisirt wird.

Denken wir uns nun, die $(n-m)^{\text{te}}$ associirte Art sei reductib[illegible] dann giebt es Differentialgleichungen der Art, die von niedrigerer als der ν^{ten} Ordnung sind. Möge der vorhin charakterisirte Typus eine solche Differentialgleichung von niedrigerer, etwa $\mu(<\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung enthalten, und seien die Determinanten $\mathfrak{U}_{i1}, \mathfrak{U}_{i2}, \cdots \mathfrak{U}_{i\nu}$ diejenigen, die jener Differentialgleichung Genüge leisten. Dann bestehen also zwischen diesen ν Determinanten $\nu-\mu$ homogene, lineare Relationen mit constanten Coefficienten, und diese drücken gewisse Eigenschaften der Differentialgleichung (A) aus. Herr Fuchs hat gezeigt, dass z. B. die von Herrn Weierstrass aufgestellten Beziehungen zwischen den

Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung sich ergeben als eine derartige Eigenschaft von gewissen linearen, homogenen Differentialgleichungen, die wir später kennen lernen werden.

175. Differentialgleichungen von gerader Ordnung. Untersuchungen von Fuchs. Betrachtung einer gewissen quadratischen Form. Differentialgleichungen, die mit ihren Adjungirten zur selben Art gehören.

Mit Rücksicht auf die am Schlusse der vorigen Nummer erwähnten Anwendungen gehen wir auf den Fall noch etwas genauer ein, wo die Ordnung der Differentialgleichung (A) eine gerade Zahl

$$n = 2m$$

ist.

Wir hatten bereits bemerkt (Nr. 170, S. 142), dass alsdann die beiden Differentialgleichungen ($A^{(n-m)}$) und ($A^{(m)}$) zusammenfallen. Wenn wir also die durch (A) charakterisirte Art als eine unimodulare voraussetzen, so ist in diesem Falle die m^{te} associirte Art mit ihrer adjungirten identisch, oder kürzer ausgesprochen, die m^{te} associirte Art ist sich selbst adjungirt.

Wir knüpfen unsere Betrachtungen an die zu der Differentialgleichung (A) gehörige Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$), in der der Coefficient der $(n-1)^{ten}$ Ableitung verschwindet. Die quadratische Form (20) der Nr. 170 (S. 142) ist also (wenn wir für ($\mathfrak{A}$) die Grössen, welche für (A) mit lateinischen Buchstaben bezeichnet wurden, durch die entsprechenden deutschen Buchstaben darstellen)

$$(1) \qquad \mathfrak{Z}(\mathfrak{u}) = \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} \sum_{\beta=0}^{\nu-1} \mathfrak{P}_{\alpha\beta}\, \mathfrak{u}^{(\alpha)} \mathfrak{u}^{(\beta)} = \text{const.}, \quad (\mathfrak{P}_{\alpha\beta} = \mathfrak{P}_{\beta\alpha}),$$

für jedes Integral $\mathfrak{u}$ der m^{ten} associirten Differentialgleichung

$$(\mathfrak{A}^{(m)}) \qquad \overset{m}{\mathfrak{P}}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}^{(\nu)} - (\mathfrak{R}_1 \mathfrak{u}^{(\nu-1)} + \cdots + \mathfrak{R}_\nu \mathfrak{u}) = 0.$$

Der Werth der Constanten im dritten Gliede der Gleichung (1) hängt von der Wahl des Integrals $\mathfrak{u}$ ab.

Wir wissen, dass die zu ($\mathfrak{A}^{(m)}$) adjungirte Differentialgleichung mit ($\mathfrak{A}^{(m)}$) zur selben Art gehören muss, es wird sich also (vergl. Nr. 21, Bd. I, S. 59) jeder Multiplicator der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}^{(m)}$) als homogene, lineare Function von

$$\mathfrak{u}, \ \mathfrak{u}', \ \cdots \mathfrak{u}^{(\nu-1)}$$

mit in x rationalen Coefficienten darstellen lassen, wenn für $\mathfrak{u}$ ein geeignetes Integral von $(\mathfrak{A}^{(m)})$ genommen wird. Herr Fuchs, der die quadratische Form (1) zuerst betrachtet hat und dessen Untersuchungen wir im Folgenden darzulegen haben, hat nun den folgenden merkwürdigen Satz aufgestellt:

Die partielle Ableitung der Form $\mathfrak{Z}$ nach der $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Derivirten von $\mathfrak{u}$ stellt, wenn man für $\mathfrak{u}$ irgend eine Lösung von $(\mathfrak{A}^{(m)})$ einsetzt, einen Multiplicator von $(\mathfrak{A}^{(m)})$ dar.

In der That, differentiiren wir die Form $\mathfrak{Z}$ nach x, so kommt

$$\frac{d\mathfrak{Z}}{dx} = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \mathfrak{u}^{(\nu-1)}}\mathfrak{u}^{(\nu)} + \mathfrak{R}, \tag{2}$$

wo $\mathfrak{R}$ eine quadratische Form der

$$\mathfrak{u},\ \mathfrak{u}',\ \cdots\ \mathfrak{u}^{(\nu-1)}$$

mit rationalen Coefficienten bedeutet. Setzen wir hierin für $\mathfrak{u}^{(\nu)}$ seinen aus der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}^{(m)})$ sich ergebenden Werth

$$\mathfrak{u}^{(\nu)} = \mathfrak{R}_1\mathfrak{u}^{(\nu-1)} + \cdots + \mathfrak{R}_\nu\mathfrak{u}$$

ein, so ist, da $\mathfrak{Z}$ für jede Lösung $\mathfrak{u}$ von $(\mathfrak{A}^{(m)})$ einen constanten Werth hat,

$$0 = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \mathfrak{u}^{(\nu-1)}}\left(\mathfrak{R}_1\mathfrak{u}^{(\nu-1)} + \cdots + \mathfrak{R}_\nu\mathfrak{u}\right) + \mathfrak{R}. \tag{3}$$

Diese Gleichung muss für jedes Integral von $(\mathfrak{A}^{(m)})$ und für jeden Werth von x erfüllt sein; sie stellt also eine Beziehung zwischen

$$x,\ \mathfrak{u},\ \mathfrak{u}',\ \cdots\ \mathfrak{u}^{(\nu-1)} \tag{4}$$

dar. Bedeutet aber x eine reguläre Stelle der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}^{(m)})$, so können wir (Nr. 9, Bd. I, S. 25) die Werthe eines Integrals und seiner $(\nu-1)$ ersten Ableitungen an dieser Stelle willkürlich vorschreiben, es kann also zwischen den Grössen (4) keine Beziehung bestehen. Wir schliessen hieraus, dass die Gleichung (3) für jede Function $\mathfrak{u}$ von x identisch erfüllt sein muss.

Subtrahiren wir also die Gleichung (3) von (2), so erhalten wir, wenn wir an Stelle von $\mathfrak{u}$ den Buchstaben t schreiben und

$$\mathfrak{M}(t) = \frac{\partial \mathfrak{Z}(t)}{\partial t^{(\nu-1)}} = 2\left\{\mathfrak{P}_{0,\nu-1}t + \mathfrak{P}_{1,\nu-1}t' + \cdots + \mathfrak{P}_{\nu-1,\nu-1}t^{(\nu-1)}\right\} \tag{5}$$

setzen, die für jede Function t von x identisch bestehende Beziehung

$$\frac{d\mathfrak{Z}(t)}{dx} = \mathfrak{M}(t)\overset{m}{\mathfrak{P}}(t). \tag{6}$$

Setzen wir*) $t + \mathfrak{u}$ an die Stelle von t, wo $\mathfrak{u}$ irgend eine Lösung der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}^{(m)}$) bedeutet, so ist:

$$\mathfrak{Z}(t + \mathfrak{u}) = \mathfrak{Z}(t) + \mathfrak{Z}(\mathfrak{u}) + B(t, \mathfrak{u}),$$

$B(t, \mathfrak{u})$ ein in t, $\mathfrak{u}$ bilinearer Differentialausdruck $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung, und ferner

$$\mathfrak{M}(t + \mathfrak{u}) = \mathfrak{M}(t) + \mathfrak{M}(\mathfrak{u})$$

$$\overset{m}{\mathfrak{P}}(t + \mathfrak{u}) = \overset{m}{\mathfrak{P}}(t) + \overset{m}{\mathfrak{P}}(\mathfrak{u}) = \overset{m}{\mathfrak{P}}(t).$$

Also folgt aus der Gleichung (6) durch Substitution von $t + \mathfrak{u}$ an Stelle von t

$$\frac{d\mathfrak{Z}(t)}{dx} + \frac{dB(t, \mathfrak{u})}{dx} = \overset{m}{\mathfrak{P}}(t)(\mathfrak{M}(\mathfrak{u}) + \mathfrak{M}(t)),$$

da ja wegen (1)

$$\frac{d\mathfrak{Z}(\mathfrak{u})}{dx} = 0$$

ist, oder mit Rücksicht auf (6)

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{u}) \cdot \overset{m}{\mathfrak{P}}(t) = \frac{d}{dx}(B(t, \mathfrak{u})).$$

Dies besagt aber, dass die linke Seite $\overset{m}{\mathfrak{P}}(t)$ der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}^{(m)}$), wenn man dieselbe mit der Function $\mathfrak{M}(\mathfrak{u})$ multiplicirt, gleich der Ableitung eines linearen Differentialausdruckes $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung von t wird, und daraus folgt nach Nr. 20 (Bd. I, S. 53), dass

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{u}) = \frac{\partial \mathfrak{Z}(\mathfrak{u})}{\partial \mathfrak{u}^{(\nu-1)}}$$

ein Multiplicator der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}^{(m)}$) ist, was zu beweisen war.

Aus der Gleichung (6) schliessen wir, dass die Form $\mathfrak{Z}(t)$ dann und nur dann einen von x unabhängigen Werth annimmt, wenn t entweder eine Lösung der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}^{(m)}$) oder eine Lösung der Differentialgleichung $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung

(7) $$\mathfrak{M}(t) = 0$$

darstellt. Auf Grund dieser Bemerkung kann man die quadratische Form $\mathfrak{Z}$ als eine Summe von Quadraten linearer Functionen der Grössen

$$t, \; t', \; \cdots \; t^{(\nu-1)}$$

darstellen, in welcher jedes dieser Quadrate von jenen Grössen eine weniger enthält, wie das ihm unmittelbar vorangehende.

Setzen wir nämlich

(8) $$\mathfrak{Z}(t) = \frac{1}{4\mathfrak{P}_{\nu-1,\nu-1}} \mathfrak{M}(t)^2 + \mathfrak{Z}_1(t),$$

*) Nach einer mündlichen Bemerkung des Herrn Hamburger vom 21. November 1888.

so ist, zufolge der Gleichungen (5) und (1), $\mathfrak{Z}_1(t)$ eine quadratis Form der Grössen

$$t,\ t',\ \dots\ t^{(\nu-2)}$$

mit in x rationalen Coefficienten.

Bilden wir nun

$$\frac{d\mathfrak{Z}_1(t)}{dx} = \frac{\partial \mathfrak{Z}_1(t)}{\partial t^{(\nu-2)}}\, t^{(\nu-1)} + \overline{\mathfrak{R}}$$

und beachten, dass $\mathfrak{Z}(t)$ gleich einer Constanten wird, wenn wir fü eine Lösung der Gleichung (7) nehmen, so erkennen wir zunächst n Gleichung (8), dass für eine solche Lösung t auch $\mathfrak{Z}_1(t)$ einen vo unabhängigen Werth erhält, so dass also

$$(9)\qquad 0 = -\frac{\partial \mathfrak{Z}_1(t)}{\partial t^{(\nu-2)}}\left\{\frac{\mathfrak{P}_{0,\nu-1}}{\mathfrak{P}_{\nu-1,\nu-1}}\, t + \cdots + \frac{\mathfrak{P}_{\nu-2,\nu-1}}{\mathfrak{P}_{\nu-1,\nu-1}}\, t^{(\nu-2)}\right\} + \overline{\mathfrak{R}}$$

wird, wenn t irgend eine Lösung von (7) bedeutet. Nun ist abe eine homogene, ganze Function von

$$t,\ t',\ \dots\ t^{(\nu-2)},$$

wir schliessen also ähnlich wie oben für die Gleichung (3), dass Gleichung (9) für jede Function t von x identisch erfüllt sein m Hieraus folgt nun wieder, ähnlich wie in dem vorhin geführ Beweise, dass der Ausdruck

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}_1(t)}{\partial t^{(\nu-2)}} = \mathfrak{M}_1(t)$$

einen Multiplicator der Differentialgleichung (7) darstellt, wenn fü irgend eine Lösung dieser Differentialgleichung gesetzt wird, und d ferner die quadratische Form $\mathfrak{Z}_1(t)$ einen constanten Werth annim für solche Functionen t, die entweder der Gleichung (7) oder d Differentialgleichung $(\nu-2)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\mathfrak{M}_1(t) = 0$$

Genüge leisten. Wenn wir diese Schlussweise fortsetzen, so erhalt wir schliesslich das Resultat:

Die quadratische Form $\mathfrak{Z}$ lässt sich in die Gestalt setzen:

$$\mathfrak{Z}(t) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\mathfrak{M}^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon_1}\mathfrak{M}_1^2(t) + \cdots + \frac{1}{2\varepsilon_{\nu-1}}\mathfrak{M}_{\nu-1}^2(t);$$

hierin bedeutet $\mathfrak{M}_\varkappa(t)$ eine homogene, lineare Function von

$$t,\ t',\ \dots\ t^{(\nu-\varkappa-1)}\qquad (\varkappa = 1, 2, \dots \nu-1),$$

und $\mathfrak{M}_{\varkappa-1}(t)$ ist ein Multiplicator der Differentialgleichung

$$\mathfrak{M}_\varkappa(t) = 0.$$

wenn t eine Lösung dieser Differentialgleichung bedeutet. Die Grössen $\sigma_0, \sigma_1, \cdots \sigma_{\nu-1}$ sind rationale Functionen von x,

$$\sigma_0 = 2\mathfrak{P}_{\nu-1,\,\nu-1},$$

und allgemein ist $\sigma_\varkappa$ der Coefficient der höchsten, $(\nu - \varkappa - 1)^{\text{ten}}$, Ableitung in $\mathfrak{M}_\varkappa$.

Dabei ist vorausgesetzt, dass die Ausdrücke $\mathfrak{M}_\varkappa$ $(\varkappa = 0, 1, 2, \cdots \nu - 1)$ die Ableitung höchster Ordnung $t^{(\nu-\varkappa-1)}$ wirklich enthalten, d. h. dass die $\sigma_\varkappa$ von Null verschieden sind. Sollte die eine oder die andere dieser Grössen verschwinden, so würden ähnliche Specialisirungen der Gestalt von $\mathfrak{Z}(t)$ Platz greifen, wie sie in der Theorie der quadratischen Formen bei der analogen Aufgabe auftreten.

Die Differentialgleichung $(\mathfrak{A}^{(m)})$ hat, wie wir hervorhoben, die Eigenschaft, mit ihrer Adjungirten zur selben Art zu gehören. Wir wollen hier allgemein über solche Differentialgleichungen, die zu einer sich selbst adjungirten Art gehören, einige Bemerkungen einfügen.

Möge also die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit in x rationalen Coefficienten

$$P(y) = 0$$

mit ihrer Adjungirten

$$P'(z) = 0$$

zur selben Art gehören, so dass also

$$z = R(y)$$

ist, wo R einen Differentialausdruck höchstens $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit in x rationalen Coefficienten bedeutet.

Es ist dann (vergl. Nr. 164, S. 118)

$$\text{(I)} \qquad P'R = SP,$$

wo auch S einen Differentialausdruck von derselben Ordnung wie R und mit in x rationalen Coefficienten bedeutet. Wenden wir auf diese Gleichung den Reciprocitätssatz (Nr. 21, Bd. I, S. 59) an und bezeichnen den Adjungirten eines Differentialausdruckes immer durch einen seinem Symbol angehängten Accent, so ist also

$$\text{(II)} \qquad P'S' = R'P.$$

Daraus folgt nun, dass der Ausdruck

$$z_1 = S'(y)$$

auch ein Integral der Differentialgleichung $P' = 0$ darstellt, wenn y eine Lösung von $P = 0$ bedeutet. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich identisch, d. h. für jede Function t von x, entweder

(III) $$R(t) = \text{const. } S'(t)$$

oder das Verhältniss von $R(t)$ und $S'(t)$ nicht von x unabhängig ist.

Betrachten wir den durch die Gleichung (III) charakterisirten ersten Fall, so folgt aus (II)

$$\text{const. } P'R = R'P,$$

d. h. der Differentialausdruck $P'R$ unterscheidet sich von seinem adjungirten nur durch einen constanten Factor. Es ist also, wenn R von $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist (vergl. Nr. 25, Bd. I, S. 70)

$$P'R = -R'P,$$

dagegen kann, wenn R von niedrigerer als der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung und die Ordnung von $P'R$ eine gerade Zahl ist, auch

$$P'R = R'P$$

sein.

Wenn der zweite Fall eintritt, d. h. eine Gleichung von der Form (III) nicht identisch besteht, so könnte gleichwohl

(IV) $$R(y) = \text{const. } S'(y)$$

sein, falls für y eine Lösung von $P = 0$ genommen wird. In diesem Falle hätte also $P = 0$ mit der Differentialgleichung niedrigerer Ordnung

$$R(y) - \text{const. } S'(y) = 0$$

eine Lösung gemein, d. h. $P = 0$ wäre reductibel. Besteht auch für eine Lösung y von $P = 0$ keine Relation der Form (IV), so sind die beiden Integrale

(V) $$z = R(y), \quad z_1 = S'(y)$$

von $P'(z) = 0$ wesentlich von einander verschieden. Man kann durch Differentiation der beiden Gleichungen (V) zwischen denselben y und seine $(n-1)$ ersten Ableitungen eliminiren und erhält auf diese Weise

$$z_1 = T_0 z + T_1 z' + \cdots + T_{n-1} z^{(n-1)},$$

wo $T_0, T_1, \cdots T_{n-1}$ rationale Functionen von x sind. Daraus folgt aber nach einem Satze der Nr. 165 (S. 120), dass $P' = 0$ und folglich auch $P = 0$ reductibel ist. Wir haben also das Resultat:

Gehört eine Differentialgleichung $P = 0$ mit ihrer adjungirten $P' = 0$ zur selben Art und ist die Art nicht reductibel, so unterscheidet sich der Differentialausdruck $P'R$ von seinem adjungirten nur durch den Factor -1, wenn $z = R(y)$ die Beziehung zwischen den abhängigen Variabeln der beiden Differentialgleichungen $P = 0$, $P' = 0$ darstellt.

Wenn dagegen die beiden Differentialausdrücke

$$R(y), \quad S'(y)$$

Lösungen von $P' = 0$ darstellen, falls für y eine Lösung von $P = 0$ gesetzt wird, und es unterscheiden sich $R(y)$, $S'(y)$ nicht für jede Function y von x nur durch einen constanten Factor, so ist die durch $P = 0$ bestimmte Art reductibel.

Diesen Doppelsatz hat Herr Fuchs für die mit ihrer Adjungirten zur selben Art gehörige Differentialgleichung $(\mathfrak{A}^{(m)})$ aufgestellt.

Viertes Kapitel.

176. Verfahren zur Entscheidung der Frage, ob eine vorgelegte lineare Differentialgleichung reductibel ist oder nicht.

Von den in den vorhergehenden Kapiteln dargelegten Untersuchungen machen wir jetzt eine bemerkenswerthe Anwendung, indem wir den bereits in der Nr. 161 (S. 107) in Aussicht genommenen Nachweis führen, dass sich für eine vorgelegte lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten stets durch blosse Ausführung algebraischer Operationen entscheiden lässt, ob dieselbe in dem Sinne reductibel ist, dass sie mit einer linearen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit ebenfalls rationalen Coefficienten Lösungen gemein hat.

Sei die Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad P(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

mit rationalen Coefficienten in Bezug auf ihre Reductibilität zu untersuchen, dann wissen wir (vergl. Nr. 27), dass, wenn (A) reductibel ist, eine Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten

$$\text{(1)} \qquad Q(y) = y^{(m)} + q_1 y^{(m-1)} + \cdots + q_m y = 0 \quad (m < n)$$

von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung existiren muss, die ihre sämmtlichen Lösungen mit (A) gemein hat. Bedeute $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (1), dann sind also die Quotienten

$$\text{(2)} \qquad (-1)^m q_\varkappa = \frac{D_\varkappa(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m)}{D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots m)$$

rational, und

$$D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m) = \text{const.}\, e^{-\int q_1 dx}.$$

Damit die Differentialgleichung (A) reductibel sei, ist also **nothwendig**, dass sich die Determinante eines Systems von $m < n$ linear unabhängigen Integralen $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m$ von (A) für einen der Werthe

$$m = 1, 2, \cdots n - 1$$

in der Form

(3) $$e^{-\int r\,dx}$$

darstellen lässt, wo r eine rationale Function von x bedeutet.

Die Determinanten

$$D = D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m),$$

wo $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m$ irgend ein System von m linear unabhängigen Lösungen von (A) bedeutet, genügen sämmtlich der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung $(A^{(n-m)})$ von (A). Wenn also die Differentialgleichungen $(A^{(n-m)})$, für $m = 1, 2, \cdots n-1$ kein in der Form (3) darstellbares Integral besitzen, so ist die Differentialgleichung (A) jedenfalls irreductibel.

Nun sind ferner die Determinanten

$$D_\varkappa(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots m)$$

Integrale von Differentialgleichungen, die nach den Ergebnissen der Nr. 167 (S. 127) mit $(A^{(n-m)})$ zur selben Art gehören, und zwar Integrale, die dem Integrale $D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m)$ von $(A^{(n-m)})$ entsprechen.

Es bestehen folglich Gleichungen von der Form

$$(4)\qquad D_\varkappa(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m) = A_{\varkappa 0}D + A_{\varkappa 1}D' + \cdots + A_{\varkappa, \nu-1}D^{(\nu-1)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots m),$$

wo die $A_{\varkappa 0}, A_{\varkappa 1}, \cdots A_{\varkappa, \nu-1}$ rationale Functionen von x bedeuten, die sich aus den Coefficienten von (A) durch Differentiation und rationale Operationen in einfacher Weise zusammensetzen, und wo

$$D^{(\lambda)} = \frac{d^\lambda D}{dx^\lambda}, \quad \nu = n_m$$

gesetzt wurde.

Die Ableitungen jeder Ordnung eines Ausdruckes von der Form (3) sind als Producte

$$R(x) e^{-\int r\,dx},$$

wo $R(x)$ eine rationale Function bedeutet, also in der Gestalt

$$e^{\int \left(\frac{d \log R(x)}{dx} - r(x)\right) dx}$$

darstellbar. Wenn nun D von der Form (3) ist, so folgt hieraus, dass auch die durch die Gleichung (4) gegebenen Determinanten

$$D_\varkappa(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_m) = e^{\int \left(\frac{d \log R_\varkappa(x)}{dx} - r(x)\right) dx} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots m),$$

also ebenfalls von der Form (3) und die Quotienten (2) gleich rationalen Functionen $R_\varkappa(x)$ sind.

Die Coefficienten der $(n-m)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung $(A^{(n-m)})$ von (A) lassen sich durch Differentiation und rationale Opera-

tionen aus den Coefficienten von (A) zusammensetzen. Denn bedeu $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem von (A), so bilden (im All meinen) die in der Nr. 167 (S. 125) definirten Determinanten

$$u_{11}, \; u_{12}, \; \cdots \; u_{1\nu}$$

ein Fundamentalsystem von $(A^{(n-m)})$. Die linke Seite der Differenti gleichung $(A^{(n-m)})$ ist folglich in der Form

$$\frac{D(u, u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu})}{D(u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu})} \tag{5}$$

darstellbar, wo u eine unbestimmte Function bedeutet. Ersetzen w in dem Ausdrucke (5) die $u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}$ durch ihre Ausdrücke den $y_1, y_2, \cdots y_n$ und deren Ableitungen, so verwandelt sich (5) in ei (absolute) Differentialinvariante der allgemeinen linearen Gruppe L den n Grössen $y_1, y_2, \cdots y_n$, die eine homogene lineare Function vo $u, u', \cdots u^{(\nu)}$ ist. Diese Differentialinvariante kann folglich nach de in der Nr. 136 (S. 21) skizzirten Verfahren als rationale Function d $p_1, p_2, \cdots p_n$ und deren Ableitungen dargestellt werden.

Um zu entscheiden, ob die Differentialgleichung (A) reductibel i werden wir also zunächst die sämmtlichen $(n-m)^{\text{ten}}$ Associirten d vorgelegten Differentialgleichung (A) aufzustellen haben für

$$m = 1, 2, \cdots \overline{n-1},$$

und für jede derselben festzustellen suchen, ob sie Lösungen von d Form (3) zulässt. Sind solche Lösungen für eine der $(n-1)$ as ciirten Differentialgleichungen, etwa für $(A^{(n-m)})$ vorhanden, und b deutet u_0 eine solche Lösung, so bilden wir die Ausdrücke

$$u_\varkappa = A_{\varkappa 0} u_0 + A_{\varkappa 1} u_0' + \cdots + A_{\varkappa, \nu-1} u_0^{(\nu-1)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots m).$$

Dann hat die lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$(-1)^m y^{(m)} + \frac{u_1}{u_0} y^{(m-1)} + \cdots + \frac{u_m}{u_0} y = 0$$

rationale Coefficienten, und wir können nach den in der Nr. 16 (Bd. S. 42 ff.) entwickelten Methoden durch rationale Rechnungsoperatio entscheiden, ob diese Differentialgleichung ihre sämmtlichen Integr mit (A) gemein hat. Fällt diese Entscheidung für alle in der Fo (3) darstellbaren Lösungen von $(A^{(n-m)})$ im verneinenden Sinne aus, giebt es keine lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit rationa Coefficienten, deren Lösungen die Differentialgleichung (A) befriedig Wir brauchen also dieses Verfahren nur für alle Associirten von (die Lösungen von der Form (3) besitzen, in Anwendung zu bring

und haben dadurch nicht allein ein Kriterium für die Irreductibilität von (A), sondern zugleich eine Methode, die uns, falls (A) reductibel ist, alle Differentialgleichungen niedrigerer Ordnung mit rationalen Coefficienten liefert, die ihre sämmtlichen Lösungen mit (A) gemein haben.

Es handelt sich nunmehr noch darum, zu entscheiden, ob eine vorgelegte lineare Differentialgleichung

$$(\alpha) \qquad y^{(n)} + r_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + r_n(x)y = 0$$

mit rationalen Coefficienten durch Functionen befriedigt werden kann, deren logarithmische Ableitungen rationale Functionen von x sind, und falls solche Lösungen existiren, dieselben wirklich herzustellen. Wir werden zeigen, dass dies stets durch eine Reihe rein algebraischer Processe geleistet werden kann.

177. Kriterium dafür, ob die logarithmische Ableitung einer Lösung einer gegebenen linearen Differentialgleichung rational ist.

Wenn ein Ausdruck von der Form (3) die Differentialgleichung (α) befriedigen soll, so können wir uns zunächst die rationale Function $r(x)$ in Partialbrüche zerlegt denken

$$r(x) = g(x) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{\varkappa=1}^{\lambda_i} \frac{\alpha_{i\varkappa}}{(x-a_i)^{\varkappa}},$$

wo $g(x)$ eine ganze rationale Function, die $\alpha_{i\varkappa}$ Constanten bedeuten. Ferner sondern wir diejenigen Partialbrüche ab, die sich auf Stellen $x = a_i$ beziehen, für welche $\lambda_i = 1$ und α_{i1} eine negative ganze Zahl $-g_i$ ist; seien dies die Punkte $a_{\sigma+1}, a_{\sigma+2}, \cdots a_s$, dann ist also

$$(6) \quad r(x) = g(x) - \frac{d\log(x-a_{\sigma+1})^{g_{\sigma+1}} \cdots (x-a_s)^{g_s}}{dx} + \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{\varkappa=1}^{\lambda_i} \frac{\alpha_{i\varkappa}}{(x-a_i)^{\varkappa}}.$$

Für den Ausdruck

$$\eta = e^{-\int r(x)\,dx}$$

sind dann die Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ wirkliche Unstetigkeits- oder Verzweigungsstellen, dieselben müssen folglich unter den wesentlichen singulären Punkten der Differentialgleichung (α) enthalten sein. Diese Stellen können wir also von vornherein als bekannt ansehen.

Denken wir uns η in der Umgebung einer dieser Stellen a_i entwickelt, so ist:

$$\eta = (x - a_i)^{-\alpha_{i1}} e^{\left\{\frac{\alpha_{i2}}{x-a_i} + \frac{1}{2}\frac{\alpha_{i3}}{(x-a_i)^2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_i - 1}\frac{\alpha_{i\lambda_i}}{(x-a_i)^{\lambda_i - 1}}\right\}} \overline{\mathfrak{P}}_i(x|a_i),$$
$$(i = 1, 2, \cdots \sigma)$$

wo $\overline{\mathfrak{P}}_i(x|a_i)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von $x - a_i$ for schreitende Reihe bedeutet, die für $x = a_i$ nicht verschwindet, und i der Umgebung des unendlich fernen Punktes haben wir:

$$\eta = x^\tau e^{-\int g(x)\,dx} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von x^{-1} fortschreitenc für $x = \infty$ nicht verschwindende Reihe bedeutet und

(7) $$\tau = g_{\sigma+1} + \cdots + g_\sigma - \alpha_{11} - \alpha_{21} - \cdots - \alpha_{\sigma 1}$$

gesetzt wurde.

Aus dieser Form der Entwickelungen von η erkennen wir, da dieser Ausdruck, falls er der Differentialgleichung (α) G nüge leistet, in der Umgebung jedes endlichen und des u endlich fernen singulären Punktes den Charakter eines No malintegrals besitzt.

Es muss folglich

$$\bar{\eta}_i = e^{\frac{\alpha_{i2}}{x-a_i} + \frac{1}{2}\frac{\alpha_{i3}}{(x-a_i)^2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_i - 1}\frac{\alpha_{i\lambda_i}}{(x-a_i)^{\lambda_i - 1}}}$$

ein zum Punkte $x = a_i$ und

$$\bar{\eta}_0 = e^{-\int g(x)\,dx}$$

ein zum Punkte $x = \infty$ gehöriger fundamentaler determinirende Factor der Differentialgleichung (α) sein.

Bezeichnen wir typisch durch a einen der Punkte $a_1, a_2, \cdots$ c und lassen für die demselben entsprechenden Grössen $\bar{\eta}_i$, $\alpha_{i\varkappa}$, λ_i, $\mathfrak{P}$ den Index i weg, so können wir durch die Substitution

$$x = a + \frac{1}{\xi}$$

die Differentialgleichung (α) in eine Differentialgleichung mit der u abhängigen Variabeln ξ transformiren und uns diese (vergl. Nr. 11(Bd. I, S. 393, 394) in der Form

$(\bar{\alpha})$ $$\frac{d^n y}{d\xi^n} + \left(\varphi_\varkappa(\xi) + Q_{n-1}\left(\frac{1}{\xi}\right)\right)\frac{d^{n-1} y}{d\xi^{n-1}} + \cdots + \left(\varphi_{n\varkappa}(\xi) + Q_0\left(\frac{1}{\xi}\right)\right)y =$$

geschrieben denken, wo (vergl. Nr. 94, Bd. I, S. 339)

$$\varphi_{\lambda\varkappa}(\xi) = A_{n-\lambda}\xi^{\lambda\varkappa} + \cdots \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n)$$

eine ganze rationale Function vom höchstens $\lambda\varkappa^{\text{ten}}$ Grade in ξ und

$$Q_{n-\lambda}\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

eine Reihe von der Form

$$Q_{n-\lambda}\left(\frac{1}{\xi}\right)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_{n-\lambda,\nu}}{\xi^{\nu}} \qquad (\lambda=1,2,\cdots n)$$

bedeutet; $\varkappa+1$ ist der Rang der Gleichung $(\bar{\alpha})$ oder, wie wir sagen können, der Rang von (α) in Bezug auf den singulären Punkt $x=a$. Nach den Ergebnissen der Nummern 95, 96 (vergl. den auf diese Nummern bezüglichen Nachtrag am Schlusse dieses Bandes) haben wir nun folgendermassen zu verfahren, um die fundamentalen determinirenden Factoren von $(\bar{\alpha})$ zu finden.

Sei

$$\psi_{n-\lambda}(x-a)=(x-a)^{\lambda\varkappa}\varphi_{\lambda\varkappa}(\xi)$$

und berechnen wir die $(\varkappa+1)$ ersten Coefficienten in den nach Potenzen von $(x-a)$ fortschreitenden Entwickelungen der n (als verschieden vorausgesetzten) Zweige der durch die Gleichung

$$w^{n}+\psi_{n-1}(x-a)w^{n-1}+\cdots+\psi_{0}(x-a)=0$$

definirten algebraischen Function w von x; seien diese

$$c_{0,l},\ c_{1,l},\ \cdots\ c_{\varkappa,l} \qquad (l=1,2,\cdots n);$$

dann sind die Ausdrücke

$$\zeta_{l}=e^{\frac{c_{0,l}}{\varkappa+1}\xi^{\varkappa+1}+\frac{c_{1,l}}{\varkappa}\xi^{\varkappa}+\cdots+c_{\varkappa,l}\xi}$$

jene gesuchten fundamentalen determinirenden Factoren.

Es muss nun, wenn η der Differentialgleichung (α) genügen soll, der Ausdruck $\bar{\eta}$ mit einem dieser fundamentalen determinirenden Factoren übereinstimmen; wir haben also

$$\lambda=\varkappa+2$$

und für die Coefficienten $\alpha_2,\alpha_3,\cdots\alpha_\lambda$ eine endliche Anzahl $(\leqq n)$ von Möglichkeiten.

Um auch noch für α_1 eine Bestimmung zu erhalten, haben wir ebenfalls nach der a. a. O. gegebenen Vorschrift die zu den Factoren ζ_l gehörigen Exponenten aufzusuchen. Wir bilden also

$$v_{l}=c_{0,l}\xi^{\varkappa}+c_{1,l}\xi^{\varkappa-1}+\cdots+c_{\varkappa,l}$$

und bestimmen in dem Ausdrucke

$$v_{l}^{n}+\varphi_{\varkappa}v_{l}^{n-1}+\cdots+\varphi_{n\varkappa},$$

in welchem zufolge der für die Coefficienten von v_l gegebenen Defi tion die $\varkappa + 1$ höchsten Potenzen von ξ wegfallen, den Coefficient B_l der $[(n-1)\varkappa + 1]^{\text{ten}}$ Potenz von ξ. Dann ist der gesuchte I ponent ϱ (wenn wir der Einfachheit wegen immer die Annahme mach dass die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von einander v schieden sind) durch die Gleichung

$$\left(n c_{0,l}^{n-1} + (n-1)A_{n-1} c_{0,l}^{n-2} + \cdots + A_1\right)\varrho + B_l + b_{n-1,1} c_{0,l}^{n} = $$

bestimmt. Der Coefficient α_1 ist dann gleich diesem ϱ zu nehm wenn das zu $x = a$ gehörige $\bar\eta$ mit ζ_l übereinstimmt.

Verfahren wir auf diese Weise für alle im Endlichen gelegen singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$, so erhalten wir also für den Fac

$$\prod_{i=1}^{\sigma}(x - a_i)^{-\alpha_{i1}}\bar\eta_i$$

von η eine endliche Anzahl von Möglichkeiten. In ähnlicher W finden wir durch die zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Facto der Differentialgleichung und durch die zu denselben gehörigen ponenten eine endliche Anzahl von Möglichkeiten für den Factor

$$x^r \bar\eta_0$$

von η, so dass wir also vermöge der Gleichung (7) auch eine ob Grenze für die ganze positive Zahl

$$g_{\sigma+1} + \cdots + g_s$$

erhalten. Es muss nunmehr η in der Form

$$\eta = G(x)\,\bar\eta_0 \prod_{i=1}^{\sigma}(x - a_i)^{-\alpha_{i1}}\bar\eta_i$$

darstellbar sein, wo $G(x)$ eine ganze rationale Function bedeutet, deren Grad wir eine obere Grenze g kennen.

Substituiren wir nun in die Differentialgleichung (α) für y d Ausdruck

$$y = z\,\bar\eta_0 \prod_{i=1}^{\sigma}(x - a_i)^{-\alpha_{i1}}\bar\eta_i,$$

indem wir für den Factor von z die sämmtlichen als möglich erkannt Werthe nehmen, so muss, wenn (α) eine Lösung von der Form haben soll, eine der sich so für z ergebenden homogenen linear Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten durch eine ga rationale Function $G(x)$ vom Grade g befriedigt werden können. handelt sich also nur noch darum, zu entscheiden, ob dies möglich

Soll eine vorgelegte homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten durch eine ganze rationale Function vom g^{ten} Grade befriedigt werden, so muss zunächst offenbar $-g$ eine Wurzel der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung sein. Wenn dies der Fall ist und wir setzen in die Differentialgleichung für die abhängige Variable den Ausdruck

$$x^g \left\{ c_0 + c_1 \frac{1}{x} + c_2 \frac{1}{x^2} + \cdots + c_g \frac{1}{x^g} \right\}$$

ein, so ergiebt sich für die $c_0, c_1, \cdots c_g$ ein System linearer Gleichungen (die zu $x = \infty$ gehörige Recursionsformel). Je nachdem dieses Gleichungssystem eine Auflösung gestattet oder nicht, kann die vorgelegte Differentialgleichung durch eine ganze rationale Function g^{ten} Grades befriedigt werden oder nicht.

Man kann also in der That durch eine endliche Anzahl rein algebraischer Operationen entscheiden, ob eine gegebene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten durch eine Function, deren logarithmische Ableitung rational ist, befriedigt werden kann, und wenn dies der Fall ist, die betreffende Function wirklich herstellen.

178. Besondere Behandlung der Fuchs'schen Classe. Satz von Heffter über das Auftreten ganzer rationaler Integrale.

Wir heben noch besonders den Fall hervor, wo die vorgelegte Differentialgleichung (α) der Fuchs'schen Classe angehört.

Die rationale Function $r(x)$ in dem Ausdrucke (3) muss dann so beschaffen sein, dass

$$\eta = e^{-\int r(x)\,dx}$$

keine Unbestimmtheitsstellen darbietet. Dazu ist nothwendig und hinreichend, dass in der Zerlegungsformel von $r(x)$ in Partialbrüche

$$g(x) = 0, \quad \lambda_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots s)$$

sei. Es hat also η in diesem Falle die Gestalt

$$\eta = G(x) \prod_{i=1}^{\sigma} (x - a_i)^{-\alpha_{i1}},$$

d. h. η ist, wie wir uns ausdrücken wollen, ein Product von Potenzen rationaler Functionen. Die Zahl $-\alpha_{i1}$ muss dann einfach eine Wurzel der zu $x = a_i$ gehörigen $(i = 1, 2, \cdots \sigma)$, die Zahl

$$-\tau = -g + \alpha_{11} + \alpha_{21} + \cdots + \alpha_{\sigma 1}$$

eine Wurzel der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamental-gleichung sein. Man hat also wieder für die α_{i1} $(i = 1, 2, \cdots \sigma)$ eine endliche Anzahl von Möglichkeiten und für den Grad g der ganzen rationalen Function $G(x)$ eine obere Grenze. Die Differentialgleichungen für z, die aus der gegebenen durch die Substitutionen

$$y = z\prod_{i=1}^{\sigma}(x - a_i)^{-\alpha_{i1}}$$

hervorgehen, wo für die α_{i1} irgend ein System der als möglich erkannten Zahlen zu setzen ist, gehören dann auch sämmtlich der Fuchsschen Classe an, und es ist also für eine dieser Classe angehörige Differentialgleichung zu entscheiden, ob sie ein ganzes rationales Integral besitzt. Hierfür lässt sich aber ein sehr einfaches Kriterium in expliciter Form angeben.

Denken wir uns nämlich die der Fuchs'schen Classe angehörige Differentialgleichung für z durch Multiplication mit einer ganzen rationalen Function so umgeformt, dass ihre Coefficienten ganze rationale Functionen sind. Sei dann der Coefficient der n^{ten} Ableitung von vom Grade μ, so ist, da (vergl. Nr. 110, Bd. I, S. 394 oben) die Grade der Coefficienten der Ableitungen absteigender Ordnung von z abnehmen müssen, jedenfalls μ nicht kleiner wie n. Setzen wir also

$$z = \frac{d^{\mu - n}\mathfrak{y}}{dx^{\mu - n}},$$

so stimmt in der sich für $\mathfrak{y}$ ergebenden Differentialgleichung

$$(\beta) \qquad P_\mu(x)\mathfrak{y}^{(\mu)} + P_{\mu-1}(x)\mathfrak{y}^{(\mu-1)} + \cdots + P_0(x)\mathfrak{y} = 0$$

der Grad des Coefficienten der höchsten Ableitung mit der Ordnung der Differentialgleichung überein.

Einer ganzen rationalen Function vom Grade g, die der Differentialgleichung für z genügt, entspricht dann eine ganze rationale Function vom Grade $g + \mu - n$, die eine Lösung von (β) ist, und umgekehrt entspricht jeder ganzen rationalen Function von höherem als dem $(\mu - n)^{\text{ten}}$ Grade, die die Differentialgleichung (β) befriedigt, ein ganzes rationales Integral der Differentialgleichung für z. Um zu entscheiden, ob diese letztere Differentialgleichung ein ganzes rationales Integral vom Grade g besitzt, haben wir also nur festzustellen, ob die zu $x = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung von (β) die Wurzel $n - \mu - g$ besitzt, und ob zu dieser Wurzel ein Integral gehört, welches eine ganze Function $(g + \mu - n)^{\text{ten}}$ Grades ist.

Zu diesem Ende denken wir uns (β) in der **Normalform** geschrieben, also

$$(\beta)\qquad x^\mu\left(c_{\mu\mu}+c_{\mu-1,\mu}\frac{1}{x}+\cdots+c_{0\mu}\frac{1}{x^\mu}\right)\mathfrak{y}^{(\mu)}$$
$$+x^{\mu-1}\left(c_{\mu-1,\mu-1}+c_{\mu-2,\mu-1}\frac{1}{x}+\cdots+c_{0,\mu-1}\frac{1}{x^{\mu-1}}\right)\mathfrak{y}^{(\mu-1)}$$
$$+\cdots+c_{00}\mathfrak{y}=0,$$

wo die $c_{i\varkappa}$ Constanten bedeuten, und bilden die charakteristische Function

$$x^\sigma\sum_\nu f_\nu(\sigma)x^\nu,$$

wo also

$$(8)\qquad f_{-i}(\sigma)=\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-i+1)\sum_{\lambda=i}^{\mu}c_{\lambda-i,\lambda}(\sigma-i)\cdots(\sigma-\lambda+i)$$
$$(i=0,1,2,\cdots\mu)$$

ist, während alle folgenden $f_{-i}(\sigma)$ identisch verschwinden. Setzen wir in (β) die Reihe

$$(9)\qquad \mathfrak{y}=x^\gamma\sum_{\nu=0}^{\infty}g_\nu(\gamma)x^{-\nu}$$

ein, so befriedigen die $g_\nu(\gamma)$ die Recursionsformel

$$(10)\qquad \sum_{\lambda=0}^{\nu}f_{\lambda-\nu}(\gamma-\lambda)g_\lambda(\gamma)=0,\quad 0<\nu-\lambda<n.$$

Wenn $-\gamma$ eine ganze nicht positive Zahl ist, die der determinirenden Fundamentalgleichung

$$f_0(-\sigma)=0$$

genügt, und es soll zu dem Exponenten $-\gamma$ ein Integral gehören, welches eine ganze rationale Function von x ist, so müssen für die Recursionsformel (10) zunächst die Bedingungen erfüllt sein, die die Existenz eines zu $-\gamma$ gehörigen und in Reihenform darstellbaren Integrals ermöglichen (vergl. Nr. 52ff.; siehe auch den Nachtrag zu dieser Nummer am Schlusse des vorliegenden Bandes). Sind diese Bedingungen erfüllt, so können wir aus den Gleichungen (10) für $\nu=0, 1,\cdots\gamma$ die Coefficienten

$$g_0(\gamma),\ g_1(\gamma),\ \cdots\ g_\gamma(\gamma)$$

der Reihe (9) berechnen. Die zur Bestimmung der folgenden Coefficienten dienenden Gleichungen lauten dann

$$(11)\qquad \begin{cases} f_0(-1)g_{\gamma+1}(\gamma)+f_{-1}(0)g_\gamma(\gamma)+f_{-2}(1)g_{\gamma-1}(\gamma)+\cdots=0,\\ f_0(-2)g_{\gamma+2}(\gamma)+f_{-1}(-1)g_{\gamma+1}(\gamma)+f_{-2}(0)g_\gamma(\gamma)+\cdots=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Aus der Form (8) der Functionen $f_{-i}(\sigma)$ erhellt, dass in den Gl chungen (11) die Coefficienten der Grössen

$$g_\gamma(\gamma),\ g_{\gamma-1}(\gamma),\ g_{\gamma-2}(\gamma),\ \cdots$$

sämmtlich verschwinden; diese Gleichungen werden folglich jedenfa befriedigt, wenn wir alle

$$g_{\gamma+i}(\gamma) = 0 \qquad (i=1, 2, 3, \cdots)$$

nehmen. Daraus folgt der von Herrn Heffter herrührende Satz:

Wenn zu der negativen ganzzahligen Wurzel $-\gamma$ der $x=\infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung v (β) ein in Reihenform darstellbares Integral gehört, so besit diese Differentialgleichung ein ganzes rationales Integral

Dieser Satz gilt auch, wenn (β) nicht zur Fuchs'schen Cla gehört, sondern nur so beschaffen ist, dass $x=\infty$ eine Stelle Bestimmtheit ist. Wir hätten denselben aus dem Satze der Nr. 1 (Bd. I, S. 423) über die Existenz eines Normalintegrals für die dasel betrachtete Differentialgleichung, welches eine mit dem fundamenta determinirenden Factor $e^{c_x x}$ multiplicirte ganze rationale Function erschliessen können, haben es aber vorgezogen, einen directen Bew zu liefern.

Wenn die in Bezug auf ihre Reductibilität hin zu untersuchen Differentialgleichung (A) der Fuchs'schen Classe angehört, so gilt d Gleiche offenbar auch für die zu (A) associirten Differentialgleichunge In diesem Falle hat man also um zu entscheiden, ob (A) reductib ist, nur für Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe diejenig Lösungen aufzufinden, die sich als Producte von Potenzen rational Functionen darstellen lassen, und dann für eine endliche Anzahl wol bestimmter linearer Differentialgleichungen festzustellen, ob sie ih sämmtlichen Lösungen mit (A) gemein haben oder nicht.

Fünftes Kapitel.

179. Genauere Betrachtung der Integralquotienten. Projective Substitutionen und Gruppen. Isomorphismus. Beziehungen zwischen homogenen, unimodularen und projectiven Gruppen.

Wir wollen nun dazu übergehen, die durch die geometrische Deutung der Lösungen $y_1, y_2, \cdots y_n$ unserer Differentialgleichung (A) als homogener Punktcoordinaten eines $(n-1)$-fach ausgedehnten Raumes R_{n-1} gewonnenen principiellen Gesichtspunkte auszunützen, indem wir insbesondere jene Integralcurve $\mathfrak{C}$, die durch die Gleichungen

$$y_\varkappa = y_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

definirt war, in den Vordergrund unserer Betrachtungen stellen.

Es wurde schon in der Nr. 172 (S. 145) hervorgehoben, dass die Curve $\mathfrak{C}$ dieselbe bleibt, wenn wir die $y_\varkappa(x)$ mit einem allen gemeinsamen Factor multipliciren, d. h. also, dass jeder Differentialgleichung, die aus (A) durch die Transformation

(1) $$y = \lambda z$$

hervorgeht, dieselbe Curve $\mathfrak{C}$ zugeordnet ist. Dies führte uns dazu, die Integralquotienten $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ zu untersuchen, durch welche vermöge der Gleichungen (vergl. S. 149)

(2) $$\mathfrak{y}_1 = \left\{ \frac{\text{const.}}{D(\eta_1', \eta_2', \cdots \eta_{n-1}')} \right\}^{\frac{1}{n}},$$

(3) $$\mathfrak{y}_\varkappa = \mathfrak{y}_1 \eta_{\varkappa-1} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n)$$

das Fundamentalsystem

$$\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$$

der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) bestimmt war. Jede lineare Differentialgleichung mit in x rationalen Coefficienten, deren Integralquotienten $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ sind, geht dann aus ($\mathfrak{A}$) durch die Transformation

$$\mathfrak{y} = e^{\int r(x)\,dx} z$$

hervor, wo $r(x)$ eine rationale Function von x bedeutet.

Wir hatten das Quotientensystem $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ ein Fu mentalsystem von Integralquotienten genannt. In der Tha sich der Quotient irgend zweier Integrale $\bar{y}_1, \bar{y}_2$,

$$\eta = \frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2},$$

durch die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ in einfacher Weise darstellen. Sei nä

$$\bar{y}_1 = a_0 y_1 + a_1 y_2 + \cdots + a_{n-1} y_n,$$
$$\bar{y}_2 = b_0 y_1 + b_1 y_2 + \cdots + b_{n-1} y_n,$$

so ist offenbar

$$\eta = \frac{a_0 + a_1\eta_1 + \cdots + a_{n-1}\eta_{n-1}}{b_0 + b_1\eta_1 + \cdots + b_{n-1}\eta_{n-1}},$$

d. h. jeder Integralquotient ist eine gebrochene lineare F tion der Elemente eines Fundamentalsystems von Inte quotienten.

Bedeutet $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots \bar{y}_n$ ein zweites Fundamentalsystem von gralen der Differentialgleichung (A) und

$$\bar{\eta}_{\varkappa-1} = \frac{\bar{y}_\varkappa}{\bar{y}_1} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n)$$

das entsprechende System von Quotienten, so ist, wenn wir

$$\bar{\mathfrak{y}}_\varkappa = e^{\frac{1}{n}\int p_1 dx}\, \bar{y}_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

setzen, $\bar{\mathfrak{y}}_1, \bar{\mathfrak{y}}_2, \cdots \bar{\mathfrak{y}}_n$ das entsprechende Fundamentalsystem von und folglich

(4) $$\bar{\mathfrak{y}}_\varkappa = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\varkappa i}\mathfrak{y}_i \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo die $\alpha_{\varkappa i}$ Constanten bedeuten, für welche

(5) $$|\alpha_{\varkappa i}| = 1 \qquad (\varkappa, i = 1, 2, \cdots n)$$

ist. Also haben wir

(6) $$\bar{\eta}_{\varkappa-1} = \frac{\alpha_{\varkappa 1} + \alpha_{\varkappa 2}\eta_1 + \cdots + \alpha_{\varkappa n}\eta_{n-1}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}\eta_1 + \cdots + \alpha_{1n}\eta_{n-1}} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n),$$

d. h. die Elemente irgend eines Fundamentalsystems Integralquotienten stellen sich durch $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ lineare gebrochene Functionen mit demselben Nenner d

Die Beziehung zwischen den beiden Functionssystemen

$$\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1},$$
$$\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \cdots \bar{\eta}_{n-1},$$

die durch Gleichungen von der Form (6) mit der Bedingung (5) festgelegt wird, wollen wir, im Anschlusse an die geometrische Bedeutung der linearen homogenen Transformation (4) als Collineation, so bezeichnen, dass wir sagen, das System $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \cdots \bar{\eta}_{n-1}$ gehe aus $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ durch Ausübung einer projectiven Transformation oder Substitution hervor. Von dieser Art der Beziehung ist zunächst evident, dass sie eine gegenseitige ist, denn die Gleichungen (6) lassen sich nach den $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ in eindeutiger Weise auflösen; dabei ist es aber wesentlich, dass die linear gebrochenen Substitutionen (6) denselben Nenner haben. Wir sagen demnach:

Jedes Fundamentalsystem von Integralquotienten der Differentialgleichung (A) geht aus jedem andern durch Ausübung einer projectiven Transformation hervor.

Auf diese Weise entspricht also jeder linearen homogenen Transformation der $y_1, y_2, \cdots y_n$ eine projective Transformation der $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ und folglich auch jeder Gruppe von linearen homogenen Transformationen der $y_1, y_2, \cdots y_n$ eine Gruppe von projectiven Transformationen oder kurz eine projective Gruppe der

$$\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}.$$

Insbesondere wird also die Gesammtheit aller projectiven Transformationen der $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ eine Gruppe bilden, die wir die allgemeine projective Gruppe Λ nennen wollen; wir stellen uns die Aufgabe, die Beziehungen dieser Gruppe Λ zu der allgemeinen homogenen linearen Gruppe L der $y_1, y_2, \cdots y_n$ und zu der speciellen $\overline{L}$ genauer zu ergründen.

Wir führen zu dem Ende einen wichtigen gruppentheoretischen Begriff ein.

Wenn die Operationen zweier Gruppen G und Γ einander so zugeordnet sind, dass der aus zwei Operationen der einen Gruppe componirten Operation die aus den beiden entsprechenden Operationen der andern Gruppe componirte Operation entspricht, so sagt man, die beiden Gruppen seien isomorph.

Entspricht in zwei isomorphen Gruppen G und Γ jeder Operation der einen Gruppe eine und nur eine wohlbestimmte Operation der andern, so nennt man den Isomorphismus einen holoedrischen oder einstufigen, wenn dagegen die Zuordnung keine gegenseitig eindeutige ist, so heissen die Gruppen meriedrisch oder mehrstufig isomorph.

Aus der Definition des Isomorphismus folgt, dass denjenig Operationen der einen Gruppe, die eine Untergruppe constituir Operationen der andern Gruppe entsprechen, die ebenfalls eine Unt gruppe ausmachen. Wir werden also von einander entsprechend Untergruppen isomorpher Gruppen reden können. Einer ausgezei neten Untergruppe der einen Gruppe entspricht dann offenbar a eine ausgezeichnete Untergruppe der andern. Also entspricht i besondere der identischen Operation der einen Gruppe ei ausgezeichnete Untergruppe der andern.

Möge der identischen Operation 1 von Γ die ausgezeichnete Unt gruppe E von G entsprechen. Sei ferner S irgend eine Operat von G, die der Operation Σ von Γ entspricht, dann sind die säm lichen Operationen von G, die der Operation Σ von Γ entsprechen, der Form

$$eS \quad \text{oder} \quad Se$$

enthalten, wo e irgend eine Operation von E bedeutet. Wenn Gruppen G und Γ holoedrisch isomorph sind, so besteht E einfa aus der identischen Operation 1 allein.

Unter Benutzung dieser Terminologie können wir also jedenfa sagen:

Die projective Gruppe $\varLambda$ von $(n-1)$ Variabeln ist d speciellen linearen homogenen Gruppe L von n Variabe und beide sind der allgemeinen linearen homogenen Grup $\overline{L}$ isomorph.

Fragen wir nun nach denjenigen Operationen von $\overline{L}$ und L, die d identischen Operation von $\varLambda$ entsprechen.

Soll die lineare Substitution

$$\bar{y}_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{i\varkappa} y_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{7}$$

der Gruppe L der identischen Substitution von $\varLambda$ entsprechen, so mu

$$\bar{\eta}_{i-1} = \frac{\alpha_{i1} + \alpha_{i2}\eta_1 + \cdots + \alpha_{in}\eta_{n-1}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}\eta_1 + \cdots + \alpha_{1n}\eta_{n-1}} = \eta_{i-1} \qquad (i = 2, 3, \cdots n) \tag{8}$$

sein. Daraus folgt, da diese Gleichungen identisch, d. h. für a Werthesysteme der $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ bestehen müssen,

$$\alpha_{i\varkappa} = 0, \quad \text{für} \quad i \neq \varkappa$$

und ferner

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \cdots = \alpha_{nn} = t,$$

wo t einen noch willkürlich zu wählenden Parameter bedeutet. Also entspricht der identischen Operation von Λ die aus der infinitesimalen Transformation

$$(9) \qquad y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \cdots + y_n \frac{\partial f}{\partial y_n}$$

erzeugte eingliedrige continuirliche Gruppe E

$$(10) \qquad \bar{y}_\varkappa = t y_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo t einen willkürlichen Parameter bedeutet. Diese ist also in L als ausgezeichnete Untergruppe enthalten.

Bedeutet (8) eine unimodulare Substitution, d. h. ist

$$|\alpha_{i\varkappa}| = 1 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

so unterliegt der Factor t noch der Bedingung

$$t^n = 1,$$

d. h. der identischen Operation von Λ entspricht die endliche Untergruppe

$$(11) \qquad \bar{\mathfrak{y}}_\varkappa = \varepsilon \mathfrak{y}_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

der speciellen linearen homogenen Gruppe $\overline{L}$, wo ε eine n^{te} Einheitswurzel bedeutet.

Wenn der identischen Operation einer Gruppe Γ die ausgezeichnete Untergruppe E einer isomorphen Gruppe G entspricht, und es entspricht der Untergruppe γ von Γ die Untergruppe g von G, so sind auch γ und g isomorph, und der identischen Operation von γ entspricht eine Untergruppe e von E, die in g ausgezeichnet enthalten ist.

Wir schliessen hieraus, dass die infinitesimalen Transformationen der Gruppen Λ und L einander gegenseitig eindeutig entsprechen müssen, dass aber die Gruppe L nicht von infinitesimalen Transformationen erzeugt, also keine continuirliche Gruppe ist. Da $\overline{L}$ von $n^2 - 1$ Parametern abhängt, so enthält diese Gruppe genau $n^2 - 1$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen. Es sind dies

$$y_i \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa}, \quad y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa} - y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n;\ i \neq \varkappa).$$

Um die entsprechenden infinitesimalen Transformationen von Λ zu bilden, berechnen wir die entsprechenden Variationen der $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$; da

$$\delta \eta_{\varkappa-1} = \delta \left(\frac{y_\varkappa}{y_1}\right) = \frac{y_1 \delta y_\varkappa - y_\varkappa \delta y_1}{y_1^2} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n),$$

so finden wir

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa} = \frac{\partial f}{\partial \eta_{\varkappa-1}}, \quad y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial y_1} = -\eta_{\varkappa-1}\left(\eta_1 \frac{\partial f}{\partial \eta_1} + \cdots + \eta_{n-1} \frac{\partial f}{\partial \eta_{n-1}}\right).$$

$$y_i \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa} = \eta_{i-1} \frac{\partial f}{\partial \eta_{\varkappa-1}},$$

$$y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa} - y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} = \eta_{\varkappa-1} \frac{\partial f}{\partial \eta_{\varkappa-1}} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial \eta_1} + \cdots + \eta_{n-1} \frac{\partial f}{\partial \eta_{n-1}}$$

$$(i, \varkappa = 2, 3, \cdots n;\ i \neq \varkappa).$$

Aus diesen infinitesimalen Transformationen ist die allgemeine project Gruppe Λ erzeugt. Der Umstand, dass Λ aus infinitesimalen Tra formationen erzeugt ist, $\overline{L}$ aber nicht, bewirkt, dass es für vi Betrachtungen zweckmässiger ist, mit der projectiven Gruppe statt ı der unimodularen homogenen Gruppe zu operiren.

180. Differentialgleichung für die Integralquotienten. Transformati der unabhängigen Variabeln. Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Schwarz'sche Ableitung.

Auf Grund der in der vorigen Nummer gemachten Bemerkung können wir uns nunmehr die Bedeutung der Integralquotient $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ für die Integration der vorgelegten Differentialgl chung (A) vollständig klar machen.

Was zunächst die Transformationsgruppe anlangt, so sei diese Gruppe für die Differentialgleichung (A). Die der Untergrup H von L entsprechende Untergruppe $\overline{H}$ von $\overline{L}$ ist die Transformatior gruppe von (𝔄). Statt dieser betrachten wir die dieser unimodular Gruppe isomorphe Untergruppe Θ der projectiven Gruppe Λ. D identischen Transformation von Θ entspricht dann eine ausgezeichne Untergruppe von H, die in der Gruppe (10) und eine ebensolc Untergruppe von $\overline{H}$, die in der Gruppe (11) enthalten sein mu Eine rationale Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die bei der Grup (10) ungeändert bleibt, ist eine homogene Function nullten Grac der $y_1, y_2, \cdots y_n$ und ihrer Ableitungen; so weit also solche Dif rentialfunctionen der $y_1, y_2, \cdots y_n$ in Betracht kommen, kann man si auf das Studium der Integralquotienten und der zugehörigen proj tiven Gruppe beschränken. Dies ist ferner zulässig, wenn es sich ι homogene Gleichungen beliebigen Grades zwischen den $y_1, y_2, \cdots$ und deren Ableitungen handelt, da diese offenbar bei Transformatior der Gruppe (10) erhalten bleiben.

In Bezug auf die Monodromiegruppe h von (A) gelten die a logen Bemerkungen. Bedeute $\overline{h}$ die dem h entsprechende Untergru von $\overline{L}$, d. h. die Monodromiegruppe von (𝔄) und ϑ die zu $\overline{h}$ isomor

projective Gruppe, so entspricht der identischen Transformation von ϑ eine in (10) beziehungsweise (11) enthaltene ausgezeichnete Untergruppe von h beziehungsweise $\bar{h}$. Wir haben also den Satz:

Wenn die Integralquotienten $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ bei einem Umlaufe der unabhängigen Variabeln x ungeändert bleiben, so multipliciren sich die Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ von (A) mit einer Constanten, die Integrale $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ von ($\mathfrak{A}$) mit einer n^{ten} Einheitswurzel.

Wenn wir einen Integralquotienten, z. B.

$$\eta_1 = \frac{y_2}{y_1}$$

als eine rationale Differentialfunction der $y_1, y_2, \cdots y_n$ auffassen, so können wir nach der dieser Function entsprechenden Resolvente der Differentialgleichung (A) fragen, d. h. (vergl. Nr. 147, S. 58 ff.) nach der algebraischen Differentialgleichung niedrigster Ordnung, der η_1 genügt.

Wir beschränken uns vorerst auf die Betrachtung des „allgemeinen“ Falles, wo die Transformationsgruppe der Differentialgleichung (A) die allgemeine lineare homogene Gruppe L ist. Dann haben wir also nach den in der Nr. 143 (S. 48) angegebenen Vorschriften zunächst in den Ausdruck von η_1 für $y_1, y_2, \cdots y_n$ die aus diesen Grössen durch die allgemeinste Transformation von L

$$\bar{y}_\varkappa = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\varkappa i} y_i, \quad |\alpha_{i\varkappa}| \neq 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

hervorgehenden Grössen zu setzen; der so entstehende Ausdruck

$$\eta = \frac{\alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \cdots + \alpha_{2n} y_n}{\alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \cdots + \alpha_{1n} y_n}$$

hängt von $2n - 1$ wesentlichen Parametern ab und stellt (vergl. Nr. 179, S. 176) den allgemeinsten Integralquotienten dar.

Es wird also, nach den Sätzen der Nr. 144 (S. 50), die Function η bei genau $n^2 - 2n + 1$ infinitesimalen Transformationen von L ungeändert bleiben und einer algebraischen Differentialgleichung $(2n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit in x rationalen Coefficienten genügen. Diese Differentialgleichung ist so beschaffen, dass ihr allgemeines Integral η sich als gebrochene lineare Function mit willkürlichen Coefficienten (die nichts anderes sind wie die Integrationsconstanten) von $n - 1$ particularen Integralen $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ darstellen lässt.

Ein Fundamentalsystem von Integralquotienten spielt also für diese Differentialgleichung $(2n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung eine ähnliche Rolle, wie

das Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \cdots y_n$ für die lineare Differentialgleichung (A). Wenn die Transformationsgruppe von (A) nicht gerade die allgemeine homogene lineare Gruppe L ist, so können wir den folgenden Satz aussprechen:

Für die Differentialgleichung $(2n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, der die Integralquotienten η der Differentialgleichung (A) Genüge leisten, haben die projectiven Gruppen Θ und ϑ, die der Transformationsgruppe H beziehungsweise der Monodromiegruppe h von (A) isomorph sind, dieselbe Bedeutung, wie die Gruppen H und h für die Differentialgleichung (A) selbst. Die Gruppe ϑ ist natürlich stets eine abzählbare, während die Gruppe Θ, sofern sie keine endliche ist, stets continuirliche Schaaren von Transformationen enthält.

Wir werden im Folgenden oft die Gruppe Θ die Transformationsgruppe, ϑ die Monodromiegruppe der Integralquotienten der Differentialgleichung (A) nennen.

Die Form der Differentialgleichung $(2n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung für η ist im Allgemeinen eine sehr complicirte, wir werden dieselbe sehr bald für den einfachsten Fall $n=2$ aufstellen. Jedenfalls ist von vornherein klar, dass die Differentialgleichung für η nur von den Coefficienten der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) abhängen kann, da sie ja ungeändert bleiben muss, wenn wir von der Differentialgleichung (A) durch die Transformation

$$y = \lambda z$$

zu einer andern Differentialgleichung übergehen.

Die Betrachtung der Integralcurve $\mathfrak{C}$, die durch die Gleichungen

$$y_\varkappa = y_\varkappa(z) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

dargestellt wird, veranlasst uns jetzt noch einen weiteren Schritt zu machen.

Wir hatten die Curve $\mathfrak{C}$ dargestellt, indem wir die homogenen Coordinaten ihrer Punkte als Functionen eines Parameters x auffassten; für die Natur der Curve ist aber die besondere Wahl dieses Parameters offenbar unwesentlich. Wir können zu einem andern Parameter übergehen, indem wir x gleich einer Function $\varphi(\xi)$ einer neuen Variabeln ξ setzen

$$x = \varphi(\xi), \tag{1}$$

dadurch wird die ursprüngliche Differentialgleichung (A) in eine Differentialgleichung mit der unabhängigen Variabeln ξ transformirt, für welche die Curve $\mathfrak{C}$ dieselbe Bedeutung hat wie für (A). Combiniren wir diese Transformation mit der Transformation

(2) $$y = \lambda z,$$

wo λ irgend eine Function von x bedeutet, so erhalten wir also die allgemeinste Differentialgleichung für z als Function von ξ, zu der dieselbe Integralcurve $\mathfrak{C}$ gehört wie zu (A).

Für die Differentialgleichung zweiter Ordnung

($\mathbf{A}_2$) $$\frac{d^2y}{dx^2} + 2p_1\frac{dy}{dx} + p_2 y = 0$$

verliert die Curve $\mathfrak{C}$ insofern ihre Bedeutung, als wir in diesem Falle, wenn wir die Elemente y_1, y_2 eines Fundamentalsystems als homogene Coordinaten eines Punktes auf einer geraden Linie deuten, ein Continuum von Punkten erhalten, welches mit dieser Geraden von derselben Dimension ist. Wir schliessen hieraus, dass diese Gerade selbst in gewissem Sinne die Rolle der Integralcurve spielt, so dass also alle linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in diesem Sinne dieselbe Integralcurve haben.

Dies bestätigt sich dadurch, dass jede lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in jede andere durch Transformationen von der Form (1) und (2) übergeführt werden kann.

Sei nämlich

($\mathbf{B}_2$) $$\frac{d^2z}{d\xi^2} + 2q_1\frac{dz}{d\xi} + q_2 z = 0$$

irgend eine andere Differentialgleichung zweiter Ordnung. Setzen wir dann

(3) $$y = e^{-\int p_1 dx}\mathfrak{y}, \quad z = e^{-\int q_1 d\xi}\mathfrak{z},$$

so erhalten wir für $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ die Differentialgleichungen

($\mathfrak{A}_2$) $$\frac{d^2\mathfrak{y}}{dx^2} + \left(p_2 - p_1'(x) - p_1^2\right)\mathfrak{y} = 0,$$

($\mathfrak{B}_2$) $$\frac{d^2\mathfrak{z}}{d\xi^2} + \left(q_2 - q_1'(\xi) - q_1^2\right)\mathfrak{z} = 0,$$

wo wir, wie auch stets im Folgenden, durch

$$f^{(x)}(t)$$

die x^{te} Ableitung einer Function f nach dem beigeschriebenen Argumente t bezeichnen.

Seien

$$\eta = \frac{\mathfrak{y}_2}{\mathfrak{y}_1}, \quad \zeta = \frac{\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{z}_1}$$

die Quotienten der Elemente eines Fundamentalsystems von ($\mathfrak{A}_2$) beziehungsweise ($\mathfrak{B}_2$), dann ist (Nr. 179, S. 175, Gleich. (2))

$$\mathfrak{y}_1 = \frac{c_1}{\sqrt{\eta'(x)}}, \quad \mathfrak{z}_1 = \frac{c_2}{\sqrt{\zeta'(\xi)}},$$

wo c_1, c_2 Constanten bedeuten. Bilden wir nun die Ausdrücke

$$\frac{1}{\mathfrak{y}_1}\frac{d^2\mathfrak{y}_1}{dx^2} = \frac{\frac{3}{4}\eta''(x)^2 - \frac{1}{2}\eta^{(3)}(x)\eta'(x)}{\eta'(x)^3} = \Delta\binom{\eta}{x},$$

$$\frac{1}{\mathfrak{z}_1}\frac{d^2\mathfrak{z}_1}{d\xi^2} = \frac{\frac{3}{4}\zeta''(\xi)^2 - \frac{1}{2}\zeta^{(3)}(\xi)\zeta'(\xi)}{\zeta'(\xi)^3} = \Delta\binom{\zeta}{\xi},$$

so ist

(4) $$\Delta\binom{\eta}{x} = p_1^2 + p_1'(x) - p_2,$$

und dies ist nichts anderes wie die Differentialgleichung dritter Ordnung ($2n - 1 = 3$ für $n = 2$), der die Integralquotienten von (A_2) genügen. Ebenso haben wir

(5) $$\Delta\binom{\zeta}{\xi} = q_1^2 + q_1'(\xi) - q_2.$$

Für den Differentialausdruck $\Delta\binom{\eta}{x}$, der gewöhnlich als die **Schwarz'sche Ableitung** bezeichnet wird, gelten nun die leicht zu verificirenden Gleichungen

(a) $$\Delta\binom{\eta}{x}dx^2 = -\Delta\binom{x}{\eta}d\eta^2,$$

(b) $$\Delta\binom{\eta}{x}dx^2 = \Delta\binom{\eta}{\xi}d\xi^2 + \Delta\binom{\xi}{x}dx^2;$$

wir haben folglich mit Rücksicht auf die Gleichung (4)

(6) $$\Delta\binom{\xi}{x} = p_1^2 + p_1'(x) - p_2 - \Delta\binom{\eta}{\xi}\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2.$$

Wenn wir nunmehr ξ als Function von x durch die Gleichung

(7) $$\eta(x) = \zeta(\xi)$$

definiren, so ist also

(8) $$\Delta\binom{\xi}{x} = p_1^2 + p_1'(x) - p_2 - \left(q_1^2 + q_1'(\xi) - q_2\right)\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2$$

eine Differentialgleichung für diese Function ξ, deren Coefficienten von den Coefficienten der Differentialgleichungen (A_2), (B_2) in einfachster Weise abhängen. Wir haben dann noch zwischen y und z die aus den Gleichungen (3) und (7) folgende Beziehung

$$y = e^{-\int p_1 dx + \int q_1 d\xi}\sqrt{\frac{dx}{d\xi}}\, z,$$

wodurch unsere Behauptung bewiesen ist.

Nimmt man speciell

$$q_1^2 + q_1'(\xi) - q_2 = 0,$$

so wird die Gleichung (8) mit (4) identisch; also ist in diesem Falle ξ selbst ein Integralquotient von (A_2); d. h. durch Einführung von η als unabhängiger Variabeln und durch die Transformation

$$y = e^{-\int p_1 dx} \frac{\zeta}{\sqrt{\eta'(x)}}$$

verwandelt sich (A_2) in die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = 0.$$

Wir werden sehr bald eine Verallgemeinerung dieses Ergebnisses auf den Fall einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung kennen lernen (Nr. 185, S. 205).

Die linke Seite der Differentialgleichung (4) ist, da sie sich rational durch die Coefficienten von (A_2) und deren Ableitungen darstellen lässt, als Function von η aufgefasst, eine Differentialinvariante der allgemeinen projectiven Gruppe in η, d. h. der Gruppe

$$\bar{\eta} = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1;$$

wir haben also

$$\text{(c)} \qquad \Delta\binom{\eta}{x} = \Delta\left(\frac{\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}}{x}\right), \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

und dadurch ist die Thatsache, dass das allgemeine Integral von (4) als linear gebrochene Function einer particularen Lösung η dargestellt werden kann, in Evidenz gesetzt.

181. Allgemeines über Invarianten. Algebraische Formen. Aequivalenz linearer Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung. Invarianten dieser Aequivalenz. Gewicht.

Wenn die Ordnungszahl n der Differentialgleichung (A) grösser ist wie zwei, so kann (A) nicht in jede lineare Differentialgleichung derselben Ordnung

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^n z}{d\xi^n} + q_1 \frac{d^{n-1} z}{d\xi^{n-1}} + \cdots + q_n z = 0$$

durch die beiden Transformationen (1) und (2) übergeführt werden, sondern es müssen, wenn eine solche Ueberführung möglich sein soll, zwischen den Coefficienten der Gleichungen (A), (B) gewisse Beziehungen

bestehen. Ueber die Natur dieser Beziehungen können wir uns v
vornherein durch einige allgemeine Bemerkungen orientiren.

Wenn man eine ganze rationale homogene Function m^{ten} Grade der n Unbestimmten $x_1, x_2, \cdots x_n$, eine sogenannte Form,

$$f = \sum_{(i_1, i_2, \cdots i_m)} a_{i_1 i_2 \cdots i_m} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m},$$

wo die Summation sich auf alle Combinationen der Zahlen $1, 2, \cdots$ zu je m mit unbedingter Wiederholung bezieht, durch die linear homogene Substitution

$$\text{(I)} \qquad x_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{i\varkappa} \xi_\varkappa, \quad |\alpha_{i\varkappa}| \neq 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

transformirt, so verwandelt sie sich in eine ebenso beschaffene Form der $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$

$$\varphi = \sum_{(i_1, i_2, \cdots i_m)} b_{i_1 i_2 \cdots i_m} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_m}.$$

Wenn $n = 2$, $m = 2$ ist, d. h. für binäre quadratische Formen, weis man, dass sich jede solche Form in jede andere durch eine linear homogene Substitution transformiren lässt; für Formen höheren Grade und mit mehr als zwei Unbestimmten ist es dagegen im Allgemeine nicht möglich, eine lineare Substitution von der Gestalt (I) anzugebe die eine gegebene Form f in eine ebenfalls gegebene Form φ überfüh

Damit eine solche Ueberführung möglich sei, müssen zwischen de Coefficienten der beiden Formen f und φ gewisse Beziehungen b stehen. Man erhält diese Beziehungen, wenn man sich in f die Su stitution (I) wirklich ausgeführt, dann die Coefficienten $b_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ der entstehenden Form als Functionen der $a_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ und der $\alpha_{i\varkappa}$ hi geschrieben denkt und zwischen den so entstehenden Gleichung den sogenannten Transformationsrelationen, die $\alpha_{i\varkappa}$ elimin Wie in der Algebra gezeigt wird (vergl. z. B. Aronhold, Ueber ei fundamentale Begründung der Invariantentheorie, Crelle's Journal, Bd. 6 S. 281 ff.), lässt sich das Resultat dieser Elimination, wenn man no die Gleichung

$$\delta = |\alpha_{i\varkappa}| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

hinzunimmt, im Allgemeinen in die Form setzen

$$\text{(II)} \qquad G_\lambda(b_{i_1, i_2, \cdots i_m}) = \delta^{\mu_\lambda} G_\lambda(a_{i_1, i_2, \cdots i_m}) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots),$$

wo die G_λ ganze rationale homogene Functionen der sämmtliche Grössen bedeuten, die aus der in der Parenthese geschriebenen Grös

für alle in Betracht kommenden Werthesysteme der $i_1, i_2, \cdots i_m$ hervorgehen, während die μ_λ bestimmte positive ganze Zahlen sind.

Man nennt zwei Formen f und φ, die durch eine Transformation (I) in einander übergeführt werden können, (im algebraischen Sinne) aequivalent und hat also den Satz:

Damit zwei Formen f und φ aequivalent sind, ist nothwendig und (im Allgemeinen auch) hinreichend, dass gewisse homogene Functionen, gebildet aus den Coefficienten von f, sich von denselben ganzen homogenen Functionen, gebildet aus den Coefficienten von φ, nur durch Factoren unterscheiden, die wohlbestimmte Potenzen einer festen Grösse δ sind.

Diese ganzen homogenen Functionen G_λ haben die Eigenschaft, sich nur mit einer ganzen Potenz der Substitutionsdeterminante δ zu multipliciren, wenn man von der Form f zu der aequivalenten Form φ übergeht, man nennt dieselben die Invarianten der Form f und jene Potenz μ_λ das Gewicht der Invariante G_λ. Durch Quotientenbildung aus Potenzen dieser relativen Invarianten kann man zu Ausdrücken gelangen, die beim Uebergange von einer Form zu ihrer aequivalenten absolut ungeändert bleiben, und man hat dann als Bedingung für die Aequivalenz zweier Formen f und φ die Gleichheit ihrer so gebildeten absoluten Invarianten anzusehen.

Die Ausdrücke der Coefficienten b der transformirten Form durch die Coefficienten a der ursprünglichen und die $\alpha_{i\varkappa}$ (die Transformationsrelationen) sind in den a linear, man kann sie also auffassen als eine lineare homogene Transformation der Grössen a in die Grössen b. Die Gesammtheit dieser Transformationen, die man erhält, wenn man die $\alpha_{i\varkappa}$ alle möglichen Werthe annehmen lässt, die durch die Ungleichung

$$|\alpha_{i\varkappa}| \neq 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

beschränkt sind, bildet offenbar eine continuirliche n^2-gliedrige algebraische lineare homogene Gruppe in den Grössen a. Die absoluten Invarianten der Form f sind dann nichts anderes als die Invarianten dieser Gruppe.

Aehnlich wie bei der Aequivalenz algebraischer Formen ist es, wenn man nach den Bedingungen sucht, die erfüllt sein müssen, damit irgendwelche analytische Gebilde in irgend einem wohldefinirten Sinne aequivalent sein sollen. Die Bedingungen ergeben sich stets in der Form, dass gewisse Invarianten dieser Aequivalenz für beide Gebilde übereinstimmen müssen.

Wir nennen zwei lineare Differentialgleichungen (A), (B) einander

aequivalent, sofern die eine aus der andern durch eine Transformation von der Gestalt

$$y = \lambda z, \quad x = \varphi(\xi)$$

hervorgeht. Wenn wir dann nach den Bedingungen fragen, die zwischen den Coefficienten von (A) und (B) bestehen müssen, damit diese Differentialgleichungen aequivalent seien, so erwarten wir nach dem eben dargelegten Princip, dass sich diese Bedingungen auch in der Form darstellen lassen werden, dass gewisse aus den Coefficienten von (A) gebildete Ausdrücke mit denselben Ausdrücken, gebildet aus den Coefficienten von (B), übereinstimmen.

Dass dies in der That der Fall ist, wollen wir nunmehr zeigen.

Wir wollen der Einfachheit wegen voraussetzen, dass in den beiden Differentialgleichungen (A), (B) der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung verschwindet, also

$$p_1 = 0, \quad q_1 = 0,$$

und überdies möge dem Coefficienten der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ableitung $(\varkappa = 0, 1, \cdots n-2)$ der numerische Coefficient (Binomialcoefficient)

$$n_\varkappa = \frac{n(n-1)\cdots(n-\varkappa+1)}{1\cdot 2\cdots \varkappa}$$

als Factor vorgesetzt werden. Wir haben also dann die gegebenen Differentialgleichungen in der Form

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + n_2 p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n y = 0,$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^n z}{d\xi^n} + n_2 q_2 \frac{d^{n-2} z}{d\xi^{n-2}} + \cdots + q_n z = 0.$$

Soll nun

$$y = \lambda z, \quad \xi = \psi(x), \quad x = \varphi(\xi)$$

sein, so folgt zunächst durch Ausführung der Substitution

$$y = \lambda z$$

in (A) für z als Function von x die Differentialgleichung (vergl. Nr. 172, S. 145)

$$(\bar{\text{A}}) \qquad \frac{d^n z}{dx^n} + n \frac{\lambda'(x)}{\lambda} \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + n_2 \left(p_2 + \frac{\lambda''(x)}{\lambda}\right) \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \cdots = 0.$$

Führen wir in dieser Differentialgleichung an die Stelle von x die neue unabhängige Variable ξ ein, so haben wir zunächst die Ableitungen von z nach x durch die Ableitungen von z nach ξ darzustellen. Man findet

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\xi}\xi'(x),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{d\xi^2}\xi'(x)^2 + \frac{dz}{d\xi}\xi''(x),$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{d^3z}{d\xi^3}\xi'(x)^3 + 3\frac{d^2z}{d\xi^2}\xi''(x)\xi'(x) + \frac{dz}{d\xi}\xi^{(3)}(x),$$

allgemein ist nach einer von Herrn Schlömilch gegebenen Formel

$$\frac{d^mz}{dx^m} = \sum_{\varkappa=1}^{m}\frac{A_{m\varkappa}}{\varkappa!}\frac{d^\varkappa z}{d\xi^\varkappa} \qquad (m=1,2,3\cdots),$$

wo $A_{m\varkappa}$ als ganze Function der Ableitungen von

$$\xi = \varphi(x)$$

durch die Gleichungen

$$A_{m\varkappa} = \lim_{\varrho=0}\frac{d^m}{d\varrho^m}(\varphi(x+\varrho)-\varphi(x))^\varkappa$$

definirt werden kann. Es ist also z. B.

$$A_{mm} = m!\,\varphi'(x)^m,$$

$$A_{m,m-1} = (m-1)!\,m_2\varphi''(x)\varphi'(x)^{m-2}.$$

Setzt man diese Werthe in $(\overline{\text{A}})$ ein, so muss die so entstehende Differentialgleichung für z als Function von ξ mit (B) übereinstimmen. Man findet nach Herrn Forsyth allgemein durch Coefficientenvergleichung:

(9) $$\frac{\lambda\xi'(x)^n}{(n-\varkappa)!}q_{n-\varkappa} = \sum_{i=0}^{n-\varkappa}\sum_{\nu=0}^{n-i-\varkappa}\frac{p_iA_{n-i-\nu,\varkappa}}{i!\,\nu!\,(n-i-\nu)!}\lambda^{(\nu)}(x) \qquad (\varkappa=0,1,2,\cdots n-1)$$

wo $p_0 = 1$, $p_1 = 0$ zu nehmen ist. Da $q_1 = 0$ sein sollte, ergiebt sich für $\varkappa = n-1$

(10) $$\frac{\lambda'(x)}{\lambda} = -\frac{n-1}{2}\frac{\xi''(x)}{\xi'(x)},$$

dadurch ist also in diesem Falle der Factor λ festgelegt; berücksichtigt man diesen Werth von λ und setzt

$$\frac{\xi''(x)}{\xi'(x)} = Z,$$

so hat man

(11) $$q_2\xi'(x)^2 = p_2 + \frac{n+1}{2\cdot 3}\left(\frac{1}{2}Z^2 - Z'(x)\right),$$

(12) $$q_3\xi'(x)^3 = p_3 - 3p_2Z + \frac{n+1}{4}(Z''(x) - 3Z'(x)Z + Z^3),$$

u. s. w.

Der Process der Herstellung von Bedingungen dafür, dass die Transformation der Gleichungen (A), (B) in einander möglich sei, be-

steht nun darin, dass man aus den „Transformationsrelationen“ (9) und den sich daraus durch Differentiation ergebenden Beziehungen zwischen den Ableitungen der Coefficienten $p_\varkappa$ und $q_\varkappa$ die Ableitungen von λ und ξ nach x zu eliminiren sucht.

Diese Elimination kann nun so bewirkt werden, dass die Resultate derselben in der eigenthümlichen separirten Form erscheinen:

$$\xi'(x)^\varkappa G_\varkappa\left(q_2, \cdots q_n, \frac{dq_2}{d\xi}, \cdots\right) = G_\varkappa\left(p_2, \cdots p_n, \frac{dp_2}{dx}, \cdots\right),$$

wo die $G_\varkappa$ ganze Functionen der Coefficienten q und ihrer Ableitungen beziehungsweise der p und ihrer Ableitungen bedeuten.

Z. B. ergiebt sich, wenn man die Gleichung (11) differentiirt:

$$\frac{dq_2}{d\xi}\xi'(x)^3 = \frac{dp_2}{dx} - 2p_2 Z + \frac{n+1}{2\cdot 3}(Z''(x) - 3Z'(x)Z + Z^3),$$

und nach (12) ist folglich

$$\left(q_3 - \frac{3}{2}\frac{dq_2}{d\xi}\right)\xi'(x)^3 = p_3 - \frac{3}{2}\frac{dp_2}{dx}; \tag{13}$$

man nennt den Ausdruck

$$p_3 - \frac{3}{2}\frac{dp_2}{dx} = \vartheta_3(x),$$

der sich also von dem entsprechenden Ausdrucke gebildet aus den Coefficienten von (B)

$$q_3 - \frac{3}{2}\frac{dq_2}{d\xi} = \vartheta_3(\xi)$$

nur durch die dritte Potenz der Grösse $\xi'(x)$ als Factor unterscheidet, eine Invariante vom Gewichte drei.

Betrachtet man die Gleichungen (9), unter Berücksichtigung von (10), für

$$\varkappa = n-2,\ n-3, \cdots n-\nu,$$

differentiirt die erste $(\nu-2)$-mal, die zweite $(\nu-3)$-mal u. s. f., die vorletzte einmal, so kann man eine ganze Function der

$$q_2, \cdots q_\nu, \frac{dq_2}{d\xi}, \cdots \frac{dq_{\nu-1}}{d\xi}, \cdots, \frac{d^{\nu-2}q_2}{d\xi^{\nu-2}} \tag{14}$$

finden, wir bezeichnen dieselbe durch

$$\vartheta_\nu(\xi),$$

die so beschaffen ist, dass, wenn man sie mit der ν^{ten} Potenz von $\xi'(x)$ multiplicirt und für die Grössen (14) ihre Ausdrücke durch die $p_\varkappa$ und deren Ableitungen einsetzt, sich dieselbe ganze Function

$$\vartheta_\nu(x)$$

der Grössen

$$p_2, \cdots p_\nu, \frac{dp_2}{dx}, \cdots \frac{dp_{\nu-1}}{dx}, \cdots, \frac{d^{\nu-2}p_2}{dx^{\nu-2}}$$

ergiebt. Es ist also

(15) $$\xi'(x)^\nu \vartheta_\nu(\xi) = \vartheta_\nu(x),$$

und man nennt ϑ_ν eine Invariante vom Gewichte ν.

Auf diese Weise erhalten wir für

$$\nu = 3, 4, \cdots n$$

im Ganzen $n - 2$ solche Invarianten, und die Gleichungen (15) stellen im Allgemeinen, wenn man noch $\xi'(x)$ als eine unbestimmte Grösse ansieht, das Resultat der Elimination aus den Transformationsrelationen (9) dar; sie liefern also die nothwendigen und (im Allgemeinen auch) hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Gleichungen (9) bestehen, oder was dasselbe heisst, dafür, dass die Gleichungen (A), (B) durch die Transformation

$$y = \lambda z, \quad x = \varphi(\xi),$$

wo λ durch die Gleichung (10) bestimmt ist und $\varphi(\xi)$ durch

$$\varphi(\xi) = \int^x \frac{d\xi}{\xi'(x)}$$

gegeben wird, in einander übergehen.

Betrachtet man die Gleichungen (9) — immer unter Berücksichtigung von (10) — als Definitionsgleichungen einer gewissen Transformation der Coefficienten $p_2, \cdots p_n$ in die $q_2, \cdots q_n$, so ist klar, dass die Gesammtheit dieser Transformationen, die für alle möglichen Wahlen der Function $x = \varphi(\xi)$ zum Vorschein kommen, eine continuirliche Gruppe bilden. Die Invarianten ϑ_ν stellen dann für $\nu = 3, 4, \cdots n$ ein System von relativen Differentialinvarianten dieser Gruppe dar, von welchem man durch Potenziren und Quotientenbildung zu einem Systeme von $n - 3$ absoluten Differentialinvarianten übergehen kann.

182. Bestimmung der Form der Invarianten. Infinitesimale Transformation einer Differentialgleichung in eine aequivalente.

Wir wollen nunmehr einige Sätze kennen lernen, die Herr Forsyth für solche Invarianten aufgestellt hat, und die uns auch dazu dienen werden, die expliciten Ausdrücke für dieselben zu finden.

Es möge zunächst jedem Coefficienten der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (A) eine gewisse Dimension beigelegt werden; $p_\varkappa$ möge

die Dimension $-\varkappa$ haben. Ebenso könnten wir z. B. der abhängigen Variabeln y eine gewisse Dimension beilegen, die im Uebrigen ganz willkürlich angenommen werden kann, wir wollen sagen m. Dann setzen wir fest, dass sich die Dimension einer Function von x durch jede Differentiation nach x um eine Einheit erniedrigt, so dass also $y^{(\varkappa)}(x)$ die Dimension $m-\varkappa$, und $p_\varkappa^{(i)}(x)$ die Dimension $-\varkappa-i$ erhält. Die Dimension des Gliedes

$$p_\varkappa y^{(n-\varkappa)}(x)$$

der linken Seite von (A) ist gleich der Summe der Dimensionen der beiden Factoren, d. h.

$$m-(n-\varkappa)-\varkappa=m-n,$$

somit für jeden Term von (A) dieselbe. Ganz ebenso verfahren wir mit der Differentialgleichung (B), wir legen also dem $q_\varkappa^{(i)}(\xi)$ die Dimension $-\varkappa-i$ und $z^{(\varkappa)}(\xi)$ die Dimension $m-\varkappa$ bei.

Betrachten wir nun eine Gleichung

$$\xi'(x)^\mu \Theta(\xi)=\Theta(x), \tag{16}$$

wo $\Theta(x)$ eine ganze Function der $p_\varkappa$ und ihrer Ableitungen nach x, $\Theta(\xi)$ dieselbe Function der $q_\varkappa$ und ihrer Ableitungen nach ξ bedeutet, so ergeben sich aus der Gestalt der Relationen (9) und der aus denselben durch Differentiation hervorgehenden Gleichungen ohne weiteres die beiden Sätze:

Auf jeder Seite der Gleichung (16) haben alle auftretenden Terme dieselbe Dimension, und

beide Seiten dieser Gleichung haben dieselbe Dimension sowohl in Bezug auf x als auch in Bezug auf ξ.

Sei $-\sigma$ die Zahl, welche die Dimension von $\Theta(x)$ in Bezug auf x angiebt, so ist also auch $\Theta(\xi)$ von der Dimension $-\sigma$ in Bezug auf ξ. Der Grösse $\xi'(x)$ muss in Bezug auf ξ die Dimension $+1$, in Bezug auf x die Dimension -1 beigelegt werden; also ist $\mu-\sigma$ die Dimension von $\xi'(x)^\mu\Theta(\xi)$ in Bezug auf ξ und $-\mu$ die Dimension derselben Grösse in Bezug auf x, da $\Theta(\xi)$ in Bezug auf x als von der Dimension Null anzusehen ist. Dagegen ist $\Theta(x)$ in Bezug auf ξ von der Dimension Null, in Bezug auf x von der Dimension $-\sigma$. Wir haben folglich

$$\mu-\sigma=0, \quad -\mu=-\sigma,$$

es muss also, wenn Θ eine Function von der Dimension $-\sigma$ ist, die Zahl μ, d. h. das Gewicht der Invariante Θ, gleich σ sein.

Auf Grund dieses Ergebnisses sind wir sofort im Stande, die Form einer Invariante Θ_ν vom Gewichte ν hinzuschreiben.

Da z. B. für $\nu = 3$ p_3 und $p_2'(x)$ die einzigen in Betracht kommenden Grössen von der Dimension -3 sind, so muss

$$\Theta_3(x) = a p_3 + b p_2'(x)$$

sein, wo a, b numerische Constanten bedeuten (vergl. den Ausdruck für $\vartheta_3(x)$ auf S. 190). Ebenso ist für $\nu = 4$

(17) $$\Theta_4(x) = a p_4 + b p_3'(x) + c p_2''(x) + \delta p_2^2,$$

und für $\nu = 5$

(18) $$\Theta_5(x) = a p_5 + b p_4'(x) + c p_3^{(2)}(x) + \delta p_2^{(3)}(x) + e p_2 p_3 + f p_2 p_2'(x)$$

u. s. w.

In ähnlicher Weise kann man bekanntlich in der Invariantentheorie der algebraischen Formen die Gestalt einer Invariante von vorgeschriebenem Gewichte angeben; für die Bestimmung der constanten (numerischen) Factoren bedient man sich dann gewisser partieller Differentialgleichungen, denen jede Invariante genügen muss und die nichts anderes besagen, als dass die Invariante bei den infinitesimalen Transformationen der durch die Transformationsrelationen dargestellten Gruppe (vergl. Nr. 181, S. 187), abgesehen von einer Potenz der Substitutionsdeterminante, ungeändert bleibt.

Genau ebenso lassen sich nun auch die in den Ausdrücken der Θ_ν auftretenden Constanten bestimmen, wenn man die Unveränderlichkeit (abgesehen von dem Factor $\xi'(x)^\nu$) dieser Invarianten bei der „infinitesimalen Transformation", der durch die Gleichungen (9) dargestellten Gruppe von Transformationen der $p_2, p_3, \cdots p_n$ in Evidenz setzt. Was man in diesem Falle unter der infinitesimalen Transformation zu verstehen hat, ist leicht zu erkennen.

Eine Transformation der Gruppe (9) wird bestimmt durch Fixirung der Function

$$\xi = \varphi(x),$$

da ja die Function λ durch die Gleichung (10) festgelegt ist, wenn man $\varphi(x)$ kennt. Nehmen wir also für $\varphi(x)$ eine Function, die sich unendlich wenig von x unterscheidet, d. h. setzen wir

(19) $$\xi = x + \varepsilon\chi(x),$$

wo ε eine unendlich kleine von x unabhängige Grösse, $\chi(x)$ eine willkürliche Function von x bedeutet, so stellen die dieser Wahl von $\varphi(x)$ entsprechenden Gleichungen (9) jene infinitesimale Transformation dar. Die Function λ bestimmt sich dann nach (10) durch die Gleichung

$$\lambda = \text{const.}\, (\xi'(x))^{-\frac{1}{2}(n-1)},$$

wenn wir also die Constante der Integration gleich Eins wählen, so haben wir

$$\lambda = (1 + \varepsilon\chi'(x))^{-\frac{1}{2}(n-1)}.$$

Entwickeln wir auf der rechten Seite dieser Gleichung nach Potenzen der unendlich kleinen Grösse ε und vernachlässigen die zweite und die höheren Potenzen derselben, so kommt

$$\lambda = 1 - \frac{1}{2}(n-1)\varepsilon\chi'(x)$$

und hiernach

$$\lambda^{(\varkappa)}(x) = -\frac{1}{2}(n-1)\varepsilon\chi^{(\varkappa+1)}(x).$$

Führen wir diese Ausdrücke in die Gleichungen (9) ein, so ergiebt sich, wenn die höheren Potenzen von ε immer vernachlässigt werden und $\varkappa$ an Stelle von $n-\varkappa$ gesetzt wird,

$$(20)\quad q_\varkappa = p_\varkappa(1-\varkappa\varepsilon\chi'(x)) - \frac{1}{2}\varepsilon\sum_{i=0}^{\varkappa-1}\varkappa_i\frac{(n+1)(\varkappa-i-1)+2i}{\varkappa-i+1}p_i\chi^{(\varkappa-i+1)}(x);$$

dies ist die gesuchte infinitesimale Transformation. Dieselbe muss nun durch Differentiation „erweitert" werden; man findet

$$(21)\quad \frac{d^\nu q_\varkappa}{d\xi^\nu} = \frac{d^\nu p_\varkappa}{dx^\nu}(1-(\nu+\varkappa)\varepsilon\chi'(x)) - \varkappa\varepsilon p_\varkappa\chi^{(\nu+1)}(x)$$
$$-\varepsilon\sum_{i=1}^{\nu-1}\nu_i\frac{\varkappa(\nu+1)-i(\varkappa-1)}{\nu-i+1}\frac{d^i p_\varkappa}{dx^i}\chi^{(\varkappa-i+1)}(x)$$
$$-\frac{1}{2}\varepsilon\sum_{i=0}^{\varkappa-1}\varkappa_i\frac{(n+1)(\varkappa-i-1)+2i}{\varkappa-i+1}\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(p_i\chi^{(\varkappa-i+1)}(x)\right).$$

Setzt man die sich aus (20), (21) ergebenden Werthe der $q_\varkappa$ und ihrer Ableitungen in den, abgesehen von den constanten (numerischen) Coefficienten, aufgestellten Ausdruck einer Invariante $\Theta_\nu(\xi)$ ein, so muss

$$\xi'(x)^\nu\,\Theta_\nu(\xi) = \Theta_\nu(x),$$

also, da nach (19)

$$\xi'(x)^\nu = 1 + \nu\varepsilon\chi'(x)$$

zu nehmen ist,

$$(1+\nu\varepsilon\chi'(x))\,\Theta_\nu(\xi) = \Theta_\nu(x)$$

sein, und diese Gleichung muss identisch bestehen. Daraus ergeben sich nun die erforderlichen Bestimmungsgleichungen für die noch unbekannten numerischen Coefficienten der Invariante $\Theta_\nu(x)$.

183. **Explicite Form der linearen Invarianten vom Gewichte 3, 4, 5, 6, 7 und des linearen Theiles derselben für beliebiges Gewicht.**

Nehmen wir, da für $\nu = 3$, abgesehen von einem constanten Factor, keine andere Invariante wie die bereits gefundene $\vartheta_3(x)$ existiren kann, den Fall $\nu = 4$, wo also $\Theta_4(\xi)$ in der Form (17) darstellbar sein muss. Nach (20) ist für $\varkappa = 2$

$$q_2 = p_2(1 - 2\varepsilon\chi'(x)) - \frac{1}{6}(n+1)\varepsilon\chi^{(3)}(x),$$

also, immer wieder unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von ε,

$$q_2^2 = p_2^2(1 - 4\varepsilon\chi'(x)) - \frac{1}{3}(n+1)\varepsilon\chi^{(3)}(x)p_2$$

und für $\varkappa = 4$

$$q_4 = p_4(1 - 4\varepsilon\chi'(x)) - 6\varepsilon\chi''(x)p_3 - (n+5)\varepsilon\chi^{(3)}(x)p_2 - \frac{3}{10}(n+1)\varepsilon\chi^{(5)}(x);$$

ferner hat man nach (21)

$$\frac{dq_3}{d\xi} = \frac{dp_3}{dx}(1 - 4\varepsilon\chi'(x)) - 3\varepsilon\chi''(x)p_3 - 3\varepsilon\frac{d}{dx}(p_2\chi''(x)) - \frac{n+1}{4}\varepsilon\chi^{(5)}(x),$$

$$\frac{d^2q_2}{d\xi^2} = \frac{d^2p_2}{dx^2}(1 - 4\varepsilon\chi'(x)) - 5\varepsilon\chi''(x)\frac{dp_2}{dx} - 2\varepsilon\chi^{(3)}(x)p_2 - \frac{n+1}{6}\varepsilon\chi^{(5)}(x).$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

$$\left(aq_4 + bq_3'(\xi) + cq_2''(\xi) + \partial q_2^2\right)(1 + 4\varepsilon\chi'(x)) = ap_4 + bp_3'(x) + cp_2''(x) + \partial p_2^2$$

ein, so kommt nach Division durch $-\varepsilon$

$$a\left\{6\chi''(x)p_3 + (n+5)\chi^{(3)}(x)p_2 + \frac{3}{10}(n+1)\chi^{(5)}(x)\right\} + \frac{1}{3}\partial(n+1)\chi^{(3)}(x)p_2$$
$$+ b\left\{3\chi''(x)p_3 + 3\frac{d}{dx}(p_2\chi''(x)) + \frac{n+1}{4}\chi^{(5)}(x)\right\}$$
$$+ c\left\{5\chi''(x)p_2'(x) + 2\chi^{(3)}(x)p_2 + \frac{n+1}{6}\chi^{(5)}(x)\right\} = 0,$$

woraus sich

$$b = -2a,$$
$$c = \frac{6}{5}a,$$
$$\partial = -\frac{3}{5}\,\frac{5n+7}{n+1}\,a,$$

also für $a = 1$

$$\Theta_4(x) = \vartheta_4(x) = p_4 - 2p_3'(x) + \frac{6}{5}p_2''(x) - \frac{3}{5}\,\frac{5n+7}{n+1}\,p_2^2$$

ergiebt. Auf ähnliche Weise findet man für $\nu = 5$

$$\Theta_5(x) = \vartheta_5(x) = p_5 - \frac{5}{2} p_4'(x) + \frac{15}{7} p_3''(x) - \frac{5}{7} p_2^{(3)}(x)$$
$$- \frac{10}{7} \frac{7n+13}{n+1} p_2 \vartheta_3(x).$$

Wendet man das gleiche Verfahren zur Bestimmung der Invariante vom Gewichte 6 an, so bleibt nicht wie bei $\nu = 3, 4, 5$ nur ein Coefficient (der als constanter Factor unwesentlich ist), sondern es bleiben zwei Coefficienten willkürlich. Dies hängt mit dem Umstande zusammen, dass ja offenbar ϑ_3^2 eine Invariante vom Gewichte 6 ist, so dass also, wenn ϑ_6 eine specielle Invariante dieses Gewichts bedeutet, auch

$$a\left(\vartheta_6 + b\vartheta_3^2\right)$$

eine Invariante vom Gewichte 6, und zwar, da sie zwei willkürliche Constanten a, b enthält, die allgemeinste Invariante dieses Gewichtes sein wird. In der That zeigt sich auch, dass der zweite bei Bestimmung von Θ_6 willkürlich bleibende Coefficient mit ϑ_3^2 multiplicirt ist. Wir werden diejenige Invariante vom Gewichte 6, die man erhält, wenn dieser Coefficient gleich Null gewählt wird, durch ϑ_6 bezeichnen. Es ergiebt sich

$$\vartheta_6(x) = p_6 - 3p_5'(x) + \frac{10}{3} p_4''(x) - \frac{5}{3} p_3^{(3)}(x) + \frac{5}{14} p_2^{(4)}(x) - 5\frac{3n+7}{n+1} p_2 \vartheta_4(x)$$
$$- \frac{7n+8}{14(n+1)} \left(4p_2 p_2^{(2)}(x) - 5p_2'(x)^2\right) - \frac{3}{7} \frac{35n^2+112n+93}{(n+1)^2} p_2^3.$$

Da für $\nu = 7$ das Product $\vartheta_3 \vartheta_4$ eine Invariante vom Gewichte 7 ist, so werden bei Bestimmung von Θ_7 auch zwei Coefficienten willkürlich bleiben, von denen der eine ein constanter Factor, der andere mit $\vartheta_3 \vartheta_4$ multiplicirt ist. Die bei Anullirung des letzteren sich ergebende Invariante bezeichnen wir durch ϑ_7, dieselbe ist

$$\vartheta_7(x) = p_7 - \frac{7}{2} p_6'(x) + \frac{105}{22} p_5''(x) - \frac{35}{11} p_4^{(3)}(x) + \frac{35}{33} p_3^{(4)}(x) - \frac{7}{44} p_2^{(5)}(x)$$
$$- \frac{21}{11} \frac{11n+13}{n+1} p_2 \vartheta_5(x) - \frac{9}{22} \frac{385n^2+1728n+1919}{(n+1)^2} p_2^2 \vartheta_3(x)$$
$$- \frac{3(n+4)}{11(n+1)^3} \left(10 p_2 \vartheta_3''(x) - 35 p_2'(x) \vartheta_3'(x) + 3p_2''(x) \vartheta_3(x)\right).$$

Von diesen Ausdrücken, die wir durch das an den Beispielen $\nu = 4, 5, 6, 7$ dargelegte und allgemein angedeutete Verfahren erhalten, wäre a posteriori noch nachzuweisen, dass es auch wirklich Invarianten sind. Man kann diesen Nachweis führen, indem man zeigt, dass ein Ausdruck, dessen sämmtliche Terme in dem angegebenen Sinne dieselbe Dimension haben und der bei der infinitesimalen Trans

formation (19) die Invarianteneigenschaft besitzt, auch für die beliebige, $\xi = \varphi(x)$ entsprechende Transformation (relativ) invariant bleiben muss. Man hat sich hierbei des Princips zu bedienen, wonach eine endliche Variation durch Superposition infinitesimaler Variationen erzeugt werden kann; wir gehen auf diesen Nachweis nicht näher ein.

Die so bestimmten Invarianten haben, wie wir an den ausgerechneten Beispielen sehen, die Eigenschaft, aus einem in den Coefficienten der Differentialgleichung und deren Ableitungen linearen und einem mit p_2 oder einer Ableitung von p_2 multiplicirten nicht linearen Theile zu bestehen. Herr Forsyth nennt sie aus einem sehr bald darzulegenden Grunde lineare Invarianten.

Für den linearen Theil einer Invariante vom Gewichte ν hat Herr Brioschi die folgende Formel aufgestellt

$$\sum_{i=0} A_{\nu i}\left[p^{(2i)}_{\nu-2i}(x) - \frac{(\nu-2i)(\nu-2i-1)}{2(2i+1)(\nu-i+1)}\, p^{(2i+1)}_{\nu-2i-1}(x)\right],$$

woselbst

$$A_{\nu 0} = 1, \quad A_{\nu, i+1} = \frac{(\nu-2i-2)(\nu-2i-1)^2(\nu-2i)}{4(i+1)(2i+1)(\nu-i-1)(2\nu-2i-3)}\, A_{\nu, i}$$

zu nehmen ist. Indem man der Invariante Θ_ν mit geeigneten numerischen Factoren multiplicirte Producte von der Form

$$\Theta_\varrho \Theta_{\nu-\varrho} \qquad (\varrho < \nu)$$

hinzufügt, kann man, wie Herr Forsyth gezeigt hat, auch für $\nu > 7$ bewirken, dass die nicht linearen Glieder der so entstehenden Invariante vom Gewichte ν entweder p_2 oder eine Ableitung von p_2 als Factoren enthalten. Die so normirten Invarianten sind dann eindeutig bestimmt (abgesehen von einem constanten Factor), wir wollen dieselben mit ϑ_ν bezeichnen. Zu bemerken ist noch, dass die linearen Theile der Invarianten, wie aus dem Brioschi'schen Ausdrucke ersichtlich ist, von n unabhängig sind.

Die $n-2$ linearen Invarianten $\vartheta_3, \vartheta_4, \cdots \vartheta_n$ können auf eine besonders einfache Form gebracht werden, wenn man noch in geeigneter Weise über die unabhängige Variable ξ der transformirten linearen Differentialgleichung verfügt. Bisher war nämlich nur durch die Forderung $q_1 = 0$ der Factor λ festgelegt (vergl. Gleichung (10) S. 189), während $\xi = \varphi(x)$ noch ganz willkürlich gewählt werden konnte. Fügen wir jetzt noch die Forderung

$$q_2 = 0$$

hinzu, so ergiebt die Gleichung (11) (S. 189)

$$2Z'(x) = Z^2 + \frac{12}{n+1} p_2;$$

setzen wir also

$$Z = \frac{\xi''(x)}{\xi'(x)} = -\frac{2\zeta'(x)}{\zeta(x)},$$

so genügt die so definirte Function ζ von x der linearen Differential gleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{3}{n+1} p_2 \zeta = 0, \tag{22}$$

und es ist

$$\lambda = \zeta^{n-1}, \quad \xi'(x) = \frac{1}{\zeta^2}. \tag{23}$$

Die aus (A) durch die Transformation

$$y = \zeta^{n-1} z, \quad \xi = \int^x \frac{dx}{\zeta^2}$$

hervorgehende Differentialgleichung (B) ist also so beschaffen, dass in derselben

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0$$

ist; die Reduction von (A) auf diese canonische Form erfolgt durch Integration der linearen Differentialgleichung (22) und Ausübung einer Quadratur.

Für $n = 2$ liefert dies die in der Nr. 181 (S. 185) ausgeführte Reduction auf die Form

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = 0.$$

Für diese canonische Form reduciren sich also die Invarianten $\vartheta_3, \vartheta_4, \cdots \vartheta_n$ auf ihre in den Coefficienten der Differentialgleichung und deren Ableitungen linearen Theile, da die nicht linearen Theile entweder mit q_2 oder einer Ableitung von q_2 multiplicirt sind; in diesem Falle sind jene Invarianten also wirklich linear, und dies ist der Grund für die von Herrn Forsyth gewählte Bezeichnung derselben als lineare Invarianten. Wir werden im Folgenden von dieser canonischen Form wenig Gebrauch machen, weil im Allgemeinen die Coefficienten derselben transcendente Functionen der unabhängigen Variabeln ξ sind, auch wenn die Coefficienten der ursprünglichen Differentialgleichung (A) rational oder algebraisch vorausgesetzt werden.

Wir hatten vorausgesetzt, dass in der Differentialgleichung (A) der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung von y gleich Null sei, und hatten ferner die Transformation, durch welche (A) in (B) übergeführt wird, so eingerichtet, dass auch in (B) die $(n-1)^{\text{te}}$ Ableitung von z nicht vorkommt. Es hat nun keine Schwierigkeit, sich von dieser Voraussetzung zu befreien und die Theorie der Aequivalenz zweier „vollstän-

diger" linearer Differentialgleichungen zu entwickeln. In der That, wenn die beiden vollständigen Differentialgleichungen

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0,$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^n z}{d\xi^n} + q_1 \frac{d^{n-1} z}{d\xi^{n-1}} + \cdots + q_n z = 0$$

durch eine Transformation von der Form

$$y = \lambda z, \quad \xi = \varphi(x)$$

in einander übergehen, so gehen die Differentialgleichungen

$$(\mathfrak{A}) \qquad \frac{d^n \mathfrak{y}}{dx^n} + \mathfrak{p}_2 \frac{d^{n-2} \mathfrak{y}}{dx^{n-2}} + \cdots + \mathfrak{p}_n \mathfrak{y} = 0,$$

$$(\mathfrak{B}) \qquad \frac{d^n \mathfrak{z}}{d\xi^n} + \mathfrak{q}_2 \frac{d^{n-2} \mathfrak{z}}{d\xi^{n-2}} + \cdots + \mathfrak{q}_n \mathfrak{z} = 0,$$

wo (vergl. Nr. 172, S. 146)

$$y = e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx} \mathfrak{y}, \quad z = e^{-\frac{1}{n}\int q_1 d\xi} \mathfrak{z}$$

gesetzt wurde, durch die Transformation

$$\mathfrak{y} = \lambda \cdot e^{\left(\frac{1}{n}\int p_1 dx - \frac{1}{n}\int q_1 d\xi\right)} \mathfrak{z}, \quad \xi = \varphi(x)$$

aus einander hervor, d. h. (A), (B) sind dann und nur dann einander aequivalent, wenn ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$) einander aequivalent sind.

Wir haben also, um die Bedingungen der Aequivalenz für die vollständigen Differentialgleichungen (A), (B) aufzustellen, nur die Ausdrücke der Invarianten $\vartheta_3, \vartheta_4, \cdots \vartheta_n$, gebildet aus den Coefficienten von ($\mathfrak{A}$) beziehungsweise ($\mathfrak{B}$), darzustellen durch die Coefficienten von (A) beziehungsweise (B), was mit Hülfe der Formeln der Nr. 172 (S. 147) leicht geschehen kann.

Sechstes Kapitel.

184. Quadrinvarianten. Absolute Invarianten. Differentialgleichung für eine aus den Integralen der gegebenen Gleichung gebildete Form.

Aus den $(n-2)$ linearen Invarianten $\vartheta_3, \vartheta_4, \cdots \vartheta_n$ kann man durch mannigfaltige Processe andere Invarianten herleiten. Besonders wichtig sind die von Herrn Forsyth sogenannten Quadrinvarianten vom Gewichte zwei, die sich auf folgende Weise ergeben.

Wenn wir die Gleichung

$$\xi'(x)^\nu \vartheta_\nu(\xi) = \vartheta_\nu(x)$$

logarithmisch differentiiren, so erhalten wir

$$\nu Z = \frac{d \log \vartheta_\nu(x)}{dx} - \frac{d \log \vartheta_\nu(\xi)}{d\xi}$$

und durch abermalige Differentiation

$$\nu Z'(x) = \frac{d^2 \log \vartheta_\nu(x)}{dx^2} - Z\xi'(x)\frac{d \log \vartheta_\nu(\xi)}{d\xi} - \xi'(x)^2 \frac{d^2 \log \vartheta_\nu(\xi)}{d\xi^2}.$$

Setzt man die sich hieraus ergebenden Werthe von Z^2, $Z'(x)$ in die Gleichung (11) (S. 189) ein, so kommt

$$\xi'(x)^2 \Phi_\nu(\xi) = \Phi_\nu(x),$$

wenn

$$\Phi_\nu(x) = 2\nu \frac{d^2 \log \vartheta_\nu(x)}{dx^2} - (2\nu+1)\left(\frac{d \log \vartheta_\nu(x)}{dx}\right)^2 - \frac{12\nu^2}{n+1} p_2$$

gesetzt wird. Diese Ausdrücke für $\nu = 3, 4, \cdots n$ sind jene Quadrinvarianten; sie reduciren sich für die canonische Form $(q_2 = 0)$ der Differentialgleichung (B) auf

$$\Phi_\nu(\xi) = \frac{1}{\vartheta_\nu^2(\xi)}\left\{2\nu\vartheta_\nu\vartheta_\nu''(\xi) - (2\nu+1)\vartheta_\nu'(\xi)^2\right\}.$$

Die Invariante Φ_ν wird offenbar dann und nur dann illusorisch, wenn die Invariante ϑ_ν identisch verschwindet.

Mit Hülfe dieser $2n-4$ Invarianten ϑ_ν, Φ_ν $(\nu=3,4,\cdots n)$ können wir nun sofort absolute Invarianten, d. h. solche Ausdrücke bilden,

die vollständig ungeändert bleiben, wenn wir in denselben die Coefficienten $p_2, p_3, \cdots p_n$ von (A) durch die Coefficienten der transformirten Differentialgleichung (B) ersetzen. Solche absolute Invarianten sind z. B.

$$\frac{\vartheta_\nu^{\mu}}{\vartheta_\mu^{\nu}}, \quad \frac{\vartheta_\nu^{2}}{\Phi_\nu^{\nu}};$$

durch logarithmische Differentiation derselben ergeben sich die (relativen) Invarianten vom Gewichte Eins:

(24) $$\begin{cases} \mu \dfrac{\vartheta_\nu'}{\vartheta_\nu} - \nu \dfrac{\vartheta_\mu'}{\vartheta_\mu} = \delta_{\nu\mu}, \\ 2 \dfrac{\vartheta_\nu'}{\vartheta_\nu} - \nu \dfrac{\Phi_\nu'}{\Phi_\nu} = \varepsilon_\nu. \end{cases}$$

Für die explicite Berechnung der linearen Invarianten hat Herr **Brioschi** noch ein zweites Verfahren angegeben, welches wir auch schon aus dem Grunde darlegen wollen, weil sich daran folgenreiche Erwägungen anknüpfen lassen.

Wir schicken die folgende einfache Bemerkung voraus.

Hat man eine homogene lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (A) mit irgendwie beschaffenen Coefficienten, für welche $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem darstellt, und bildet man aus den Elementen dieses Fundamentalsystems eine homogene ganze rationale Function m^{ten} Grades mit unbestimmten constanten Coefficienten

$$\Phi = \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_m)} c_{i_1 i_2 \cdots i_m} y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_m},$$

so enthält dieselbe soviel Terme, als man Combinationen der Zahlen $1, 2, \cdots n$ zu je m mit unbeschränkter Wiederholung bilden kann, d. h.

$$\mathsf{N} = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}{1\cdot 2 \cdots m};$$

wir bezeichnen diese Terme in irgend einer Reihenfolge mit

$$y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_m} = Y_i \qquad (i = 1, 2, \cdots \mathsf{N}).$$

Wenn dann die $y_1, y_2, \cdots y_n$ eine lineare Substitution erfahren,

$$\bar{y}_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{i\varkappa} y_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

und wir bilden aus den $\bar{y}_i$ $(i = 1, 2, \cdots n)$ die entsprechenden Ausdrücke

$$\bar{y}_{i_1} \bar{y}_{i_2} \cdots \bar{y}_{i_m} = \bar{Y}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots \mathsf{N}),$$

so sind die $\bar{Y}_i$ als homogene lineare Functionen der Y_i mit constanten Coefficienten darstellbar. Bilden wir also die Differentialgleichung N^{ter} Ordnung für Y

(25) $$D(Y, Y_1, Y_2, \cdots Y_N) = 0,$$

so sind die Coefficienten der Ableitungen von Y, als Functionen der $y_1, y_2, \cdots y_n$ und ihrer Ableitungen aufgefasst, invariante Functionen im Sinne der Nr. 15 (Bd. I, S. 40) für die Differentialgleichung (A); dieselben lassen sich demnach auf Grund des Appell'schen Satzes (a. a. O.) darstellen als ganze rationale Functionen der Coefficienten von (A) und deren Ableitungen multiplicirt mit einer bestimmten Potenz von

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n).$$

Wenn wir die Gleichung (25) durch diese Potenz von $D(y_1, y_2, \cdots y_n)$ dividiren, so hat dieselbe Coefficienten, die in den Coefficienten von (A) und deren Ableitungen ganz und rational sind. D. h.:

Die Form m^{ten} Grades Φ, gebildet aus den Elementen eines Fundamentalsystems der homogenen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (A), stellt das allgemeine Integral einer ebenfalls homogenen linearen Differentialgleichung dar, deren Coefficienten sich aus denen von (A) und deren Ableitungen ganz und rational zusammensetzen und deren Ordnung höchstens gleich

$$N = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}{1\cdot 2\cdots m}$$

ist. Die Ordnungszahl N wird wirklich erreicht, wenn zwischen den $y_1, y_2, \cdots y_n$ keine homogene ganze algebraische Beziehung mit constanten Coefficienten vom m^{ten} Grade besteht.

Wenn die Coefficienten von (A) rationale Functionen von x sind, so gilt das Gleiche für die Coefficienten von (25). Wenn in (A) der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung die logarithmische Ableitung einer rationalen Function (der Coefficient von $y^{(n)}$ gleich Eins genommen), d. h. wenn die Determinante $D(y_1, y_2, \cdots y_n)$ rational ist, so ist auch

$$D(Y_1, Y_2, \cdots Y_N)$$

nach dem Appell'schen Satze rational, d. h. auch in der Differentialgleichung (25) ist nach Division durch den Coefficienten von

$$\frac{d^N Y}{dx^N}$$

der Coefficient der $(N-1)^{\text{ten}}$ Ableitung die logarithmische Ableitung einer rationalen Function. Man kann die Differentialgleichung (25) aus (A) in einfacher Weise herleiten, indem man setzt

$$Y = y^m.$$

185. Differentialgleichung, der eine Form $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades der Integrale einer Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt. Neue Gestalt der Invarianten. Differentialgleichungen mit verschwindenden Invarianten.

Sei nun ζ_1, ζ_2 ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (22) (S. 198) und setzen wir

$$u = c_1\zeta_1^{n-1} + c_2\zeta_1^{n-2}\zeta_2 + \cdots + c_{n-1}\zeta_2^{n-1},$$

so genügt u einer linearen Differentialgleichung von der Ordnung

$$\frac{2\cdot 3\cdots n}{(n-1)!} = n,$$

die aus (22) durch die Substitution

$$u = \zeta^{n-1}$$

hervorgeht und die Gestalt hat

$$u^{(n)} + n_2 r_2 u^{(n-2)} + \cdots + r_n u = 0. \tag{26}$$

Man findet durch einfache Rechnung

$$(27)\quad \begin{cases} r_2 = p_2, \quad r_3 = \frac{3}{2} p_2'(x), \quad r_4 = \frac{9}{5} p_2''(x) + \frac{3(5n+7)}{5(n+1)} p_2^2, \\ r_5 = 2p_2^{(3)}(x) + \frac{3(5n+7)}{n+1} p_2 p_2'(x), \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Bedeute nun

$$(C)\quad \frac{d^n v}{dt^n} + n_2 s_2 \frac{d^{n-2} v}{dt^{n-2}} + \cdots + s_n v = 0$$

eine Differentialgleichung, die aus (B) durch die Transformation

$$v = \varrho z, \quad \xi = \psi(t)$$

hervorgeht, dann ist also

$$y = \frac{\lambda}{\varrho} v, \quad \varphi(x) = \psi(t)$$

die Transformation, welche (A) in (C) überführt. Setzen wir

$$\frac{\xi''(t)}{\xi'(t)} = -2\frac{\eta'(t)}{\eta},$$

so ist wegen $q_2 = 0$ (vergl. die Gleichungen (22), (23) auf S. 198)

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{3}{n+1} s_2 \eta = 0, \quad \varrho = \eta^{n-1},$$

und der Ausdruck

$$w = \eta^{n-1}$$

genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^n w}{dt^n} + n_2 \mathfrak{r}_2 \frac{d^{n-2} w}{dt^{n-2}} + \cdots + \mathfrak{r}_n w = 0, \tag{28}$$

wo die $\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \cdots \mathfrak{r}_n$ aus s_2 ebenso gebildet sind, wie die $r_2, r_3, \cdots r_n$ aus p_2.

Andererseits ist aber

$$u = \frac{\lambda}{\varrho} w,$$

d. h. die Differentialgleichung (28) geht aus (27) durch dieselbe Transformation hervor, wie (C) aus (A); die Gleichungen, durch welche die Grössen

$$s_\varkappa t'(x)^\varkappa \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n)$$

als Functionen der $p_2, p_3, \cdots p_n$ dargestellt werden, bleiben demnach bestehen, wenn man in denselben an die Stelle von $s_\varkappa$ setzt $\mathfrak{r}_\varkappa$ und an die Stelle der $p_2, p_3, \cdots p_n$ die $r_2, r_3, \cdots r_n$. Bilden wir also die Differenzen

$$l_\varkappa = p_\varkappa - r_\varkappa, \quad m_\varkappa = s_\varkappa - \mathfrak{r}_\varkappa,$$

so bestehen die Beziehungen

$$m_3 t'(x)^3 = l_3,$$
$$m_4 t'(x)^4 = l_4 - 6 l_3 t''(x)$$
u. s. w.,

woraus sich sofort Invarianten vom Gewichte 3, 4, $\cdots$ ergeben, die mit den linearen Invarianten $\vartheta_3, \vartheta_4 \cdots$ übereinstimmen müssen. Man hat also

$$\begin{cases} \vartheta_3(x) = l_3, \quad \vartheta_4(x) = l_4 - 2 l_3'(x), \\ \vartheta_5(x) = l_5 - \frac{5}{2} l_4'(x) + \frac{15}{7} l_3''(x) - \frac{10}{7} \frac{7n+13}{n+1} p_2 l_3, \end{cases} \tag{29}$$
u. s. w.

Aus dieser Form der Invarianten ϑ_ν können wir einen wichtigen Schluss ziehen. Nehmen wir nämlich an, die Differentialgleichung (A) sei so beschaffen, dass ihre sämmtlichen $(n-2)$ linearen Invarianten $\vartheta_3, \vartheta_4, \cdots \vartheta_n$ identisch verschwinden, dann folgt aus den Formeln (29), dass

$$l_3 = 0, \quad l_4 = 0, \quad l_5 = 0, \cdots,$$

d. h. dass

$$p_3 = r_3, \quad p_4 = r_4, \quad p_5 = r_5, \cdots$$

ist. In diesem Falle stimmt also die Differentialgleichung (A) mit (26) überein, und wir haben den von Herrn Brioschi herrührenden Satz:

Wenn die sämmtlichen linearen Invarianten einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (A) verschwinden, so ist

das allgemeine Integral von (A) eine binäre Form $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades mit constanten Coefficienten aus den Elementen ζ_1, ζ_2 eines Fundamentalsystems der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung (22).

Die einfachste Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, für welche sämmtliche lineare Invarianten $\vartheta_3, \vartheta_4, \cdots \vartheta_n$ verschwinden, ist offenbar

(30) $$\frac{d^n z}{d\xi^n} = 0.$$

Auf Grund des allgemeinen Princips, wonach die Uebereinstimmung der Invarianten (abgesehen von einer Potenz eines bestimmten Factors) für zwei Differentialgleichungen nothwendig und hinreichend dafür ist, dass sich diese Differentialgleichungen durch eine Transformation von der Form

(31) $$y = \lambda z, \quad \xi = \varphi(x)$$

in einander überführen lassen, schliessen wir, dass sich jede Differentialgleichung (A), deren sämmtliche lineare Invarianten identisch verschwinden, durch die Transformation (31) auf die Form (30) reduciren lassen muss. Wir können dies aber auch mit wenigen Worten direct beweisen.

Sei nämlich (31) die Transformation, durch welche (A) in die canonische Form (B) mit $q_2 = 0$ übergeführt wird, so folgt aus

$$\vartheta_3(x) = \xi'(x)^3 \vartheta_3(\xi) = 0,$$

dass auch $q_3 = 0$, dann weiter aus

$$\vartheta_4(x) = \xi'(x)^4 \vartheta_4(\xi) = 0,$$

dass auch $q_4 = 0$ u. s. w., endlich, dass auch $q_n = 0$ sein muss. Wir haben also den Satz:

Eine Differentialgleichung (A), deren sämmtliche Invarianten verschwinden, lässt sich durch die Transformation

$$y = \zeta^{n-1} z, \quad \xi = \int^x \frac{dx}{\zeta^2},$$

wo ζ durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung (22)

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{3}{n+1} p_2 \zeta = 0$$

definirt wird, auf die Form

$$\frac{d^n z}{d\xi^n} = 0$$

reduciren.

Diese Art von Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung stellt also gleichsam die directe Verallgemeinerung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung dar; der vorhin bewiesene Satz, dass das allgemeine Integral einer solchen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung als binäre Form $(n-1)^{ten}$ Grades, gebildet aus den Elementen eines Fundamentalsystems von (22), darstellbar ist, lässt diese Verallgemeinerung ebenfalls hervortreten.

Die Differentialgleichung (30) besitzt das Fundamentalsystem

$$1,\ \xi,\ \xi^2,\ \cdots\ \xi^{n-1};$$

setzen wir also

$$z_\varkappa = \xi^{\varkappa-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n), \tag{32}$$

so befriedigen die Elemente eines Fundamentalsystems von (30) die $(n-2)$ homogenen Relationen zweiten Grades

$$z_\varkappa^{\ 2} = z_{\varkappa-1}\, z_{\varkappa+1} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n-1). \tag{D}$$

Diese Relationen sind von einander unabhängig, sie definiren also, wenn wir die $z_1, z_2, \cdots z_n$ als homogene Coordinaten eines Punktes im $(n-1)$-fach ausgedehnten Raume R_{n-1} deuten, eine Curve, und zwar eine irreductible Curve. Diese Curve muss die durch die Gleichungen (32) definirte Integralcurve der Differentialgleichung (30) enthalten, sie ist also mit derselben identisch.

Die Differentialgleichung (A) mit verschwindenden Invarianten besitzt, da sie mit (30) durch die Transformationen (31) verknüpft ist, falls wir das Fundamentalsystem

$$y_\varkappa = \lambda z_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

zu Grunde legen, dieselbe Integralcurve $\mathfrak{C}$ wie (31), also bestehen die Relationen (D) auch zwischen den $y_1, y_2, \cdots y_n$. D. h.:

Die Elemente eines Fundamentalsystems einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit verschwindenden Invarianten befriedigen die homogenen quadratischen Relationen (D).

Dieser Satz lässt eine Umkehrung zu. Wenn wir dieselbe beweisen wollen, so werden wir veranlasst, uns überhaupt genauer mit solchen linearen Differentialgleichungen zu beschäftigen, zwischen deren Integralen homogene Relationen bestehen.

186. Homogene Relationen zwischen den Integralen. Algebraische Integrale. Specielle Relationen zweiten Grades.

Wir hatten schon im neunten Abschnitte (Nr. 157, S. 95) die Bedeutung der algebraischen Relationen, die durch die Elemente eines Fundamentalsystems einer gegebenen Differentialgleichung befriedigt werden, für das Problem der Integration hervorgehoben und hatten auch schon auf den nahen Zusammenhang hingewiesen, der zwischen Differentialgleichungen, deren Lösungen solche Relationen erfüllen, und Differentialgleichungen, deren Lösungen algebraische Functionen sind, besteht. Wenn wir jetzt speciell nach homogenen Relationen zwischen den Elementen $y_1, y_2, \cdots y_n$ eines Fundamentalsystems fragen, so entspricht dies der Auffassung der $y_1, y_2, \cdots y_n$ als homogener Coordinaten eines Punktes im R_{n-1}, oder der damit unmittelbar zusammenhängenden, wonach an Stelle der Integrale selbst ein System von Integralquotienten $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ zum Gegenstande der Untersuchung gemacht wird.

Irgend eine homogene Relation zwischen den Integralen $y_1, y_2, \cdots y_n$ einer Differentialgleichung (A) wird auch befriedigt durch die entsprechenden Integrale der aus (A) durch die Transformation

$$y = \lambda z$$

hervorgehenden Differentialgleichung. Gehen wir, um uns ganz dem in den letzten Kapiteln innegehaltenen Gedankengange anzupassen, noch einen Schritt weiter, indem wir uns auf die Betrachtung homogener Relationen mit constanten Coefficienten beschränken, so bleiben solche Relationen auch bestehen, wenn wir nicht allein eine neue abhängige Variable durch die Gleichung

$$y = \lambda z,$$

sondern auch noch eine neue unabhängige Variable

$$\xi = \varphi(x)$$

einführen, d. h. wenn wir von (A) zur Differentialgleichung (B) übergehen.

Wir schliessen daraus, dass ein enger Zusammenhang bestehen muss zwischen solchen homogenen Relationen mit constanten Coefficienten und den Invarianten einer Differentialgleichung, eine Vermuthung, die sich ja in dem Falle der Relationen (D) durch den am Schlusse der vorigen Nummer (S. 206) ausgesprochenen Satz bestätigt. Dass es aber lineare Differentialgleichungen jeder Ordnung giebt, zwischen deren Integralen homogene Beziehungen mit constanten Coefficienten

bestehen und für welche nicht sämmtliche Invarianten versch
können wir durch eine einfache Ueberlegung sofort einsehen.

Bedeuten $y_1, y_2, \cdots y_n$ irgendwelche algebraische Functionen zwischen denen keine homogene lineare Beziehung mit co Coefficienten besteht, so bilden dieselben offenbar ein Funda system der linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnu

$$(1) \qquad D(y, y_1, y_2, \cdots y_n) = 0,$$

deren Coefficienten ebenfalls algebraische Functionen sind. Di

$$y_\varkappa = y_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

ist dann eine algebraische Curve des R_{n-1}, sie muss sich folglic eine gewisse Anzahl von unabhängigen homogenen Gleichungen z den $y_1, y_2, \cdots y_n$

$$(2) \qquad f_i(y_1, y_2, \cdots y_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

definiren lassen, wo die f_i ganze rationale homogene Functio constanten Coefficienten ihrer Argumente bedeuten. Die Anzah Gleichungen ist jedenfalls nicht kleiner wie $n - 2$. Nach eine von Kronecker (Grundzüge einer arithmetischen Theorie de braischen Grössen, Festschrift etc., Berlin 1882, S. 30) reic Allgemeinen stets n solcher Gleichungen zur Definition ein braischen Curve des R_{n-1} aus, für $n = 3$, d. h. für eine eben genügt stets eine Gleichung.

Die algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen n^{ter} (bieten also ein Beispiel von Differentialgleichungen dar, z deren Integralen ein System von homogenen Relationen mit co Coefficienten besteht, welches im $(n-1)$-fach ausgedehnten R_{n-1} ein Gebilde $(n-2)^{\text{ter}}$ Stufe, d. h. eine Curve darstellt.

Dabei wurde stillschweigend $n > 2$ vorausgesetzt, da für offenbar keine homogene Beziehung mit von x unabhä Coefficienten zwischen den Elementen eines Fundamenta bestehen kann. Diese Voraussetzung ist dann auch im Fo festzuhalten.

Gehen wir von der Differentialgleichung (1) durch die formation

$$(3) \qquad y = \lambda z, \quad \xi = \varphi(x)$$

zu einer Differentialgleichung

$$(4) \qquad \frac{d^n z}{d\xi^n} + n q_1 \frac{d^{n-1} z}{d z^{n-1}} + \cdots + q_n z = 0$$

über, so bestehen zwischen den Elementen des Fundamentalsy

$$z_\varkappa = \frac{1}{\lambda} y_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

dieselben Relationen (2), d. h. es ist auch

(5) $$f_i(z_1, z_2, \cdots z_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots).$$

Wenn insbesondere $\varphi(x)$ als algebraische Function und λ als eine Function gewählt wird, deren logarithmische Ableitung algebraisch von x abhängt, so sind (vergl. Nr. 172, S. 145, Gleichungen (2), (4)) auch die Coefficienten von (4) algebraische Functionen von ξ. Falls auch λ selbst eine algebraische Function von x beziehungsweise ξ ist, so ist die Differentialgleichung (4) algebraisch integrirbar; wenn λ keine algebraische Function ist, so sind nur die Integralquotienten

$$\frac{z_{\varkappa+1}}{z_1} = \frac{y_{\varkappa+1}}{y_1} = \eta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n-1)$$

algebraische Functionen von x.

Sei nun $t_1, t_2, \cdots t_n$ irgend ein System von Functionen einer Variabeln τ, welches die Relationen

(6) $$g_i(t_1, t_2, \cdots t_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

befriedigt, wo die g_i ganze rationale homogene Functionen ihrer Argumente bedeuten, und mögen die Gleichungen (6), wenn wir die $t_1, t_2, \cdots t_n$ als homogene Coordinaten eines Punktes der $(n-1)$-fachen ebenen Mannigfaltigkeit R_{n-1} auffassen, ein Gebilde $(n-2)^{\text{ter}}$ Stufe im R_{n-1} definiren, und zwar möge dieses Gebilde eine „möglichst gekrümmte" Curve sein (vergl. Nr. 169, S. 133), so dass also zwischen den $t_1, t_2, \cdots t_n$ keine homogene lineare Relation mit von τ unabhängigen Coefficienten bestehen kann. Dann lassen sich aus den Gleichungen (6) die Quotienten

$$\frac{t_{\varkappa+1}}{t_1} = \zeta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n-1)$$

als algebraische Functionen etwa von ζ_1 berechnen,

$$\zeta_\varkappa = A_\varkappa(\zeta_1) \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n-1).$$

Bedeutet $y_1, y_2, \cdots y_n$ irgend ein Functionssystem von x, welches dieselben Relationen

(7) $$g_i(y_1, y_2, \cdots y_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

befriedigt, so ist auch

$$\eta_\varkappa = \frac{y_{\varkappa+1}}{y_1} = A_\varkappa(\eta_1) \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n-1),$$

wo η_1 gleich $\frac{y_2}{y_1}$ gesetzt wurde.

Statuiren wir nun zwischen τ und x eine Beziehung, indem wir setzen

$$\eta_1(x) = \zeta_1(\tau), \tag{8}$$

woraus sich etwa

$$\tau = \psi(x)$$

ergeben möge, und bezeichnen den Quotienten

$$\frac{y_1(x)}{t_1(x)}$$

als Function von x aufgefasst durch $\mu(x)$, so ist demnach

$$\zeta_\varkappa(\psi(x)) = \eta_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n-1), \tag{9}$$

$$\mu(x) t_\varkappa(\psi(x)) = y_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n), \tag{10}$$

die $y_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots n)$ sind also auch linear unabhängig von einander, und die lineare Differentialgleichung

$$[D(y_1, y_2, \cdots y_n)]^{-1} D(y, y_1, y_2, \cdots y_n) = 0, \tag{11}$$

für welche $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem constituiren, geht aus der Differentialgleichung

$$[D(t_1, t_2, \cdots t_n)]^{-1} D(t, t_1, t_2, \cdots t_n) = 0 \tag{12}$$

mit dem Fundamentalsysteme $t_1, t_2, \cdots t_n$ durch die Transformation

$$y = \mu(x) t, \quad \tau = \psi(x) \tag{13}$$

hervor. Also unterscheiden sich die Invarianten ϑ_ν für die beiden Differentialgleichungen (11), (13) nur durch die ν^{te} Potenz von $\psi'(x)$ als Factor ($\nu = 3, 4, \cdots n$). Wir haben also den Satz:

Zwei lineare homogene Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung, die bei geeigneter Wahl der Fundamentalsysteme dieselbe algebraische Integralcurve besitzen, sind im Sinne der Nr. 181 (S. 187, 188) einander aequivalent.

Daraus ergiebt sich sofort die Umkehrung des in der Nr. 185 (S. 206) bewiesenen Satzes, d. h. wir können sagen:

Wenn die Elemente eines Fundamentalsystems einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung den $n-2$ Relationen (D) (S. 206) Genüge leisten, so verschwinden die sämmtlichen Invarianten ϑ_ν $(\nu = 3, 4, \cdots n)$ dieser Differentialgleichung, und ihr allgemeines Integral ist folglich als binäre Form $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades der Elemente eines Fundamentalsystems einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellbar.

187. Satz über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten und algebraischer Integralcurve. Monodromiegruppe im Falle algebraischer Coefficienten.

Wir können aber aus dem in der vorigen Nummer bewiesenen Satze noch eine andere interessante Folgerung ziehen.

Sei nämlich eine lineare Differentialgleichung

$$(A) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0$$

vorgelegt, deren Coefficienten algebraische Functionen sind, und von der bekannt sein möge, dass die Elemente $y_1, y_2, \cdots y_n$ eines Fundamentalsystems die Relationen (7) erfüllen.

Man kann dann offenbar einen Parameter τ so einführen, dass die Quotienten

$$\frac{y_{\varkappa+1}}{y_1} = \eta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

dadurch, dass man sie gewissen algebraischen Functionen von τ

$$\eta_\varkappa = B_\varkappa(\tau) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n-1)$$

gleich setzt, die Gleichungen

$$g_i(1, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

identisch befriedigen. Nimmt man dann noch irgend eine algebraische Function von τ

$$t_1 = B(\tau)$$

hinzu und setzt

$$t_{\varkappa+1} = t_1 \eta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n-1),$$

so constituiren die $t_1, t_2, \cdots t_n$ ein Fundamentalsystem einer algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (12), deren Coefficienten algebraische Functionen von τ sind, und deren Integralcurve durch die Gleichungen (6) dargestellt wird. Diese Differentialgleichung ist also mit (A) aequivalent, d. h. wir haben

$$y = \mu \cdot t, \quad \tau = \psi(x).$$

Die Function μ bestimmt sich dabei in folgender Weise. Setzt man

$$-\frac{d \log D(t_1, t_2, \cdots t_n)}{d\tau} = s_1(\tau),$$

so ist $s_1(\tau)$ der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung von t in der Differentialgleichung (12). Die beiden Grössen

$$y e^{\frac{1}{n}\int p_1 dx}, \quad t e^{\frac{1}{n}\int s_1 d\tau}$$

sind dann zufolge der Gleichung (10), Nr. 181 (S. 189), d
Beziehung

$$y\, e^{\frac{1}{n}\int p_1 dx} = e^{-\frac{n-1}{2}\int \frac{\tau''(x)}{\tau'(x)} dx}\, e^{\frac{1}{n}\int s_1 d\tau}\, t$$

mit einander verknüpft, so dass also

$$\mu = [\psi'(x)]^{-\frac{n-1}{2}}\, e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}\, e^{\frac{1}{n}\int s_1 d\tau}$$

oder

$$\mu = [\psi'(x)]^{-\frac{n-1}{2}}\, e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}\, [D(t_1, t_2, \cdots t_n)]^{-\frac{1}{n}}$$

gefunden wird.

Betrachten wir nunmehr eine der absoluten Invarianten
S. 201)

$$(14) \qquad \frac{\vartheta_\nu^m}{\vartheta_m^\nu}, \quad \frac{\vartheta_\nu^2}{\Phi_\nu^\nu} \qquad (\nu, m = 3, 4, \cdots n;\ \nu \neq m).$$

Da die Coefficienten von (A) zufolge der Voraussetzung el
die von (12) algebraische Functionen sind, so ist jede dieser
Invarianten sowohl in x als auch in τ algebraisch.

Wenn also für die Differentialgleichung (A) ni
diese Invarianten sich auf Constanten reduciren o
sorisch werden, so besteht zwischen x und τ eine alge
Beziehung, d. h. $\psi(x)$ ist eine algebraische Function

In diesem Falle ist also in dem Ausdrucke für μ nur

$$(15) \qquad e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}$$

nicht nothwendig algebraisch, d. h. die Integrale von (A) u
sich nur durch den allen gemeinsamen Factor (15) von a
Functionen, und wir haben den Satz:

Wenn die Integralcurve einer linearen Diffe
chung (A) mit algebraischen Coefficienten, für w
alle absoluten Invarianten (14) sich auf Constant
oder illusorisch werden, eine algebraische Curve is
Integralquotienten algebraische Functionen der u
Variabeln, und die Integrale selbst können si
braischen Functionen nur durch einen allen
Factor unterscheiden, dessen logarithmische Ab
eine algebraische Function ist. Wenn also
Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung in (A) die l
Ableitung einer algebraischen Function ist, sc
rentialgleichung (A) algebraisch integrirbar.

Sollen sich für (A) alle Invarianten (14) auf Constanten reduciren, so müssen die logarithmischen Ableitungen dieser Invarianten, d. h. die Invarianten vom Gewichte Eins (Nr. 184, S. 201, Gleichung 24),

(16) $$\delta_{\nu, m}, \quad \varepsilon_\nu \qquad (\nu, m = 3, 4, \cdots n;\ \nu \neq m)$$

identisch verschwinden. Dies tritt z. B. stets ein, wenn alle Invarianten $\vartheta_3, \vartheta_4, \cdots \vartheta_\nu$ gleich Null sind, wir haben dann den bereits erledigten Fall der Relationen (D).

Es giebt aber im Allgemeinen auch noch andere Fälle, wo die Invarianten (16) verschwinden oder ihren Sinn verlieren. Um die Natur dieser Fälle zu ergründen, wollen wir die Monodromiegruppe der Differentialgleichung (A) einer näheren Betrachtung unterziehen.

Wir hatten die Coefficienten von (A) als algebraische Functionen von x vorausgesetzt. Hat man eine endliche Anzahl algebraischer Functionen von x, so kann man nach einem bekannten Satze von Abel stets eine algebraische Function von x finden, durch welche sich die gegebenen algebraischen Functionen rational mit in x rationalen Coefficienten darstellen lassen. Wir dürfen also, ohne dadurch die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, voraussetzen, dass die Coefficienten der vorgelegten Differentialgleichung (A) rationale Functionen der beiden durch eine irreductible algebraische Gleichung

(I) $$F(x, s) = 0$$

verknüpften Variabeln x und s sind. Dem entsprechend wollen wir also (vergl. Nr. 61, Bd. I, S. 217) die Coefficienten $p_\varkappa$ von (A) durch $p_\varkappa(x, s)$ bezeichnen.

Denken wir uns über der x-Ebene die mehrblättrige Riemann'sche Fläche F ausgebreitet, welche die Verzweigung der durch die Gleichung (I) definirten algebraischen Function darstellt, und sei ϱ die von Riemann mit p bezeichnete Zahl in Bezug auf diese Gleichung, also nach der Bezeichnung von Herrn Weierstrass der Rang des algebraischen Gebildes (x, s), nach Clebsch die Geschlechtszahl der durch die Gleichung (I) dargestellten algebraischen ebenen Curve. Dann ist bekanntlich die Riemann'sche Fläche F eine $(2\varrho + 1)$-fach zusammenhängende; wir denken uns dieselbe nach dem Vorgange von Riemann durch 2ϱ Querschnitte

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots a_\varrho, b_\varrho$$

in eine einfach zusammenhängende $\overline{F}$ zerschnitten, indem wir z. B. das System dieser Querschnitte von einem Punkte (x_0, s_0) der Fläche F ausgehen lassen, so dass beim Durchlaufen des ganzen Systems erst das eine Ufer des Querschnittes $a_\varkappa$, dann das eine Ufer des Querschnittes $b_\varkappa$,

hierauf das andere Ufer von $a_\varkappa$, dann das andere Ufer von $b_\varkappa$ de Reihe nach für $\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho$ passirt wird (vergl. Fig. 1, wo der Fa $\varrho = 4$ schematisch dargestellt ist). Den so gelegten Querschnitte entspricht dann ei System von Norma perioden der zu de algebraischen Gebilc (I) gehörigen Integra erster Gattung.

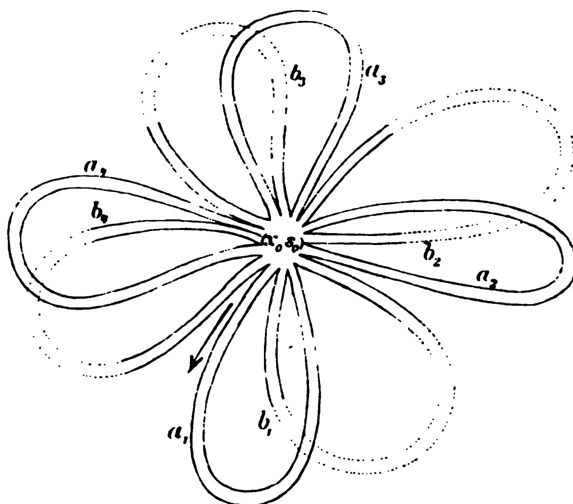


Fig. 1.

Fixiren wir ferner der einfach zusamme hängenden Fläche $\overline{F}$ di jenigen (endlichen u unendlich fernen) Stell (α_1, β_1), (α_2, β_2), $\cdots$ $(\alpha_\sigma, \beta_\sigma)$ an denen die Coefficie ten $p_\varkappa(x, s)$ der Diff rentialgleichung (A) u endlich werden, und schliessen diese Stellen durch kleine geschlossen Curven aus (eine geschlossene Curve ist dabei so zu ziehen, dass, wen der Punkt $(\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa)$, den sie umgiebt, ein Windungspunkt von $\overline{F}$ is die betreffende Curve zu ihrem Ausgangspunkte im selben Blatte vo F zurückkehrt), so ist die auf diese Weise entstehende Fläche T ein $(\sigma + 1)$-fach zusammenhängende. Diese denken wir uns nun wiede durch die σ Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$, welche Punkte der Ausschliessungs curven mit Punkten des Querschnittssystems (a, b) verbinden und wede sich selbst, noch einander, noch die Querschnitte (a, b) durchkreuzen in eine einfach zusammenhängende Fläche T' zerschnitten.

Betrachten wir eine Stelle dieser Fläche T', so sind die Coefficienten $p_\varkappa(x, s)$ der Differentialgleichung in der Umgebung derselben nac positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen des Increments entwickelba je nachdem die betreffende Stelle eine reguläre Stelle oder ein Win dungspunkt der algebraischen Function s von x ist. Die Integrale vo (A) sind dann in der Umgebung jener Stelle in derselben Weise ent wickelbar, wie die $p_\varkappa(x, s)$ (vergl. Nr. 60, Bd. I, S. 215); wenn wir als ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ von (A) durch seine Anfang werthe in der Umgebung irgend einer Stelle von T' definiren, so i dasselbe innerhalb T' eindeutig festgelegt.

Wenn die unabhängige Variable x geschlossene Wege innerhal

der Riemann'schen Fläche beschreibt, die gewisse der Querschnitte a, b, l überschreiten, so erfährt das Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ lineare homogene Substitutionen, und diese constituiren die Monodromiegruppe h von (A). Eine Basis dieser Monodromiegruppe (vergl. Nr. 132, S. 6) erhalten wir, wenn wir die linearen Substitutionen der $y_1, y_2, \cdots y_n$ betrachten, welche geschlossenen Wegen von x entsprechen, die die Querschnitte a, b, l einzeln in einer bestimmten Richtung überschreiten; diese Basis besteht also im Allgemeinen aus $2\varrho + \sigma$ Substitutionen.

188. Fall einer rationalen und einer elliptischen Integralcurve. Die Monodromiegruppe ist endlich.

Die Integralcurve $\mathfrak{C}$ der Differentialgleichung (A) ist, wenn die $y_1, y_2, \cdots y_n$ die Relationen (7) (Nr. 186, S. 209) erfüllen, eine algebraische Curve des R_{n-1}, dieselbe muss durch die Collineationen des R_{n-1}, welche den Substitutionen der Gruppe h entsprechen, in sich selbst übergehen. Im Allgemeinen kann eine algebraische Curve des R_{n-1} nur durch eine endliche Anzahl von Collineationen in sich selbst transformirt werden, man hat nämlich den folgenden Satz:

Wenn eine algebraische Curve des R_{n-1} durch unendlich viele eindeutig umkehrbare rationale Transformationen in sich selbst übergeführt wird, so sind ihre Coordinaten entweder als rationale oder als eindeutige doppeltperiodische Functionen eines Parameters darstellbar.

Man sagt bekanntlich von einer Curve, deren Coordinaten sich als rationale Functionen eines Parameters darstellen lassen, sie sei vom Geschlechte Null oder eine rationale Curve, von einer Curve deren Coordinaten sich als eindeutige doppeltperiodische Functionen eines Parameters, also als rationale Functionen zweier durch eine algebraische Gleichung vom Range Eins verknüpften Variabeln darstellen lassen, sie sei vom Geschlechte Eins oder eine elliptische Curve. Der erwähnte Satz lässt sich also auch in der Form aussprechen: Nur eine rationale oder eine elliptische Curve des R_{n-1} kann unendlich viele eindeutig umkehrbare rationale Transformationen in sich selbst gestatten.

Was den Beweis dieses Satzes anlangt, so bemerken wir, dass sich derselbe sehr leicht auf den Beweis desselben Satzes für den Fall ebener algebraischer Curven ($n = 3$) zurückführen lässt. Für diesen Fall muss man zeigen, dass eine ebene Curve, die keine rationale und keine elliptische ist, nicht nur keine continuirliche Schaar, sondern auch keine unendliche Anzahl discreter eindeutig umkehrbarer ratio-

naler Transformationen in sich selbst gestatten kann; wir verweis in Bezug hierauf auf die Arbeiten von Herrn Poincaré (Acta Math matica Bd. VII, S. 16) und von Herrn Weierstrass (Gesammel Werke Bd. II, S. 235).

Seien $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ die (nicht homogenen) Coordinaten ein Punktes einer rationalen Curve, so lässt sich ein Parameter t finden, dass

$$\eta_\varkappa = \varphi_\varkappa(t) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n-1)$$

ist, wo die $\varphi_\varkappa$ rationale Functionen bedeuten und t selbst als ration Function der durch die Gleichungen der Curve verknüpften Grös $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ darstellbar ist. Die eindeutig umkehrbaren rational Transformationen, die diese Curve in sich selbst überführen, entsprech dann den projectiven Transformationen

$$\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

von t, es giebt also dann stets eine von drei continuirlich veränd lichen Parametern abhängige Schaar, oder wie man kurz sagt, es gi stets ∞^3 solcher Transformationen. Unter diesen kann es unendl viele Collineationen geben, es kann sogar vorkommen, dass alle Transformationen Collineationen sind. Dies ist der Fall für die v Herrn Klein sogenannte rationale Normalcurve des R_{n-1}, sich für homogene Coordinaten $y_1, y_2, \cdots y_n$ in der Form

$$y_\varkappa = a_{\varkappa 1}\zeta_1^{n-1} + a_{\varkappa 2}\zeta_1^{n-2}\zeta_2 + \cdots + a_{\varkappa n}\zeta_2^{n-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

darstellen lässt, wo die $a_{\varkappa i}$ Constanten bedeuten. Dies entspricht al in unserer Theorie dem Falle, wo alle Invarianten $\vartheta_3, \vartheta_4, \cdots \vartheta_n$ d Differentialgleichung (A) identisch verschwinden, d. h. dem Falle d Relationen (D); wir sehen also den Satz der Nr. 185 (S. 204, 20 hier in einem neuen Lichte.

Eine elliptische Curve lässt sich in der Form

$$\eta_\varkappa = \varphi_\varkappa(t) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n-1)$$

darstellen, wo die $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{n-1}$ doppeltperiodische Functionen m denselben Perioden ω_1, ω_2 sind. Den eindeutig umkehrbaren rational Transformationen dieser Curve in sich selbst können im Allgemeine d. h. mit Ausschluss gewisser specieller Werthe des Periodenquotient $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, nur die Transformationen von t in

$$+ t + \alpha$$

entsprechen, d. h. wir haben in diesem Falle eine von einem continui lich veränderlichen Parameter abhängige Schaar oder kurz ∞^1 solch

Transformationen. Aus der Theorie der elliptischen Functionen schliesst man leicht, dass unter diesen Transformationen der $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ stets nur eine endliche Anzahl von Collineationen enthalten sein kann. Also können wir sagen:

Nur wenn die Integralcurve $\mathfrak{C}$ der Differentialgleichung (A) eine rationale Curve ist, kann die Anzahl der Collineationen des R_{n-1}, die der Monodromiegruppe h von (A) entsprechen, eine unendliche sein.

Wir wollen die Fälle, wo die Integralcurve $\mathfrak{C}$ eine unendliche Anzahl von Collineationen in sich zulässt, als „Ausnahmefälle" bezeichnen und vorläufig nur den „allgemeinen" Fall in's Auge fassen, wo die Anzahl dieser Collineationen eine endliche ist.

Wenn wir dann von der Differentialgleichung (A) durch die Substitution

$$y = \lambda \bar{y}$$

zu einer Differentialgleichung $(\bar{A})$ übergehen, in welcher der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung von z die logarithmische Ableitung einer rationalen Function von x und s ist, so haben wir λ gleich einem Ausdrucke von der Form

$$\lambda = e^{\int r(s,x)\,dx},$$

wo $r(s, x)$ eine rationale Function von s und x bedeutet, und für die Differentialgleichung $(\bar{A})$ sind die Transformationsgruppe und Monodromiegruppe unimodular, also jedenfalls endlich, wenn die entsprechenden Gruppen der Integralquotienten endlich sind. Beide Gruppen müssen (Nr. 157, S. 95) in der Gruppe der Collineationen, die $\mathfrak{C}$ in sich selbst transformiren, enthalten sein, also besteht für die Differentialgleichung $(\bar{A})$ die Transformationsgruppe aus einer endlichen Anzahl von Operationen, sie ist folglich mit der Monodromiegruppe identisch und die Differentialgleichung $(\bar{A})$ ist, nach den Ergebnissen der Nr. 158 (S. 98), algebraisch integrirbar.

Die Integrale von (A) unterscheiden sich demzufolge von algebraischen Functionen nur durch einen Factor λ, dessen logarithmische Ableitung eine rationale Function von x und s ist.

Unter diesen „allgemeinen" Fall subsumiren sich also diejenigen Fälle, wo für die Differentialgleichung (A) nicht alle Invarianten (16) identisch verschwinden. Es werden die sämmtlichen Invarianten (16) also nur dann gleich Null sein können, wenn die Curve $\mathfrak{C}$ eine rationale ist; dies findet sich im Falle des Verschwindens aller Invarianten $\vartheta_3, \vartheta_4, \cdots \vartheta_n$ bestätigt. Wir gehen jetzt an die Erörterung der allge-

meinen Frage nach dem Verschwinden der Invarianten (16) un schliessen uns dabei an Herrn Wallenberg an, der diese Frage zuerst in voller Allgemeinheit erledigt hat.

189. Differentialgleichungen, für welche gewisse Invarianten verschwinden. Ausnahmefälle.

Es mögen also alle Invarianten (16) verschwinden oder ihren Sinn verlieren, während einige der $\vartheta_3, \vartheta_4, \cdots \vartheta_n$ von Null verschieden sind. Sei $\vartheta_\varkappa$ die lineare Invariante vom kleinsten Gewichte, die nicht identisch verschwindet, dann setzen wir

$$\vartheta_\varkappa(x) = \alpha_\varkappa \psi'(x)^\varkappa,$$

wo $\alpha_\varkappa$ eine von Null verschiedene, sonst aber willkürliche Constante, $\psi(x)$ eine zu bestimmende Function von x bedeutet. Wir setzen (A) wieder $p_1 = 0$ voraus und transformiren nun (A) durch Einführung der neuen unabhängigen Variabeln

$$\tau = \psi(x)$$

in eine Differentialgleichung

$$\text{(C)} \qquad \frac{d^n t}{d\tau^n} + s_2 \frac{d^{n-2} t}{d\tau^{n-2}} + \cdots + s_n t = 0,$$

wo also

$$y = \mu(x) t$$

und $\mu(x)$ eine bestimmte Function von x ist. Da die $\delta_{\nu\varkappa}^{(\nu+\varkappa)}$ gleich Null oder illusorisch sind, so sind die Quotienten

$$\frac{\vartheta_\nu^{\varkappa}(x)}{\vartheta_\varkappa^{\nu}(x)} = \frac{\vartheta_\nu^{\varkappa}(\tau)}{\vartheta_\varkappa^{\nu}(\tau)}, \quad \vartheta_\varkappa(\tau) = \alpha_\varkappa,$$

Constanten, und zwar sind dieselben gleich Null oder von Null verschieden, je nachdem $\vartheta_\nu(x)$ verschwindet oder nicht.

Für die Differentialgleichung (C) sind also alle Invarianten $\vartheta_\nu(\tau)$ (für $\nu = 3, 4, \cdots n$) Constanten.

Wir haben nun zu unterscheiden, ob die Invariante (Nr. 184 S. 200)

$$\Phi_\varkappa(x) = 2\varkappa \frac{d^2 \log \vartheta_\varkappa(x)}{dx^2} - (2\varkappa + 1)\left(\frac{d \log \vartheta_\varkappa(x)}{dx}\right)^2 - \frac{12\varkappa^2}{n+1} p_2$$

von Null verschieden ist oder nicht.

Wenn $\Phi_\varkappa(x)$ verschwindet, so ist auch $\Phi_\varkappa(\tau)$ gleich Null, also da $\vartheta_\varkappa(\tau) = \alpha_\varkappa$ eine Constante ist, auch s_2 gleich Null. Aus der Form der linearen Invarianten $\vartheta_\nu(\tau)$ ergiebt sich dann, dass in (C) auch alle übrigen Coefficienten constant sind, und zwar ist s_ν gleich Null oder

von Null verschieden, je nachdem die Invariante ϑ_ν verschwindet oder nicht.

Wenn $\Phi_\varkappa(x)$ von Null verschieden ist, so folgt aus dem Verschwinden der Invarianten ε_ν, dass auch die Quotienten

$$\frac{\Phi_\nu{}^\varkappa}{\vartheta_\varkappa{}^2}$$

Constanten sein müssen. Es sind also für die Differentialgleichung (C) nicht nur alle $\vartheta_\nu(\tau)$, sondern auch alle $\Phi_\nu(\tau)$ (für $\nu = 3, 4, \cdots n$) constant. Ferner ist

$$s_2 = -\frac{n+1}{12\varkappa^2}\Phi_\varkappa(\tau)$$

eine von Null verschiedene Constante, und ebenso sind die übrigen Coefficienten von (C) constant. Wir haben also den Satz:

Wenn für die Differentialgleichung (A) die sämmtlichen Invarianten (16) verschwinden oder illusorisch werden, so lässt sich diese Differentialgleichung durch die Transformation

$$y = \mu(x)t, \quad \tau = \psi(x)$$

auf eine Differentialgleichung mit constanten Coefficienten zurückführen.

Bei dem Beweise dieses Satzes ist von dem Vorhandensein der homogenen Relationen zwischen den Integralen von (A) kein Gebrauch gemacht worden. Wenn nun das Bestehen dieser Relationen noch in Betracht gezogen wird, so kann man die Beschaffenheit der Differentialgleichung mit constanten Coefficienten (C) noch genauer fixiren.

Aus der bekannten Form der Lösungen einer Differentialgleichung mit constanten Coefficienten (Nr. 69, Bd. I, S. 245) folgt nämlich (vergl. Wallenberg, Crelle's Journal, Band 113, S. 22), dass diese Lösungen dann und nur dann mehr wie $n-3$ von einander unabhängige homogene Gleichungen mit constanten Coefficienten befriedigen können, wenn entweder alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung (Nr. 69, Bd. I, S. 245) von einander verschieden sind und in rationalen Verhältnissen zu einander stehen, oder wenn diese Gleichung eine n-fache Wurzel besitzt. Der letztere Fall entspricht offenbar dem Falle der Relationen (D).

Wir begnügen uns damit zu zeigen, dass, wenn die Verhältnisse der Wurzeln

$$\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_n$$

der charakteristischen Gleichung von (C) rational und diese Wurzeln sämmtlich von einander verschieden sind, in der That $n-2$ von einander unabhängige homogene Relationen zwischen den Integralen

$$t_\varkappa = e^{\varrho_\varkappa \tau} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

bestehen müssen, die eine rationale Curve darstellen.

Aus der Voraussetzung folgt, dass sich eine Zahl γ so angeben lässt, dass

$$\varrho_\varkappa = \gamma \bar{\varrho}_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

ist, wo die $\bar{\varrho}_\varkappa$ ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler bedeuten. Es ist also

$$(17) \qquad t_\varkappa = (e^{\gamma\tau})^{\bar{\varrho}_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

d. h. die Integrale lassen sich als rationale Functionen des Parameters

$$e^{\gamma\tau}$$

darstellen.

Die Gleichungen der durch die Formeln (17) dargestellten rationalen Curve ergeben sich, wenn man

$$\bar{\varrho}_1 > \bar{\varrho}_2 > \cdots > \bar{\varrho}_n$$

voraussetzt in der Form

$$(18) \qquad t_2^{\mu_\varkappa + \nu_\varkappa} = t_1^{\nu_\varkappa} t_\varkappa^{\mu_\varkappa} \qquad (\varkappa = 3, 4, \cdots n),$$

worin

$$\frac{\mu_\varkappa}{\nu_\varkappa} = \frac{\bar{\varrho}_1 - \bar{\varrho}_2}{\bar{\varrho}_2 - \bar{\varrho}_\varkappa} = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_2 - \varrho_\varkappa}$$

zu nehmen ist.

In diesem Falle ist es also möglich, dass die Transformationsgruppe der Differentialgleichung (A) keine endliche ist. Um die Resultate in übersichtlicher Form zu erhalten, wollen wir im Folgenden voraussetzen, dass die vorgelegte Differentialgleichung (A) der Fuchsschen Classe angehört, auch halten wir die Annahme $p_1 = 0$ fest.

Seien dann

$$j_1, \; j_2, \; \cdots \; j_m$$

die nicht identisch verschwindenden unter den Invarianten

$$\vartheta_\nu, \quad \Phi_\nu \qquad (\nu = 3, 4, \cdots n),$$

und möge $g_\varkappa$ das Gewicht von $j_\varkappa$ bedeuten. Wenn dann die ganzen Zahlen $g_1, g_2, \cdots g_m$ keinen gemeinsamen Theiler besitzen, so lassen sich ganze Zahlen $h_1, h_2, \cdots h_m$ so bestimmen, dass

$$\sum_{\varkappa=1}^{m} g_\varkappa h_\varkappa = 1$$

ist. Die Invariante

$$j = j_1^{h_1} j_2^{h_2} \cdots j_m^{h_m}$$

ist also in diesem Falle vom Gewichte Eins. Es ist dann $j(\tau)$ eine Constante und

$$j(x) = j(\tau)\psi'(x),$$

also $\psi'(x)$ eine rationale Function von x, da die Differentialgleichung (A) der Fuchs'schen Classe angehören, also rationale Coefficienten besitzen sollte.

Wenn wir in die Differentialgleichung (C) die unabhängige Variable x einführen, so verwandelt sich dieselbe in

$$(\bar{A}) \qquad \frac{d^n t}{dx^n} + \bar{p}_1 \frac{d^{n-1} t}{dx^{n-1}} + \cdots + \bar{p}_n t = 0,$$

wo die $\bar{p}_1, \cdots \bar{p}_n$ leicht zu bildende Functionen von x bedeuten; diese Differentialgleichung geht aus (A) durch die Substitution

$$y = \mu(x) t$$

hervor, wo nach einer oft benutzten Formel

$$\mu(x) = e^{\frac{1}{n}\int p_1 dx}$$

ist. Nun ist aber

$$(19) \qquad \begin{cases} \bar{p}_1 = -\frac{n(n-1)}{2} \frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_n = s_n[\psi'(x)]^n \end{cases},$$

wir haben also

$$\mu(x) = [\psi'(x)]^{-\frac{n-1}{2}},$$

d. h. $[\mu(x)]^2$ ist eine rationale Function von x. Daraus folgt, dass auch die Differentialgleichung $(\bar{A})$ zur Fuchs'schen Classe gehört, so dass insbesondere (vergl. Nr. 62, Bd. I, S. 220, Gleichung (F))

$$\bar{p}_n = \frac{F_{n(\sigma-1)}}{Q_\sigma^n}$$

ist, wo F, Q ganze rationale Functionen von x bedeuten, deren Grad durch den Index gegeben wird, und

$$Q_\sigma = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_\sigma)$$

ist, wenn $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ die singulären Punkte der Differentialgleichung $(\bar{A})$ darstellen. Die letzte der Gleichungen (19) liefert

$$\psi'(x) = \frac{\sqrt[n]{F_{n(\sigma-1)}}}{Q_\sigma} \frac{1}{\sqrt[n]{s^n}},$$

es muss folglich, da $\psi'(x)$ rational, s_n constant ist, $F_{n(\sigma-1)}$ die n^{te} Potenz einer ganzen Function $(\sigma - 1)^{\text{ten}}$ Grades von x sein. Durch Zerlegung in Partialbrüche finden wir demnach

$$\psi'(x) = \sum_{\varkappa=1}^{\sigma} \frac{c_\varkappa}{x - a_\varkappa},$$

also durch Integration

$$\psi(x) = \log \prod_{\varkappa=1}^{\sigma} (x - a_\varkappa)^{c_\varkappa},$$

wo die $c_\varkappa$ Constanten bedeuten.

Die Integrale von (C) sind (vergl. S. 220)

$$t_i = e^{\varrho_i \tau} \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

wir haben folglich für (A) das Fundamentalsystem

$$y_i = \left\{ \sum_{\varkappa=1}^{\sigma} \frac{c_\varkappa}{x - a_\varkappa} \right\}^{-\frac{n-1}{2}} \left\{ \prod_{\varkappa=1}^{\sigma} (x - a_\varkappa)^{c_\varkappa} \right\}^{\varrho_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots n).$$

190. **Die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen sind rationale Zahlen. Allgemeiner Satz über Differentialgleichungen mit algebraischer Integralcurve.**

Wir fügen jetzt den über die Differentialgleichung (A) gemachten Voraussetzungen noch die Annahme hinzu, dass die Wurzeln ihrer determinirenden Fundamentalgleichungen rationale Zahlen seien.

Die zu $x = a_\varkappa$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung von (A) hat die Wurzeln

$$\frac{n-1}{2} + c_\varkappa \varrho_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

dieselben sind also von einander verschieden, wenn die ϱ_i $(i = 1, 2, \cdots n)$ von einander verschieden sind, und dies war (S. 219) eine Folge der Annahme, dass die Integralcurve $\mathfrak{C}$ von (A) eine algebraische sein sollte. Umgekehrt folgt, wenn wir voraussetzen, dass (A) so beschaffen sein soll, dass die sämmtlichen determinirenden Fundamentalgleichungen von einander verschiedene rationale Wurzeln haben, dass die $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_n$ von einander verschieden und ihre Verhältnisse rational sind.

Da die Producte $c_\varkappa \varrho_i$ rationale Zahlen sein sollten, so sind jetzt die $y_1, y_2, \cdots y_n$ Potenzen mit rationalen Exponenten von rationalen Functionen, oder, wie wir kurz sagen, Wurzeln aus rationalen Functionen, d. h. die Differentialgleichung ist algebraisch integrirbar. Wir haben somit den Satz:

Wenn die Integralcurve $\mathfrak{C}$ der zur Fuchs'schen Classe gehörigen Differentialgleichung (A) eine algebraische ist,

Invarianten (16) sind sämmtlich gleich Null oder
sch, so ist $\mathfrak{C}$ nothwendig eine rationale Curve. Sind
·zeln der determinirenden Fundamentalgleichungen
rationale Zahlen, und besitzen die Gewichte der nicht
indenden Invarianten ϑ_ν, Φ_ν keinen gemeinsamen
so ist (A) algebraisch integrirbar.

n wir von der Voraussetzung, dass $\mathfrak{C}$ eine algebraische Curve
ab, so haben wir den Satz:

ın für die Differentialgleichung (A) der Fuchs'schen
deren determinirende Gleichungen von einander ver-
ıe rationale Wurzeln haben, alle Invarianten (16) ver-
en oder illusorisch werden, und die Gewichte der nicht
indenden unter den Invarianten ϑ_ν, Φ_ν keinen gemein-
'heiler haben, so ist (A) algebraisch integrirbar; die
curve $\mathfrak{C}$ ist also jedenfalls eine algebraische.

leibt noch der Fall zu erledigen, wo die Gewichte $g_1, g_2, \cdots g_m$
; verschwindenden unter den Invarianten ϑ_ν, Φ_ν den von
l) Eins verschiedenen gemeinsamen Theiler g besitzen. Dann
nicht mehr rational, sondern die g^{te} Wurzel aus einer ratio-
ıction $R(x)$, und die Integrale von (A) haben die Gestalt

$$y_i = [R(x)]^{-\frac{n-1}{2g}} e^{\varrho_i \int \sqrt[g]{R(x)}\,dx} \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

sind also im allgemeinen nicht algebraisch.

n $g > 2$ ist, so sind die Invarianten Φ_ν sämmtlich gleich
d die Gewichte der nicht verschwindenden ϑ_ν genügen der
g

$$\nu \equiv 0 \pmod{g}.$$

ınen, wie wir in der Nr. 189 (S. 218) gezeigt haben, in der
algleichung (C) nur diejenigen Coefficienten s_ν von Null ver-
sein, deren Index ein Vielfaches von g ist. Wenn nun

$$n = \varkappa g + \bar{n}$$

ıtet die charakteristische Gleichung von (C)

$$\varrho^n + s_g \varrho^{n-g} + s_{2g} \varrho^{n-2g} + \cdots + s_{\varkappa g} \varrho^{\bar{n}} = 0,$$

würde also, wenn $\bar{n} > 1$ wäre, eine mehrfache Wurzel besitzen,
widerstreitet der Voraussetzung, dass (C) eine algebraische
ırve $\mathfrak{C}$ besitzen sollte (vergl. Nr. 189, S. 219). Es muss also
Null oder Eins sein. Wenn wir im letzteren Falle die
$= 0$ absondern, so zerfallen die übrigen Wurzeln von (20)

in Gruppen zu je g, und wenn ϱ_1 eine Wurzel einer solchen Gruppe ist, so sind die übrigen durch die Ausdrücke

$$\varepsilon\varrho_1, \quad \varepsilon^2\varrho_1, \cdots \varepsilon^{g-1}\varrho_1$$

gegeben, wo

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{g}}$$

gesetzt wurde. Soll die Integralcurve $\mathfrak{C}$ eine algebraische Curve sein, so müssen (Nr. 189, S. 219) die Verhältnisse der Wurzeln von (20) rationale Zahlen sein, dies ist nur möglich, wenn $g = 2$ ist.

In diesem Falle müssen alle Invarianten ϑ_ν, deren Gewicht eine ungerade Zahl ist, identisch verschwinden. Wenn für eine Differentialgleichung (A) die $\vartheta_3, \vartheta_5, \vartheta_7, \cdots$ sämmtlich gleich Null sind, so müssen, wie leicht einzusehen ist, auch die linearen Theile dieser Invarianten gleich Null sein. Hieraus und aus dem in der Nr. 183 (S. 197) angegebenen Ausdrucke des linearen Theiles der Invarianten ϑ_ν schliesst Herr Brioschi:

dass eine Differentialgleichung (A), für welche die Invarianten ϑ_ν mit ungeradem Index ν verschwinden, die Eigenschaft hat, mit ihrer Adjungirten identisch zu sein.

Wir gehen auf einen Beweis dieses Satzes nicht ein, sondern begnügen uns damit, aus der Annahme $g = 2$ die für unsere Differentialgleichung (A) der Fuchs'schen Classe mit rationalen Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen und algebraischer Integralcurve sich ergebenden Folgerungen zu ziehen.

Für die Differentialgleichung (C) folgt aus der Form der linearen Theile der Invarianten ϑ_ν, dass die Coefficienten $s_\varkappa$, deren Index eine ungerade Zahl ist, verschwinden müssen. Je nachdem nun

$$n = 2m \quad \text{oder} \quad n = 2m + 1$$

ist, lautet demgemäss die charakteristische Gleichung

$$\varrho^n + c_2\varrho^{n-2} + \cdots + c_{2m} = 0,$$

beziehungsweise

$$\varrho^n + c_2\varrho^{n-2} + \cdots + c_{2m}\varrho = 0.$$

Im letzteren Falle gehört zu der Wurzel $\varrho = 0$ das Integral

$$y_n = [R(x)]^{-\frac{n-1}{4}}$$

von (A), dieses ist die Wurzel aus einer rationalen Function, wir können uns also, wenn $n = 2m + 1$ ist, nach dem Verfahren der Nr. 18 (Bd. I, S. 47) die Differentialgleichung (A) durch Kenntniss

dieses Integrals auf eine Differentialgleichung $2m^{\text{ter}}$ Ordnung reducirt denken, die offenbar auch wieder zur Fuchs'schen Classe gehören wird und auch sonst dieselben Eigenschaften besitzt wie (A). Wir setzen darum gleich von vornherein $n = 2m$ voraus.

Dann ist also

$$\psi'(x) = \sqrt{R(x)},$$

und die Integrale von (A) lauten

$$y_i = [R(x)]^{-\frac{n-1}{4}} e^{\varrho_i \int \sqrt{R(x)}\,dx} \qquad (i = 1, 2, \cdots 2m),$$

die $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_{2m}$ sind dabei paarweise einander gleich und entgegengesetzt, sei etwa

$$\varrho_{2i-1} = -\varrho_{2i} \qquad (i = 1, 2, \cdots m),$$

also

$$\left.\begin{matrix} y_{2i-1} \\ y_{2i} \end{matrix}\right\} = [R(x)]^{-\frac{n-1}{4}} e^{\pm \varrho_{2i-1} \int \sqrt{R(x)}\,dx}.$$

Daraus folgt, dass je zwei der Integrale von (A), nämlich y_{2i-1} und y_{2i}, eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{1}{2}\frac{R'(x)}{R(x)}\frac{dv}{dx} - \varrho_{2i}^2 R(x) v = 0$$

befriedigen, so dass also in diesem Falle die Differentialgleichung (A) reductibel ist.

Da die Verhältnisse der $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_{2m}$ rational sein müssen, können wir setzen

$$\varrho_{2i-1} = \gamma h_i \qquad (i = 1, 2, \cdots m),$$

wo γ eine Constante, die h_i ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler bedeuten; wir haben demnach

$$\left.\begin{aligned} y_{2i-1} &= [R(x)]^{-\frac{n-1}{4}} \omega^{h_i} \\ y_{2i} &= [R(x)]^{-\frac{n-1}{4}} \omega^{-h_i} \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \cdots m),$$

wo

$$\omega = e^{\gamma \int \sqrt{R(x)}\,dx}$$

gesetzt wurde; d. h. die Verhältnisse der $y_1, y_2, \cdots y_{2m}$ sind rationale Functionen des Parameters ω, und die Gleichungen der so dargestellten rationalen Curve lauten für $n = 2m$

$$(21) \qquad \begin{cases} y_1 y_2 = y_3 y_4 = \cdots = y_{2m-1} y_{2m} \\ \left(\dfrac{y_1}{y_2}\right)^{h_\varkappa} = \left(\dfrac{y_{2\varkappa-1}}{y_{2\varkappa}}\right)^{h_1} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots m), \end{cases}$$

zu denen für $n = 2m + 1$ noch die Gleichung

(22) $$y_n^2 = y_1 y_2$$

hinzutritt.

Die Integrale $y_1, y_2, \cdots y_{2m}$ sind in diesem Falle algebrais wenn die

$$e^{\int \varrho_i \sqrt{R(x)}\, dx}$$

algebraisch sind. Die Bedingungen hierfür ergeben sich aus ein Satze von Abel (Crelle's Journal Bd. I, S. 221), der wie folgt laut

„Wenn ein Integral von der Form

$$\int \frac{f(x)\, dx}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

wo $f(x)$, $\varphi(x)$ ganze rationale Functionen sind, durch Logarith ausdrückbar ist, so lässt es sich in die Form setzen

$$A \log \frac{p + q\sqrt{\varphi(x)}}{p - q\sqrt{\varphi(x)}},$$

wo A eine Constante, p, q ganze rationale Functionen von x sind."

Wenn also die Lösungen $y_1, y_2, \cdots y_{2m}$ unserer Differential chung algebraische Functionen von x sind, so lassen sie sich in Form

$$\left\{\frac{p + q\sqrt{R(x)}}{p - q\sqrt{R(x)}}\right\}^{\pm\alpha}$$

darstellen, wo p, q ganze Functionen, α eine rationale Zahl bedeut

Es brauchen aber, wie sich an einfachen Beispielen zeigen läs die $y_1, y_2, \cdots y_{2m}$ nicht immer algebraische Functionen zu sein.

Wenn wir voraussetzen, dass die Differentialgleichung (A) ir ductibel ist, so können wir also den folgenden Satz aussprechen:

Wenn die Integralcurve einer zur Fuchs'schen Clas gehörigen irreductiblen linearen Differentialgleichung Ordnung, deren determinirende Fundamentalgleichung lauter rationale Wurzeln haben, eine algebraische Curve i so ist diese Differentialgleichung algebraisch integrirb ausgenommen wenn die Gleichungen jener Curve von Form (D) sind, d. h. wenn dieselbe die rationale Normalcu des $(n-1)$-fach ausgedehnten Raumes ist.

Dieser Satz wurde für den einfachsten der hier in Betracht k menden Fälle $n = 3$ zuerst von Herrn Fuchs aufgestellt. Für $n =$ hat ihn der Verfasser, für allgemeines n Herr Wallenberg bewie

Elfter Abschnitt.

Formulirung und allgemeine Discussion der Umkehrprobleme.

Erstes Kapitel.

191. **Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung mit einer homogenen Relation zwischen den Integralen. Covarianten. Hesse'sche Covariante. Werthe der unabhängigen Variablen für einen Punkt der Integralcurve.**

Für $n = 3$ ist der Fall des Bestehens einer homogenen Relation mit constanten Coefficienten zwischen den Elementen y_1, y_2, y_3 eines Fundamentalsystems der einzig mögliche, der in Betracht kommen kann, derselbe ist also durch den am Schlusse der vorigen Nummer erwähnten Fuchs'schen Satz erledigt.

Für $n = 4$ wäre nebst dem Falle, wo die homogenen Relationen zwischen den vier Integralen y_1, y_2, y_3, y_4 eine algebraische Curve definiren, noch der Fall in's Auge zu fassen, wo dieselben nur eine Fläche (Gebilde erster Stufe) darstellen, d. h. nach einem bereits (Nr. 186, S. 208) erwähnten Satze von Kronecker, wo eine und nur eine irreductible homogene Gleichung mit constanten Coefficienten

(1) $$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$$

zwischen den Lösungen y_1, y_2, y_3, y_4 der gegebenen Differentialgleichung (A_4) besteht. In diesem Falle wäre also die Integralcurve $\mathfrak{C}$

$$y_\varkappa = y_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

keine algebraische, sondern eine transcendente Raumcurve, die auf einer algebraischen Fläche liegt.

Wenn die Differentialgleichung (A_4) algebraische Coefficienten hat, so kann in diesem Falle ihre Transformationsgruppe H keine endliche sein, da sonst (A_4) algebraisch integrirbar wäre. Wenden wir auf die y_1, y_2, y_3, y_4 eine Transformation dieser Gruppe H an, so verwandelt sich $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ in eine homogene Function desselben Grades der y_1, y_2, y_3, y_4, die ebenfalls identisch verschwinden muss.

Zufolge der Voraussetzung, dass keine von (1) verschiedene homoge Beziehung zwischen den y_1, y_2, y_3, y_4 bestehen soll, ergiebt sich de nach, dass sich durch Anwendung einer Transformation von H d Form f nur mit einer Constanten multipliciren kann. Wir schliess also zuvörderst, dass die Fläche (1) die Eigenschaft haben muss, dur eine Gruppe von Collineationen, die aus einer oder aus mehreren co tinuirlichen Schaaren besteht, in sich selbst überzugehen.

Die Gruppe der Collineationen, durch welche eine algebraisc Fläche in sich selbst transformirt wird, ist jedenfalls eine algebraisc und muss folglich eine algebraische continuirliche (aus infinitesimal Transformationen erzeugte) ausgezeichnete Untergruppe enthalten. M kennt aus Untersuchungen der Herren Klein, Lie u. a. (vergl. d Arbeiten des Herrn Gino Fano in den Rendiconti della Accad. d Lincei 1895) die sämmtlichen algebraischen Flächen, welche die Eig schaft haben, durch continuirliche Schaaren von Collineationen in s selbst überzugehen; diese sind also die einzigen, die die Integralcu unserer Differentialgleichung (A_4) enthalten können. Es bedarf al noch der Untersuchung, ob die Integralcurve von (A_4), wenn sie einer dieser algebraischen Flächen liegt, auch wirklich transcend sein kann, d. h. ob nicht schon daraus, dass zwischen den Integra y_1, y_2, y_3, y_4 die eine Relation (1) besteht, deren linke Seite sich Anwendung irgend einer Transformation der Transformationsgru mit einer Constanten multiplicirt, mit Nothwendigkeit die algebrais Natur der Integralcurve, d. h. das Bestehen einer zweiten von (1) u abhängigen ebenfalls homogenen Relation erschlossen werden kan Ohne auf die Erörterung dieser Frage genauer eingehen zu wolle begnügen wir uns damit, einige Schlüsse aus dem Bestehen der Rel tion (1) zu ziehen, wobei wir es dahin gestellt lassen, ob neben (noch eine zweite davon unabhängige Relation besteht, sondern n allein die Voraussetzung festhalten, dass $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ sich bei A wendung der Transformationen von H mit einer Constanten multiplici

Denken wir uns irgend eine Covariante der quaternären Fo $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ gebildet, d. h. eine homogene ganze Function v y_1, y_2, y_3, y_4 und den Coefficienten von f, die die Eigenschaft besi abgesehen von einem constanten Factor ungeändert zu bleiben, we wir in derselben an Stelle von y_1, y_2, y_3, y_4 setzen

$$(2) \qquad \sum_{x=1}^{4} \alpha_{ix} y_x \qquad (i=1,2,3,4)$$

und an Stelle der Coefficienten von $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ die Coefficien der Form

(3) $$f\Big(\sum_\varkappa \alpha_{1\varkappa} y_\varkappa,\ \sum_\varkappa \alpha_{2\varkappa} y_\varkappa,\ \sum_\varkappa \alpha_{3\varkappa} y_\varkappa,\ \sum_\varkappa \alpha_{4\varkappa} y_\varkappa\Big),$$

wobei

$$(\alpha_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

irgend eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante bedeutet. Stellt dann (2) eine Transformation der Transformationsgruppe H unserer Differentialgleichung (A_4) dar, so unterscheidet sich die transformirte Form (3) von $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ nur durch einen constanten Factor; es wird folglich jede Covariante von $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ auch nur mit einem constanten Factor multiplicirt, wenn man in derselben auf die y_1, y_2, y_3, y_4 eine Transformation von H anwendet. Also ist die logarithmische Ableitung einer nicht verschwindenden Covariante von $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ nach x eine rationale Differentialfunction der y_1, y_2, y_3, y_4, die bei den Transformationen von H ungeändert bleibt, d. h. sie ist nach dem Picard-Vessiot'schen Satze eine algebraische Function von x, wenn, wie wir voraussetzen, (A_4) algebraische Coefficienten hat. Wir erhalten also den Satz:

Eine nicht identisch verschwindende Covariante von $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ ist in der Form

$$e^{\int r(x)\,dx}$$

darstellbar, wo $r(x)$ eine rationale Function desselben algebraischen Gebildes bedeutet, als dessen rationale Functionen die Coefficienten von (A_4) dargestellt werden können.

Wenn (A_4) insbesondere zur Fuchs'schen Classe gehört und die determinirenden Fundamentalgleichungen lauter rationale Wurzeln haben, so ist jede Covariante von $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ die Wurzel aus einer rationalen Function von x.

Bilden wir die sogenannte Hesse'sche Covariante von $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\,\partial y_\varkappa}\right| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, 3, 4),$$

so ist dieselbe eine homogene Function $(4m-8)^{\text{ten}}$ Grades der y_1, y_2, y_3, y_4, wenn m den Grad von $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ bedeutet. Dieselbe könnte

1) identisch in den y_1, y_2, y_3, y_4 verschwinden,

2) die Form $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ als Factor enthalten,

3) als Function von x verschwinden, wenn man für y_1, y_2, y_3, y_4 die Lösungen von (A_4) nimmt und, gleich Null gesetzt, eine von (1) unabhängige Relation zwischen den Integralen y_1, y_2, y_3, y_4 darstellen.

Im letzteren Falle wäre die Integralcurve von (A_4) sicher algebraisch, so dass wir also auf die bereits allgemein erledigte Frage zurückkämen. Im Falle 2) denken wir uns die Hesse'sche Covariante durch die höchste in derselben enthaltene Potenz von $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ dividirt und bezeichnen den Quotienten durch

$$P(y_1, y_2, y_3, y_4).$$

Dann könnte dieser Quotient eine Constante sein, wenn

2a) $m = 2$,

2b) $m = 4$ und die Hesse'sche Covariante das Quadrat der Form selbst,

2c) $m = 8$ und die Hesse'sche Covariante der Cubus von f ist.

Wenn wir von diesen Fällen ebenso wie von 1) vorläufig absehen, so ist also

$$P(y_1, y_2, y_3, y_4) = e^{\int r(x)\,dx} = \chi(x),$$

wo $r(x)$ eine nicht verschwindende algebraische Function bedeutet.

Sei k der Grad der homogenen Function $P(y_1, y_2, y_3, y_4)$, dann ist also

$$P(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^k\,\Pi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = e^{\int r(x)\,dx} = \chi(x), \tag{4}$$

woselbst

$$\Pi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = P(1, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$$

gesetzt wurde.

Denken wir uns die Integralcurve $\mathfrak{C}$ von (A_4) dargestellt, indem wir η_1, η_2, η_3 jetzt etwa als gewöhnliche Cartesius'sche Coordinaten eines Punktes im Raume deuten und dieselben als Functionen von x auffassen

$$\eta_\varkappa = \eta_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, 3),$$

so wird im Allgemeinen zu jedem Punkte der Curve eine gewisse Menge von x-Werthen gehören. Diese Werthe haben also die Eigenschaft, dass, wenn wir uns die η_1, η_2, η_3 auf geeigneten Wegen von x aus nach einem dieser Werthe hin fortgesetzt denken, dieselben Werthe der Functionen η_1, η_2, η_3 zum Vorschein kommen, wie für den Ausgangspunkt x. Sei x_1 irgend ein solcher mit x zusammengehöriger Werth, dann ist also

$$\eta_\varkappa(x) = \eta_\varkappa(x_1) \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

und folglich nach Gleichung (4)

$$\frac{y_i(x)^k}{\chi(x)} = \frac{y_i(x_1)^k}{\chi(x_1)} \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{5}$$

Machen wir in die Differentialgleichung

$$(A_4) \qquad \frac{d^4y}{dx^4} + p_1\frac{d^3y}{dx^3} + p_2\frac{d^2y}{dx^2} + p_3\frac{dy}{dx} + p_4 y = 0$$

die Substitution

$$y = e^{\frac{1}{k}\int r(x)\,dx} z,$$

so verwandelt sich dieselbe in

$$(\overline{A}_4) \qquad \frac{d^4z}{dx^4} + \bar{p}_1(x)\frac{d^3z}{dx^3} + \bar{p}_2(x)\frac{d^2z}{dx^2} + \bar{p}_3(x)\frac{dz}{dx} + \bar{p}_4(x)z = 0,$$

wo (vergl. Nr. 172, S. 145) die $\bar{p}_i(x)$ rationale Functionen desselben algebraischen Gebildes darstellen, als dessen rationale Functionen die p_i $(i=1,2,3,4)$ vorausgesetzt wurden, und die Ausdrücke

$$(6) \qquad z_i(x) = y_i(x) e^{-\frac{1}{k}\int r(x)\,dx} \qquad (i=1,2,3,4)$$

stellen ein Fundamentalsystem von $(\overline{A}_4)$ dar. Ersetzen wir in $(\overline{A}_4)$ die unabhängige Variable x durch x_1, so besitzt die Differentialgleichung

$$(7) \qquad \sum_{i=0}^{4} \frac{d^iz}{dx_1^i}\bar{p}_{4-i}(x_1) = 0, \quad \bar{p}_0(x) = 1,$$

die Integrale $z_i(x_1)$ für $i = 1, 2, 3, 4$, also, da zufolge der Gleichungen (5), (6)

$$z_i(x_1) = e^{\frac{2\pi g\sqrt{-1}}{k}} z_i(x) \qquad (i=1,2,3,4)$$

ist, wo g eine ganze Zahl bedeutet, auch die Integrale

$$z_1(x), \quad z_2(x), \quad z_3(x), \quad z_4(x).$$

Sei nun

$$x = \varphi(x_1)$$

und führen wir in die Differentialgleichung (7) mittelst dieser Beziehung x als unabhängige Variable ein, so muss die so entstehende Differentialgleichung mit (A_4) identisch sein. D. h. es geht die Differentialgleichung (7) aus (A_4) durch die Transformation

$$(8) \qquad y = e^{\frac{1}{k}\int r(x)\,dx} z, \quad x = \varphi(x_1)$$

hervor.

Wenn nun für die Differentialgleichung (A_4) nicht alle Invarianten (16) (Nr. 187, S. 213) identisch verschwinden, so folgt, wie in der Nr. 187 (S. 212) aus der Betrachtung der absoluten Invarianten, die ja gemäss den Gleichungen (8) für die Differentialgleichungen (7) und

(A_4) identisch sind, dass x_1 eine algebraische Function von x sein muss. Sehen wir also von dem Falle ab, wo die Invarianten

$$\delta_{34}, \quad \varepsilon_3, \quad \varepsilon_4$$

identisch Null sind oder illusorisch werden, ein Fall, in welchem sich (A_4) auf eine Differentialgleichung mit constanten Coefficienten zurückführen lässt (Nr. 189, S. 219), und fassen denselben mit den Fällen 1), 2), 3) (S. 229) unter der Bezeichnung „Ausnahmefälle" zusammen, so können wir den Satz aussprechen:

Wenn die Integralcurve $\mathfrak{C}$ der Differentialgleichung (A_4) mit algebraischen Coefficienten auf einer algebraischen Fläche liegt, so genügt, von den wohlumgrenzten Ausnahmefällen abgesehen, die Gesammtheit der Werthe der unabhängigen Variabeln, die zu einem und demselben Punkte der Curve $\mathfrak{C}$ gehören, als Functionen eines dieser Werthe aufgefasst, einer algebraischen Gleichung mit rationalen Coefficienten; die Anzahl dieser Werthe ist also jedenfalls eine endliche.

Ein analoger Satz gilt, wie aus dem Gange des Beweises zu übersehen ist, auch für eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (A) mit algebraischen Coefficienten, wenn zwischen den Integralen derselben eine homogene Relation mit constanten Coefficienten besteht, deren linke Seite sich bei jeder Transformation der Transformationsgruppe von (A) mit einer Constanten multiplicirt und welche eine Covariante besitzt, die sich nicht auf eine Constante reducirt. Nur bietet für ein beliebiges $n > 4$ die Fixirung der Ausnahmefälle grössere Schwierigkeiten dar wie für $n = 4$, deshalb haben wir uns auf die Betrachtung von Differentialgleichungen vierter Ordnung beschränkt. Wir wollen jetzt, ehe wir an den eben bewiesenen Satz weitere Ueberlegungen knüpfen, in eine Discussion der beiden Ausnahmefälle 1), 2) (S. 229) eintreten.

192. Erledigung der Ausnahmefälle. Ternäre Relation. Quadratische Relation mit nicht verschwindender Discriminante.

Der Fall 1), dass die Hesse'sche Covariante der quaternären Form $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ identisch verschwindet, kann nach einem von Hesse aufgestellten, von den Herren Gordan und Noether berichtigten Satze nur dann eintreten, wenn sich die Form $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ durch eine lineare Transformation der Grössen y_1, y_2, y_3, y_4 auf eine ternäre reduciren lässt. Wir können also von vornherein voraus-

setzen, dass das Fundamentalsystem y_1, y_2, y_3, y_4 von (A_4) so gewählt sei, dass etwa y_1, y_2, y_3 die von y_4 unabhängige homogene Relation

$$(I) \qquad f(y_1, y_2, y_3) = 0$$

befriedigen, deren linke Seite sich durch jede Substitution der Gruppe H mit einer Constanten multiplicirt. Sei

$$(II) \qquad \sum_{i=1}^{4} \alpha_{\varkappa i} y_i \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

eine Substitution S von H, dann muss $f(y_1, y_2, y_3)$ auch nach Ausübung der Substitution (II) von y_4 unabhängig sein, d. h. $f(y_1, y_2, y_3)$ multiplicirt sich durch Anwendung der Substitution

$$\begin{gathered} \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \alpha_{13} y_3, \\ \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \alpha_{23} y_3, \\ \alpha_{31} y_1 + \alpha_{32} y_2 + \alpha_{33} y_3 \end{gathered}$$

mit einer Constanten λ. Bilden wir nun die partiellen Ableitungen

$$(III) \qquad \frac{\partial f}{\partial y_1} = Y_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y_2} = Y_2, \quad \frac{\partial f}{\partial y_3} = Y_3,$$

so erfahren diese Ausdrücke durch Anwendung der Transformation S auf y_1, y_2, y_3, y_4 die Substitution

$$\begin{gathered} \lambda \beta_{11} Y_1 + \lambda \beta_{12} Y_2 + \lambda \beta_{13} Y_3, \\ \lambda \beta_{21} Y_1 + \lambda \beta_{22} Y_2 + \lambda \beta_{23} Y_3, \\ \lambda \beta_{31} Y_1 + \lambda \beta_{32} Y_2 + \lambda \beta_{33} Y_3, \end{gathered}$$

wobei gesetzt wurde:

$$\underset{(i, \varkappa = 1, 2, 3)}{|\alpha_{i\varkappa}|} = \delta; \quad \beta_{i\varkappa} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \alpha_{i\varkappa}} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, 3),$$

und zwischen den Y_1, Y_2, Y_3 besteht die sich durch Elimination der y_1, y_2, y_3 aus den Gleichungen (I) und (III) ergebende homogene Relation

$$(IV) \qquad F(Y_1, Y_2, Y_3) = 0,$$

die, wenn wir die y_1, y_2, y_3 als homogene Coordinaten eines Punktes einer Ebene deuten, die Gleichung der durch (I) definirten Curve in Liniencoordinaten darstellt. Die Coefficienten der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(\alpha) \qquad \frac{D(Y, Y_1, Y_2, Y_3)}{D(Y_1, Y_2, Y_3)} = 0,$$

für welche Y_1, Y_2, Y_3 ein Fundamentalsystem bilden, sind rationale

Differentialfunctionen der y_1, y_2, y_3, y_4, die bei den Transformationen der Gruppe H ungeändert bleiben, d. h. es sind algebraische Functionen von x.

Wenn die Differentialgleichung (A_4) zur Fuchs'schen Classe gehört, so gehört auch die Differentialgleichung (α) zur Fuchs'schen Classe und zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems besteht die Gleichung (IV). Der in der Nr. 190 (S. 226) aufgestellte Satz lehrt also, dass die Differentialgleichung (α) algebraisch integrirbar ist, wenn nicht die Gleichung (IV) die Form

$$Y_2^2 = Y_1 Y_3$$

hat. Im letzteren Falle ist die Curve (I) ein Kegelschnitt, der sich durch eine Collineation, d. h. bei geeigneter Wahl des Fundamentalsystems y_1, y_2, y_3, y_4, in der Form

$$y_2^2 - y_1 y_3 = 0$$

darstellen lässt. Dieser Fall gehört also unter den Fall 2a), der nachher zu behandeln sein wird.

Sehen wir von demselben ab, so sind also die Y_1, Y_2, Y_3, und folglich auch die y_1, y_2, y_3, algebraische Functionen von x. Wenn dann die y_1, y_2, y_3 nicht einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung mit rationalen Coefficienten genügen, so ist auch y_4 nothwendig algebraisch. Befriedigen dagegen die y_1, y_2, y_3 eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit rationalen Coefficienten

$$Q(y) = 0,$$

so ist die Differentialgleichung (A_4) in der Form

$$R\,Q(y) = 0$$

darstellbar, wo R einen Differentialausdruck erster Ordnung bedeutet. Mit Hülfe der in der Nr. 26 (Bd. I, S. 81) gegebenen Formeln ergiebt sich dann y_4 durch blosse Ausübung von Quadraturen.

Wir schreiten zur Behandlung des Ausnahmefalles 2a), wo also $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ vom zweiten Grade

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = \sum_{\varkappa=1}^{4} \sum_{i=1}^{4} a_{i\varkappa} y_i y_\varkappa = 0$$

ist und machen zunächst die Annahme, dass die Hesse'sche Covariante, d. h. in diesem Falle die Discriminante von f,

$$|a_{i\varkappa}| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, 3, 4),$$

nicht identisch verschwindet.

Man kann dann bekanntlich lineare homogene Functionen

$$w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4$$

der y_1, y_2, y_3, y_4 so einführen, dass f die Gestalt:

$$f = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2 - w_4^2$$

erhält. Setzt man

(V) $$\zeta_1 = \frac{w_1 - w_3}{w_4 - w_2}, \quad \zeta_2 = \frac{w_1 + w_3}{w_4 - w_2},$$

so lässt sich leicht einsehen, dass durch eine lineare Transformation der w_1, w_2, w_3, w_4, die die Form f mit einer Constanten multiplicirt, die ζ_1, ζ_2 sich entweder in

(a) $$\bar{\zeta}_1 = \frac{\alpha_1 \zeta_1 + \beta_1}{\gamma_1 \zeta_1 + \delta_1}, \quad \bar{\zeta}_2 = \frac{\alpha_2 \zeta_2 + \beta_2}{\gamma_2 \zeta_2 + \delta_2}$$

oder in

(b) $$\bar{\zeta}_1 = \frac{\alpha_1 \zeta_2 + \beta_1}{\gamma_1 \zeta_2 + \delta_1}, \quad \bar{\zeta}_2 = \frac{\alpha_2 \zeta_1 + \beta_2}{\gamma_2 \zeta_1 + \delta_2}$$

verwandeln müssen, wo die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Constanten bedeuten.

Setzen wir also (vergl. Nr. 180, S. 184)

$$\varDelta\binom{\zeta_1}{x} = P_1(x),$$

$$\varDelta\binom{\zeta_2}{x} = P_2(x)$$

und beachten die durch die Gleichung (c) der Nr. 180 (S. 185) dargestellte Eigenschaft des Differentialausdruckes $\varDelta$, wonach derselbe eine Differentialinvariante für die allgemeine projective Gruppe von einer Variabeln ist, so erkennen wir, dass bei einer linearen Transformation der w_1, w_2, w_3, w_4, die die Form f ungeändert lässt, die beiden Ausdrücke $P_1(x)$, $P_2(x)$ entweder ungeändert bleiben oder in einander übergehen, je nachdem dieser Transformation die Formeln (a) oder (b) entsprechen. Bezeichnen wir mit $\widetilde{H}$ die Transformationsgruppe von (A_4) bei Zugrundelegung des Fundamentalsystems

$$w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4,$$

so sind demnach die Ausdrücke

$$P_1(x) + P_2(x), \quad P_1(x)\,P_2(x)$$

rationale Differentialfunctionen der w_1, w_2, w_3, w_4, die bei den Transformationen von $\widetilde{H}$ ungeändert bleiben.

Es genügen folglich die $P_1(x)$, $P_2(x)$ einer quadratischen Gleichung, deren Coefficienten sich aus den Coefficienten der

Differentialgleichung (A_4) und deren Ableitungen rational zusammensetzen.

Die Grössen ζ_1, ζ_2 können als die Integralquotienten zweier linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\text{(VI)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} = P_1(x)u, \\ \dfrac{d^2v}{dx^2} = P_2(x)v \end{cases}$$

aufgefasst werden, für welche (vergl. Nr. 180, S. 184)

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{d\zeta_1}{dx}}}, \quad u_2 = \zeta_1 u_1$$

beziehungsweise

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{d\zeta_2}{dx}}}, \quad v_2 = \zeta_2 v_1$$

Fundamentalsysteme darstellen.

Denken wir uns dann das Fundamentalsystem y_1, y_2, y_3, y_4 von (A_4) von vornherein so gewählt, dass

$$w_4 - w_2 = y_1, \quad w_1 - w_3 = y_2, \quad w_1 + w_3 = y_3, \quad w_4 + w_2 = y_4$$

ist und setzen wir

$$y_1 = \lambda u_1 v_1,$$

so ergeben die Gleichungen (V)

$$y_2 = \lambda u_2 v_1, \quad y_3 = \lambda v_2 u_1, \quad y_4 = \lambda v_2 u_2.$$

Wenn die w_1, w_2, w_3, w_4 eine Transformation von $\widetilde{H}$ **erfahren, so** verwandeln sich die beiden Systeme u_1, u_2 und v_1, v_2 **entweder in** lineare homogene Functionen ihrer selbst, oder u_1, u_2 **gehen in lineare** homogene Functionen der v_1, v_2 über und umgekehrt. **Die vier Producte**

$$u_1 v_1, \quad u_1 v_2, \quad u_2 v_1, \quad u_2 v_2$$

verwandeln sich also bei jeder Transformation von $\widetilde{H}$ **in lineare homogene Functionen ihrer selbst mit constanten Coefficienten. Es sind demnach** die Coefficienten der linearen Differentialgleichung **vierter Ordnung**

$$(\mathrm{A}_4) \qquad \frac{D(z,\, u_1 v_1,\, u_2 v_1,\, v_2 u_1,\, v_2 u_2)}{D(u_1 v_1,\, u_2 v_1,\, v_2 u_1,\, v_2 u_2)} = 0$$

rationale Differentialfunctionen der w_1, w_2, w_3, w_4, **die bei den Transformationen** der Gruppe $\widetilde{H}$ ungeändert bleiben, das heisst, **sie gehören** demselben Rationalitätsbereiche an wie die Coefficienten **von (A_4). Da** die Ausdrücke

$$u_1 v_1, \quad u_1 v_2, \quad u_2 v_1, \quad u_2 v_2$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (A_4) darstellen, geht diese Differentialgleichung aus (A_4) durch die Transformation

$$y = \varrho z$$

hervor, es ist demnach (vergl. Nr. 172, S. 145) ϱ in der Form

$$\varrho = e^{\int r(x)\,dx}$$

darstellbar, wo $r(x)$ eine Function bedeutet, die demselben Rationalitätsbereiche angehört, wie die Coefficienten von (A_4).

Ist umgekehrt ein gewisser Rationalitätsbereich festgelegt und bedeuten $P_1(x)$, $P_2(x)$ irgend zwei Functionen, die einer quadratischen Gleichung mit diesem Rationalitätsbereiche angehörigen Coefficienten genügen, so können wir die Differentialgleichung $(\overline{\mathrm{A}}_4)$ bilden, indem wir z. B.

$$z = u \cdot v$$

setzen und nach viermaliger Differentiation dieser Gleichung die u, v und deren Ableitungen mit Hülfe der Differentialgleichungen (VI) eliminiren. Die Coefficienten der Differentialgleichung (A_4) gehören dann dem Rationalitätsbereiche an, und ihre Integrale befriedigen eine homogene quadratische Relation mit nicht verschwindender Discriminante. Damit ist also der Fall 2a) erledigt, wenn die Discriminante der Form f von Null verschieden ist.

193. Ternäre quadratische Relation. Abwickelbare Fläche vierter Ordnung.

Bedeutet f eine quadratische Form, deren Discriminante

$$|a_{i\varkappa}| = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

ist, so lässt sich bekanntlich diese Form bei geeigneter Wahl des Fundamentalsystems in die Gestalt setzen

$$f = y_2^2 - y_1 y_3 = 0.$$

(Der Fall, wo die quadratische Form f ein Product von zwei linearen Factoren ist, kommt für uns nicht in Betracht, da die y_1, y_2, y_3, y_4 ein Fundamentalsystem bilden sollen.) Der Ausdruck $y_2^2 - y_1 y_3$ ist dann die Discriminante der quadratischen binären Form

$$\varphi = y_1 t^2 + 2 y_2 t s + y_3 s^2$$

und bleibt folglich bis auf einen Factor ungeändert, wenn auf die t, s eine lineare Substitution

$$\left.\begin{matrix}\alpha t+\beta s\\ \gamma t+\delta s\end{matrix}\right\}\quad \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$$

ausgeübt wird. Einer solchen linearen Substitution der t, s entspricht aber eine lineare homogene Substitution der y_1, y_2, y_3 mit constanten Coefficienten.

Wenn umgekehrt die y_1, y_2, y_3, y_4 eine lineare Substitution erfahren, welche die Form f mit einem constanten Factor multiplicirt,

$$\bar{y}_\varkappa=\sum_{i=1}^{4}\alpha_{\varkappa i}y_i \qquad (\varkappa=1,2,3,4),$$

so verwandelt sich (vergl. die Erörterungen im Falle 1)) f durch die Substitution

$$\bar{y}_\varkappa=\sum_{i=1}^{3}\alpha_{\varkappa i}y_i \qquad (\varkappa=1,2,3)$$

in sich selbst multiplicirt mit einer Constanten. Betrachten wir dann die beiden binären Formen

$$y_1t^2+2y_2ts+y_3s^2,$$
$$\bar{y}_1t^2+2\bar{y}_2ts+\bar{y}_3s^2,$$

so unterscheiden sich die Discriminanten derselben nur durch einen constanten Factor, die Formen sind also im Sinne der Invariantentheorie aequivalent und gehen durch eine lineare homogene Substitution

$$\left.\begin{matrix}\alpha t+\beta s\\ \gamma t+\delta s\end{matrix}\right\}\quad \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0,$$

deren Coefficienten von den y_1, y_2, y_3 unabhängig sind, in einander über.

Wenn also auf die y_1, y_2, y_3, y_4 eine Transformation der Gruppe H ausgeübt wird, so erfährt der Quotient

$$\zeta=\frac{t}{s}$$

eine gebrochene lineare Substitution, und es ist demnach

$$\varDelta\binom{\zeta}{x}=P(x)$$

eine Function, die demselben Rationalitätsbereiche angehört, wie die Coefficienten von (A_4).

Die Discriminante $y_2^2-y_1y_3$ der Form φ ist das Resultat der Elimination aus den Gleichungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial s}=0,$$

es ist demnach

$$\zeta = -\frac{y_2}{y_1} = -\frac{y_3}{y_2}.$$

Setzen wir also

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{d\zeta}{dx}}}, \quad u_2 = \zeta u_1,$$

so sind u_1, u_2 die Elemente eines Fundamentalsystems der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2u}{dx^2} = P(x)u,$$

und es ist

$$y_1 = \varrho u_1^2, \quad y_2 = \varrho u_1 u_2, \quad y_3 = \varrho u_2^2.$$

Die u_1^2, $u_1 u_2$, u_2^2 befriedigen (vergl. Nr. 185, S. 203) eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit dem Rationalitätsbereiche angehörigen Coefficienten; dieselbe geht also durch Multiplication der abhängigen Variabeln mit ϱ in eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung für y_1, y_2, y_3 über. Das Integral y_4 ergiebt sich dann nach dem auch im Falle 1) angedeuteten Verfahren durch Quadraturen.

Wir gehen an die Erledigung des Falles 2b)..

Wenn die Hesse'sche Covariante einer quaternären Form m^{ten} Grades

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^m F(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$$

mit der Form gleichzeitig verschwindet, so stellt die Gleichung

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$$

eine abwickelbare Fläche dar. Die Gleichung

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_\varkappa} \right| = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

lässt sich nämlich unter Benutzung der Gleichung

$$F(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = 0$$

in die Form setzen

$$\left(\frac{\partial^2 \eta_3}{\partial \eta_1 \partial \eta_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 \eta_3}{\partial \eta_1^2} \frac{\partial^2 \eta_3}{\partial \eta_2^2} = 0,$$

und dies ist die bekannte partielle Differentialgleichung, die zwischen den Cartesius'schen Coordinaten einer abwickelbaren Fläche bestehen muss.

Wenn insbesondere $m = 4$ und die Fläche

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$$

eine abwickelbare ist, so ist, wie Cayley gezeigt hat, die Hesse'sche

Covariante stets das Quadrat der Form selbst, und f lässt sich in die Gestalt setzen

$$f = y_1^2 y_4^2 - 6y_1 y_2 y_3 y_4 + 4y_1 y_3^3 + 4y_2^3 y_4 - 3y_2^2 y_3^2 = 0.$$

In diesem Falle ist also f nichts anderes als die Discriminante der binären cubischen Form

$$\varphi = y_1 t^3 + 3y_2 t^2 s + 3y_3 ts^2 + y_4 s^3,$$

und daraus erhellt sofort, dass die Form f keine von sich selbst wesentlich verschiedene Covariante besitzen kann, da jede Covariante von f eine Invariante von φ sein müsste und bekanntlich die Discriminante die einzige Invariante einer binären cubischen Form ist.

Transformirt man φ durch die Substitution

$$\text{(VII)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} t = \alpha t' + \beta s' \\ s = \gamma t' + \delta s' \end{array} \right\} \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

so verwandelt sich diese Form in

$$\varphi' = y_1' t^3 + 3y_2' t^2 s + 3y_3' ts^2 + y_4' s^3,$$

wo die y_1', y_2', y_3', y_4' mit den y_1, y_2, y_3, y_4 durch die **Transformationsrelationen** (vergl. Nr. 181, S. 186)

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{cases} y_1 = \alpha^3 y_1' + 3\alpha^2\gamma y_2' + 3\alpha\gamma^2 y_3' + \gamma^3 y_4', \\ y_2 = \alpha^2\beta y_1' + (2\beta\gamma + \alpha\delta)\alpha y_2' + (2\alpha\delta + \beta\gamma)\gamma y_3' + \gamma^2\delta y_4', \\ y_3 = \alpha\beta^2 y_1' + (2\alpha\delta + \beta\gamma)\beta y_2' + (2\beta\gamma + \alpha\delta)\delta y_3' + \gamma\delta^2 y_4', \\ y_4 = \beta^3 y_1' + 3\beta^2\delta y_2' + 3\beta\delta^2 y_3' + \delta^3 y_4' \end{cases}$$

verknüpft sind, und es ist

$$f(y_1', y_2', y_3', y_4') = (\alpha\delta - \beta\gamma)^6 f(y_1, y_2, y_3, y_4).$$

Die letztere Gleichung ist die Eliminationsresultante der Gleichungen (VIII), somit die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen derselben. D. h. wenn sich die Form f durch eine lineare Transformation der y_1, y_2, y_3, y_4 mit einer Constanten c multiplicirt, so muss diese Transformation die Gestalt (VIII) haben, wo dann

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \sqrt[3]{c} = \varepsilon$$

zu nehmen ist.

Also muss in unserem Falle die **Transformationsgruppe** H der Differentialgleichung eine Untergruppe der viergliedrigen algebraischen, durch die Gleichungen (VIII) dargestellten Gruppe sein.

Wenden wir auf die y_1, y_2, y_3, y_4 eine Transformation der Gruppe H an, so verwandeln sich demnach t, s in lineare homogene Functionen ihrer selbst, und zwar, wenn die y_1, y_2, y_3, y_4 die Substitution (VIII) erfahren, in

$$\text{(IX)} \qquad t' = \frac{-\delta t + \beta s}{\varepsilon}, \quad s' = \frac{\gamma t - \alpha s}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

Die Gleichung $f = 0$ ist die Eliminationsresultante der Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0,$$

aus denselben folgt:

$$\frac{t^2}{s^2} = \frac{y_4 y_2 - y_3^2}{y_1 y_3 - y_2^2}, \quad \frac{2ts}{s^2} = \frac{y_2 y_3 - y_1 y_4}{y_1 y_3 - y_2^2},$$

wir können also setzen

$$\begin{cases} u_1 = \varrho s^2 = y_1 y_3 - y_2^2, \\ u_2 = \varrho s t = \frac{1}{2}(y_2 y_3 - y_1 y_4), \\ u_3 = \varrho t^2 = y_4 y_2 - y_3^2. \end{cases}$$

Nun ist aber die Hesse'sche Covariante der Form φ

$$u_1 t^2 - u_2 ts + u_3 s^2,$$

dieselbe muss sich, wenn t, s die Substitution (VII) erfahren, mit ε^2 multipliciren. Daraus ergiebt sich leicht, dass, wenn auf die y_1, y_2, y_3, y_4 die Transformation (VIII) der Gruppe H ausgeübt wird, die u_1, u_2, u_3 die Substitution

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2}(\alpha^2 u_1 - 2\alpha\gamma u_2 + \gamma^2 u_3), \\ \frac{1}{\varepsilon^2}((\alpha\delta + \beta\gamma) u_2 - \alpha\beta u_1 + \gamma\delta u_3), \\ \frac{1}{\varepsilon^2}(\beta^2 u_1 - 2\beta\delta u_2 + \delta^2 u_3) \end{cases}$$

erfahren. Die u_1, u_2, u_3 genügen folglich einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung

$$-\frac{D(u, u_1, u_2, u_3)}{D(u_1, u_2, u_3)} = 0,$$

deren Coefficienten demselben Rationalitätsbereiche angehören, wie die Coefficienten von (A_4), und zwischen den u_1, u_2, u_3 besteht die Relation

$$u_2^2 - 4u_1 u_3 = 0.$$

Im Sinne des allgemeinen Satzes der Nr. 186 (S. 210) ist das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung dritter Ordnung als binäre

Form zweiten Grades der t, s darstellbar, welche ihrerseits wieder ei linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit dem Rationaliti bereiche angehörigen Coefficienten genügen, wie aus den Gleichun (IX) unmittelbar zu erkennen ist.

Man findet aus den entwickelten Formeln, dass ϱ den Werth E haben muss, es ist also in dem betrachteten Falle

$$y_1 y_3 - y_4^2 = s^2, \quad \frac{1}{2}(y_2 y_3 - y_1 y_4) = ts, \quad y_4 y_2 - y_3^2 = t^2,$$

die Integration der Differentialgleichung (A_4) ist demnach auf Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung auf Quadraturen zurückgeführt.

Bemerken wir noch, dass die Gleichungen

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0$$

die Wendekante der abwickelbaren Fläche vierter Ordnung $f = 0$ d stellen.

Der Fall 2c) kann unter den in Bezug auf die y_1, y_2, y_3, y_4 fe zuhaltenden Voraussetzungen nicht eintreten.

Nachdem auf diese Weise die „Ausnahmefälle“ erledigt si knüpfen wir an die in der Nummer 191 durchgeführten Untersuchung an, um aus denselben einige bemerkenswerthe Folgerungen zu zieh·

Zweites Kapitel.

194. Differentialgleichungen, deren unabhängige Variable eine eindeutige Function des Ortes der Integralcurve ist.

Wenn eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung algebraisch integrirbar ist, oder auch wenn nur die Integralquotienten $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ algebraische Functionen der unabhängigen Variabeln x sind, so ist jedenfalls die Anzahl der Werthe der unabhängigen Variabeln, für welche auf geeigneten Wegen fortgesetzt die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ dieselben Werthe annehmen wie für x, eine endliche, und die Gesammtheit dieser Werthe $x_1, x_2, \cdots x_{\nu-1}$ genügt einer algebraischen Gleichung mit in x rationalen Coefficienten.

Der in der Nr. 191 (S. 232) für die Differentialgleichung vierter Ordnung (A_4) bewiesene Satz lenkt unsere Aufmerksamkeit auf den Umstand, dass es auch lineare Differentialgleichungen (A) geben kann, deren Integralquotienten von x nicht algebraisch abhängen, und für welche dennoch die Gesammtheit der Stellen der unabhängigen Variabeln, an denen auf geeigneten Wegen fortgesetzt die Integralquotienten dieselben Werthe annehmen wie für x, einer algebraischen Gleichung mit in x rationalen Coefficienten Genüge leisten. Das heisst mit anderen Worten: Wenn wir uns die Integralcurve $\mathfrak{C}$ der Differentialgleichung (A) in der Form

$$\eta_\varkappa = \eta_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n-1)$$

dargestellt denken, und wir suchen diejenigen Werthe des Parameters x, für welche derselbe Curvenpunkt zum Vorschein kommt, wie für den bestimmten Werth x dieses Parameters, so befriedigen diese Werthe $x_1, x_2, \cdots x_n$ eine algebraische Gleichung mit in x rationalen Coefficienten. Wir verweilen etwas ausführlicher bei der Betrachtung dieser Art von Differentialgleichungen, um schon hier eine Vorstellung von der fundamentalen Wichtigkeit derselben für unsere Theorie gewinnen zu können.

Wir setzen voraus, dass die betrachtete Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0$$

der Fuchs'schen Classe angehört.

Bilden wir nach dem Vorgange von Herrn Fuchs, unter α eine unbestimmte Constante verstehend, den Ausdruck

(9) $$t = (\alpha - x)(\alpha - x_1)(\alpha - x_2)\cdots(\alpha - x_{\nu-1}) = \varphi(x, \alpha),$$

so erleiden, wenn x irgend einen geschlossenen Umlauf vollzieht, die $x_1, x_2, \cdots x_{\nu-1}$ nur eine Permutation, und da überdies diese Grössen von x algebraisch abhängen, so ist t eine algebraische Function von x, die bei allen Umläufen ungeändert bleibt, d. h. t oder $\varphi(x, \alpha)$ ist eine rationale Function von x.

Betrachten wir die $x_\varkappa$ als Functionen von x,

$$x_\varkappa = f_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu - 1),$$

so können sich die Ausdrücke

$$x_i, \quad f_\varkappa(x_i) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu - 1)$$

von den Grössen

$$x, x_1, x_2, \cdots x_{\nu-1}$$

nur durch die Reihenfolge unterscheiden, da zufolge der Definition der $x_1, x_2, \cdots x_{\nu-1}$ nur für diese Werthe der unabhängigen Variabeln derselbe Punkt der Curve $\mathfrak{C}$ zum Vorschein kommen sollte wie für x. Es ist folglich

(10) $$\varphi(x, \alpha) = \varphi(x_\varkappa, \alpha) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu - 1).$$

Berechnen wir aus der Gleichung (9) x als Function von t, so gehören zu einem willkürlichen Werthe von t genau die Werthe

$$x, x_1, x_2, \cdots x_{\nu-1},$$

denn für einen von diesen Werthen verschiedenen Werth x' kann die Gleichung

$$\varphi(x, \alpha) = \varphi(x', \alpha)$$

wegen der Unbestimmtheit von α nicht erfüllt werden. Vollzieht also t irgend einen geschlossenen Umlauf in seiner Ebene, so beschreibt x einen Weg, der in irgend einem der Punkte

$$x, x_1, x_2, \cdots x_{\nu-1}$$

endet.

Betrachten wir nun die Integralquotienten $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ der Differentialgleichung (A) als Functionen von t.

Wenn t geschlossene Umläufe vollzieht, so hat x Wege zu beschreiben, die sich aus geschlossenen Umläufen von x und aus solchen Wegen zusammensetzen, längs denen fortgesetzt die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ dieselben Werthe annehmen wie für x. Bezeichnen wir also durch ϑ die Gruppe der projectiven Substitutionen, welche die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ durch alle möglichen Umläufe von x erfahren, so erleiden die Integral-

quotienten $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ bei einem geschlossenen Umlaufe von t nur eine Substitution dieser Gruppe ϑ. Ueberdies sind die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ als Functionen von t betrachtet überall bestimmt, da dieselben als Functionen von x keine Unbestimmtheitsstellen besitzen und t eine rationale Function von x ist.

Setzen wir nun (vergl. Nr. 179, S. 175, Gleichungen (2), (3))

$$(11) \qquad \begin{cases} \mathfrak{y}_1 = \left\{\dfrac{1}{D(\eta_1', \eta_2', \cdots \eta_{n-1}')}\right\}^{\frac{1}{n}}, \\ \mathfrak{y}_\varkappa = \mathfrak{y}_1 \eta_{\varkappa-1} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n), \end{cases}$$

wo $\eta_\varkappa'$ die Ableitung von $\eta_\varkappa$ nach t bedeutet und

$$D(\eta_1', \eta_2', \cdots \eta_{n-1}') = \left|\frac{d^i \eta_\varkappa}{dt^i}\right| \qquad (\varkappa, i = 1, 2, \cdots n-1)$$

zu nehmen ist, so folgt aus der Gleichung (12) der Nr. 22 (Bd. I, S. 60), dass

$$D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n) = \left|\frac{d^{i-1}\mathfrak{y}_\varkappa}{dt^{i-1}}\right|_{(i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)} = \mathfrak{y}_1^n D(\eta_1', \eta_2', \cdots \eta_{n-1}') = 1$$

ist.

Sei dann

$$\bar{\eta}_{\varkappa-1} = \frac{\alpha_{\varkappa 1} + \alpha_{\varkappa 2}\eta_1 + \cdots + \alpha_{\varkappa n}\eta_{n-1}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}\eta_1 + \cdots + \alpha_{1n}\eta_{n-1}} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n)$$

die einem Umlaufe von t entsprechende projective Substitution der Gruppe ϑ, und bezeichnen wir durch $\bar{\mathfrak{y}}_\varkappa$ dasjenige, was aus $\mathfrak{y}_\varkappa$ wird, wenn t jenen Umlauf vollzieht, so ist offenbar

$$\bar{\mathfrak{y}}_\varkappa = M(t)(\alpha_{\varkappa 1}\mathfrak{y}_1 + \alpha_{\varkappa 2}\mathfrak{y}_2 + \cdots + \alpha_{\varkappa n}\mathfrak{y}_n),$$

wo $M(t)$ eine noch zu bestimmende Function von t bedeutet. Nun ist aber zufolge der bereits oben benutzten Gleichung (12) der Nr. 22 (Bd. I, S. 60)

$$D(\bar{\mathfrak{y}}_1, \bar{\mathfrak{y}}_2, \cdots \bar{\mathfrak{y}}_n) = [M(t)]^n \,|\alpha_{i\varkappa}|\, D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

und da $D(\bar{\mathfrak{y}}_1, \bar{\mathfrak{y}}_2, \cdots \bar{\mathfrak{y}}_n)$ den Werth bedeutet, in welchen sich $D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n)$ durch den in Rede stehenden Umlauf von t verwandelt, also auch constant und zwar gleich Eins ist, so haben wir

$$M(t) = \sqrt[n]{\frac{1}{|\alpha_{i\varkappa}|}} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

d. h. die durch die Gleichungen (11) definirten Functionen

$$\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$$

von t erleiden, wenn t einen geschlossenen Umlauf vollzie eine unimodulare, lineare homogene Substitution. Die sammtheit dieser, allen möglichen Umläufen von t entsprechenden S stitutionen bildet eine lineare homogene unimodulare Gruppe $\bar{\Theta}$, mit der projectiven Gruppe ϑ isomorph ist.

Ferner ist sofort einzusehen, dass die Functionen $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots$ von t keine Unbestimmtheitsstellen besitzen können, und daraus fo endlich, dass die Coefficienten der Differentialgleichung n^{ter} Ordnu

$$(12)\quad (-1)^n \frac{D(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n)}{D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n)} = \frac{d^n \mathfrak{y}}{dt^n} + r_2(t) \frac{d^{n-2}\mathfrak{y}}{dt^{n-2}} + \cdots + r_n(t)\mathfrak{y} =$$

für welche $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ ein Fundamentalsystem darstellt, eindeut Functionen von t sind, die sich überall bestimmt verhalten, d. h. die Coefficienten sind rationale Functionen von t, und die Dif rentialgleichung (12) gehört zur Fuchs'schen Classe. I Gruppe Θ ist dann im allgemeinen die Monodromiegruppe der Di rentialgleichung (12).

Da die Integralquotienten von (12) mit den Integralquotien von (A) übereinstimmen, gehen diese beiden Differentialgleichun durch die Transformation

$$(13)\qquad y = \lambda \mathfrak{y}, \quad t = \varphi(x, \alpha)$$

aus einander hervor, wo (vergl. Nr. 181, S. 189, Gleichung (10))

$$(14)\qquad \lambda = e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx} \left(\frac{dt}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}(n-1)}$$

gefunden wird. Bemerkenswerth ist der Umstand, dass die Different gleichung mit rationalen Coefficienten (A) durch eine Transformati in welcher die unabhängige Variable x nicht rational durch die n unabhängige Variable t darstellbar ist, dennoch in eine Different gleichung (12) mit rationalen Coefficienten übergeführt wird.

Die Differentialgleichung (12) erfreut sich nun einer über wichtigen Eigenschaft.

Es giebt nämlich, wenn t ein willkürlicher Werth unabhängigen Variabeln ist, keinen davon verschieder Werth t_1, für welchen derselbe Punkt der Integralcurve zum Vorschein kommt, d. h. für den auf geeigneten We fortgesetzt, die Integralquotienten $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ dieselt Werthe annehmen, wie für t.

Würde nämlich jeder Integralquotient von (12) in t_1 densel Werth annehmen wie in t, und bedeuten $x, x_1, x_2, \cdots x_{\nu-1}$ die Wei von x, die vermöge der Gleichung

$$t = \varphi(x, \alpha)$$

zu t gehören, ebenso $x', x_1', x_2', \cdots x_{\nu-1}'$ die Werthe von x, die vermöge derselben Gleichung zu t_1 gehören, so kann, wenn t_1 von t verschieden ist, keines der $x', x_1', \cdots x_{\nu-1}'$ mit einem der $x, x_1, \cdots x_{\nu-1}$ übereinstimmen, weil $\varphi(x, \alpha)$ eine rationale, also eindeutige Function von x ist. Es würde demnach für die 2ν Werthe $x', x_1', \cdots x_{\nu-1}'$ und $x, x_1, \cdots x_{\nu-1}$ ein und derselbe Punkt der Integralcurve $\mathfrak{C}$ zum Vorschein kommen müssen, was der Definition von t widerstreitet.

Fassen wir also in der Differentialgleichung (12) die unabhängige Variable t als Function des Ortes der Integralcurve $\mathfrak{C}$ auf, so ist diese Function eine *eindeutige*, und zwar hat dieselbe die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn die Integralcurve durch eine Collineation der Gruppe ϑ in sich selbst transformirt wird.

195. Algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen. Satz von Fuchs.

Um die in der vorhergehenden Nummer dargelegten Verhältnisse an einem einfachen Beispiele zu erläutern, denken wir uns, die Differentialgleichung (A) habe algebraische Integrale.

Dann ist also zufolge der Gleichungen (13), (14), wo jetzt λ die Wurzel aus einer rationalen Function von x bedeutet, auch die Differentialgleichung (12) algebraisch integrirbar, und die in diesem Falle algebraische Integralcurve $\mathfrak{C}$ wird in homogenen Coordinaten dargestellt durch die zwischen den Integralen $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ bestehenden homogenen Relationen mit constanten Coefficienten

(15) $$g_i(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots),$$

deren Anzahl nicht kleiner ist als $n - 2$. Es ist dann in (12) die unabhängige Variable t eine eindeutige Function der durch die Gleichungen

$$g_i(1, \eta_1, \cdots \eta_{n-1}) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3 \cdots)$$

mit einander verknüpften Grössen $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$, also in unserem Falle, wo diese Grössen von t algebraisch abhängen, eine rationale Function derselben. Diese rationale Function bleibt ungeändert, wenn auf die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ eine Substitution der (endlichen) projectiven Gruppe ϑ ausgeübt wird, die mit der Monodromiegruppe $\overline{\Theta}$ von (12) isomorph ist. Wir haben also zunächst den wichtigen, im Wesentlichen von Herrn Fuchs herrührenden Satz:

Wenn eine lineare Differentialgleichung (A) mit rationalen Coefficienten algebraisch integrirbar ist, so kann man von derselben durch die Transformation

$$y = \lambda \mathfrak{y}, \quad t = \varphi(x),$$

wo λ die Wurzel aus einer rationalen Function, $\varphi(x)$ eine rationale Function bedeutet, zu einer aequivalenten Differentialgleichung für $\mathfrak{y}$ als Function von t übergehen, in welcher die unabhängige Variable t als rationale Function der Integralquotienten darstellbar ist.

Die rationale Function der $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$, welche gleich t ist, braucht im allgemeinen nicht die Eigenschaft zu haben, bei den projectiven Substitutionen der Gruppe ϑ formal, d. h. wenn man die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ als unabhängige Variable auffasst, ungeändert bleiben. Man kann dieselbe, indem man Zähler und Nenner mit einer geeigneten Potenz von $\mathfrak{y}_1$ multiplicirt, auf die Form bringen

$$t = \frac{g(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n)}{h(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n)},$$

wo g, h ganze homogene Functionen desselben Grades der $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ sind. Betrachten wir dann das System von homogenen Gleichungen

$$(16) \qquad \begin{cases} g(\mathfrak{y}_1, \cdots \mathfrak{y}_n) - t h(\mathfrak{y}_1, \cdots \mathfrak{y}_n) = 0, \\ g_i(\mathfrak{y}_1, \cdots \mathfrak{y}_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

und denken uns in demselben auf die $\mathfrak{y}_1, \cdots \mathfrak{y}_n$ eine Substitution der Gruppe $\overline{\Theta}$ ausgeübt, so muss dieses Gleichungssystem in ein ihm völlig aequivalentes übergehen, welches ebenso wie (16) die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ als Functionen von t vollständig definirt.

Wir wollen die linken Seiten des Gleichungssystems (16) als Functionen der $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ betrachten und dieselben als die Elemente eines Modulsystems M im Sinne von Kronecker auffassen. Die Variable t spielt dann die Rolle eines Parameters, und das Modulsystem M oder das Gleichungssystem (16) ist von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Stufe in der durch die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ bestimmten $(n-1)$-fachen Mannigfaltigkeit R_{n-1}.

Wir denken uns nun dieses Modulsystem M nach dem von Kronecker in der „Festschrift etc." dargelegten auf der Theorie der Elimination beruhenden Verfahren in seine irreductiblen Theiler zerlegt. Diese Theiler stellen, gleich Null gesetzt, Gebilde verschiedener Stufen in der $(n-1)$-fachen Mannigfaltigkeit R_{n-1} dar; die Irreductibilität eines solchen Theilers $(n-k)^{\text{ter}}$ Stufe giebt sich darin kund, ... kein Theil des durch denselben dargestellten Gebildes, welch

selbst ein Gebilde $(n-k)^{\text{ter}}$ Stufe ist, durch ein System von algebraischen Gleichungen definirt werden kann.

Für uns kommen dann nur diejenigen Theiler in Betracht, welche Gebilde $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe, also Systeme isolirter Punkte darstellen.

Einer und nur einer dieser Theiler P verschwindet identisch, wenn wir die $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ durch die gleichbezeichneten Lösungen der Differentialgleichung (12) ersetzen. Wir können denselben, wie aus dem Kronecker'schen Verfahren für seine Herstellung direct zu übersehen ist, durch ein System von höchstens n homogenen ganzen Functionen vom gleichen Grade der $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ darstellen, deren Coefficienten den Parameter t nur linear enthalten. Diese n Functionen bestimmen, gleich Null gesetzt, ein System von Punkten $\eta_1(t), \eta_2(t), \cdots \eta_{n-1}(t)$, welches zufolge der Irreductibilität des Theilers P so beschaffen ist, dass kein Theil dieses Punktesystems durch ein System von algebraischen Gleichungen definirt werden kann.

Wenden wir auf die $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ eine Substitution der Gruppe $\overline{\Theta}$ an, so verwandelt sich der irreductible Theiler P des Modulsystems M in einen offenbar ebenfalls irreductiblen Theiler P' desselben Modulsystems, und die Elemente von P' verschwinden ebenfalls identisch, wenn die $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ durch die gleichbezeichneten Lösungen von (12) ersetzt werden. Daraus folgt, dass P' mit P aequivalent sein muss; es können also die Elemente von P' nur lineare homogene Combinationen mit constanten Coefficienten von den Elementen von P sein.

Wir haben somit n homogene ganze Functionen vom gleichen Grade der $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$, die den Parameter t linear enthalten und die in lineare homogene Combinationen ihrer selbst übergehen, wenn die $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ eine Substitution der Gruppe $\overline{\Theta}$ erfahren. Wir können alsdann den Theiler P auch so darstellen, dass nur in einer der homogenen Functionen der Parameter t wirklich auftritt, und erhalten also schliesslich ein Gleichungssystem von der Form

$$\begin{gathered} f_1(\mathfrak{y}_1, \cdots \mathfrak{y}_n) + t f_2(\mathfrak{y}_1, \cdots \mathfrak{y}_n) = 0, \\ f_3(\mathfrak{y}_1, \cdots \mathfrak{y}_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{n+1}(\mathfrak{y}_1, \cdots \mathfrak{y}_n) = 0, \end{gathered}$$

welches so beschaffen ist, dass sich die $(n+1)$ ganzen homogenen Functionen $f_1, f_2, \cdots f_{n+1}$ bei jeder Substitution der Gruppe $\overline{\Theta}$ in lineare homogene Combinationen ihrer selbst verwandeln, und welches, nach den $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ aufgelöst, genau die Integralquotienten der Differentialgleichung (12) als Functionen von t und nur diese ergiebt.

Da die Anzahl der Substitutionen von $\overline{\Theta}$ eine endliche ist, so kar
man von den homogenen Functionen $f_1, f_2, \cdots f_{n-1}$ leicht zu solche
übergehen, die sich bei Anwendung der Substitutionen von $\overline{\Theta}$ entwed
gar nicht verändern oder nur mit constanten Factoren multiplicire
wir nennen dieselben die zur Gruppe $\overline{\Theta}$ gehörigen invariante
Formen. Durch Quotientenbildung ergeben sich aus diesen invariant
Formen rationale Functionen der $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$, die bei den Tra
formationen der projectiven Gruppe ϑ formal ungeändert bleiben, w
nennen diese invariante Functionen. Eine dieser rationalen Fu
tionen erhält, wenn man darin die $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ durch die gleic
bezeichneten Integralquotienten der Differentialgleichung (12) erset
den Werth t, die übrigen verschwinden als Functionen von t identisc

Wenn die Differentialgleichung (A) nicht algebraisch integrirb
ist, so hat es seine Schwierigkeit, von der die unabhängige Variable
der Differentialgleichung (12) darstellenden eindeutigen Function d
Integralquotienten $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$, die sich bei den Substitution
der projectiven Gruppe ϑ nicht verändert, zu einer eindeutigen Fu
tion der als willkürliche Variable gedachten $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ üb
zugehen, die bei den Substitutionen von ϑ (formal) ungeändert blei
Diese Schwierigkeit fällt weg, wenn die Differentialgleichung (A) v
der zweiten Ordnung ist, und dieser Fall ist auch der einzige, i
welchem bisher concrete Ergebnisse in der hier angedeuteten Richtun
erzielt worden sind. Wir wollen uns daher im Folgenden zunäch
mit den Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschäftigen und dan
nur an dem Beispiele der hyperelliptischen Functionen die Schwierig
keiten hervorzuheben suchen, die sich der Behandlung von Differential
gleichungen höherer Ordnung entgegenstellen.

196. Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Umkehrungsfunctio des Integralquotienten. Nothwendige Bedingungen für die Eindeutigkeit der Umkehrungsfunction.

Der Ausgangspunkt, den wir für die Formulirung der Frage nac
Differentialgleichungen von der in der letzten Nummer betrachtete
Art gewählt hatten, lässt sich für den Fall $n = 2$ nicht mehr fest
halten, denn die Elemente eines Fundamentalsystems einer lineare
Differentialgleichung zweiter Ordnung können keine ganze homoge
Gleichung mit constanten Coefficienten befriedigen. Auch der Begri
der Integralcurve verliert für $n = 2$ im Wesentlichen seine Bedeutun
(vergl. Nr. 180, S. 183), wir formuliren daher die Frage direct dahi

Giebt es homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(A_2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + p_1\frac{dy}{dx} + p_2 y = 0$$

der Fuchs'schen Classe, für welche die Anzahl der Werthe der unabhängigen Variablen, in denen auf geeigneten Wegen fortgesetzt der Quotient η der Elemente y_1, y_2 eines Fundamentalsystems denselben Werth annimmt wie für x, eine endliche ist, und für welche die Gesammtheit dieser Werthe einer algebraischen Gleichung mit in x rationalen Coefficienten Genüge leistet?

Die Ergebnisse der Nr. 194 (S. 244 ff.) lehren uns, dass, wenn die Differentialgleichung (A_2) die geforderte Eigenschaft besitzt, stets eine Transformation

$$y = \lambda\mathfrak{y}, \quad t = \varphi(x)$$

angegeben werden kann, in welcher $\varphi(x)$ eine rationale Function und (vergl. Gleichung (14), Nr. 194, S. 246)

$$\lambda = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx}\left(\frac{dt}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

ist, und durch die unsere Differentialgleichung (A_2) in eine Differentialgleichung

$$(\mathfrak{A}_2) \qquad \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} = p(t)\mathfrak{y}$$

übergeht, in welcher t eine eindeutige Function des Quotienten η zweier Fundamentalintegrale

$$\mathfrak{y}_1 = y_1\frac{1}{\lambda}, \quad \mathfrak{y}_2 = y_2\frac{1}{\lambda}$$

ist. Wir können jetzt η direct als eine unabhängige Variable auffassen, indem der Werthevorrath der Function $\eta(t)$ von t ein Continuum von derselben Dimension bildet, wie das der unbeschränkt veränderlichen Grösse η, wir können aber im Allgemeinen nicht η als unbeschränkt veränderlich betrachten, sondern müssen, wenn wir t als Function von η studiren, die Variabilität von η eben auf jenes Continuum einschränken, welches durch den Werthevorrath der Function $\eta(t)$ von t bestimmt wird.

Im Sinne der für die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung bisher festgehaltenen Vorstellungsweise, vermöge deren die Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ als homogene Punktcoordinaten einer complexen $(n-1)$-fachen ebenen Mannigfaltigkeit gedeutet wurden, müssten wir das Gebiet von η als das einer geraden Linie ansehen. Aber ebenso wie es in der Theorie der algebraischen Functionen einer complexen Variabeln für tiefergehende Untersuchungen zweckmässiger ist, eine algebraische Gleichung

zwischen zwei complexen Veränderlichen nicht als eine ebene zu deuten, sondern beide Variable als complexe Grössen durch Punkte einer Ebene darzustellen, so wird es auch in unseren vorzuziehen sein, den Bereich von η als die Ebene einer com Variabeln, beziehungsweise als einen Theil dieser Ebene aufzu je nachdem der Werthevorrath der Function $\eta(t)$ von t alle com Werthe oder nur ein beschränktes Continuum derselben erfüllt.

Denken wir uns nun jene eindeutige Function von η, wel unabhängige Variable t darstellt,

$$t = \varphi(\eta),$$

so erscheint dieselbe als **Umkehrung** der Function $\eta(t)$. I sammtheit der Werthe des Integralquotienten η, die zu einem der unabhängigen Variabeln gehören, geht aus einem dieser η- hervor, indem man auf η die Substitutionen der projectiven Gr anwendet, die mit der Monodromiegruppe $\overline{\Theta}$ der Differentialgle $(\mathfrak{A}_2)$ isomorph ist, und zwar wissen wir, dass der identische stitution von ϑ nur die Substitutionen

$$\bar{\mathfrak{y}}_\varkappa = \pm \mathfrak{y}_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

der Gruppe $\overline{\Theta}$ entsprechen können (Nr. 180, S. 179).

Die eindeutige Function $\varphi(\eta)$ hat also die Eigenschaft, d denselben Werth annimmt, wenn auf η eine Substitution der tiven Gruppe ϑ angewandt wird, und dass auch umgekehrt, we

$$\varphi(\bar{\eta}) = \varphi(\eta)$$

ist, der Werth $\bar{\eta}$ aus η nothwendig durch eine Operation der Gr hervorgehen muss. Wir wollen zunächst einige nothwendige ungen dafür aufzustellen suchen, dass die Differentialgleichung (Eigenschaft habe, dass ihr Integralquotient $\eta(t)$ zu einer eind Umkehrungsfunction Veranlassung giebt.

Sei $t = t_0$ eine reguläre Stelle der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_2$ ist in der Umgebung dieser Stelle das Fundamentalsystem $\mathfrak{y}_1$ der Form

$$\mathfrak{y}_1 = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(t - t_0) + \varepsilon_2(t - t_0)^2 + \cdots,$$
$$\mathfrak{y}_2 = \delta_0 + \delta_1(t - t_0) + \delta_2(t - t_0)^2 + \cdots$$

darstellbar, und es können, da die Determinante

$$D(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2) = \mathfrak{y}_1 \frac{d\mathfrak{y}_2}{dt} - \mathfrak{y}_2 \frac{d\mathfrak{y}_1}{dt}$$

eine von Null verschiedene Constante ist, von den vier Grösse

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1; \quad \delta_0, \delta_1; \quad \varepsilon_0, \delta_0; \quad \varepsilon_1, \delta_1$$

nicht beide Grössen eines Paares gleichzeitig verschwinden. Es ist folglich allemal eine lineare Function von η

$$\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}, \quad \alpha\delta-\beta\gamma \neq 0,$$

in der Form

$$\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta} = \gamma_1(t-t_0)+\gamma_2(t-t_0)^2+\cdots$$

darstellbar, wo γ_1 von Null verschieden ist, und aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass

$$t = t_0 + \beta_1 \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta} + \beta_2 \left(\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}\right)^2 + \cdots$$

sein muss. Also ist t in einer gewissen Umgebung der durch die Gleichung

$$\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta} = 0$$

bestimmten Stelle η eindeutig.

Sei ferner $t = a$ eine singuläre Stelle von $(\mathfrak{A}_2)$, und seien r_1, r_2 die der Grösse ihrer realen Theile nach geordneten Wurzeln der zu a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung. Möge ferner

$$(1) \qquad \begin{cases} z_1 = (t-a)^{r_1}\mathfrak{P}_1(t\,|\,a), \\ z_2 = (t-a)^{r_2}\mathfrak{P}_2(t\,|\,a) + Az_1\log(t-a), \end{cases}$$

wo $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ nach positiven ganzen Potenzen von $t-a$ fortschreitende Reihen, A eine Constante bedeutet, das zu $t=a$ gehörige canonische Fundamentalsystem (Nr. 54, Bd. I, S. 193) darstellen, welches mit $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ durch die Beziehungen

$$(2) \qquad \left.\begin{cases} z_1 = \alpha\mathfrak{y}_1 + \beta\mathfrak{y}_2 \\ z_2 = \gamma\mathfrak{y}_1 + \delta\mathfrak{y}_2 \end{cases}\right\}, \quad \alpha\delta-\beta\gamma \neq 0,$$

verknüpft ist. Da in der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_2)$ der Coefficient der ersten Ableitung gleich Null ist, muss

$$r_1 + r_2 = 1$$

sein, und daraus folgt zunächst, dass die Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_2)$ keinen ausserwesentlich singulären Punkt besitzen kann.

Wenn die Differenz $r_1 - r_2$, deren realer Theil zufolge der Voraussetzung nicht negativ ist, keine ganze Zahl ist, so ist die Constante A in dem Ausdrucke für z_2 gleich Null, und beide Potenzreihen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ haben im Punkte $t=a$ einen nicht verschwindenden Werth. Wir haben folglich

$$\zeta = \frac{z_1}{z_2} = (t-a)^{r_1-r_2}(\delta_0 + \delta_1(t-a) + \delta_2(t-a)^2 + \cdots),$$

wo δ_0 von Null verschieden ist, und

$$\zeta^{\frac{1}{r_1-r_2}} = (t-a)(\varepsilon_0 + \varepsilon_1(t-a) + \cdots),$$

woselbst

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1(t-a) + \cdots = \{\delta_0 + \delta_1(t-a) + \cdots\}^{\frac{1}{r_1-r_2}}$$

gesetzt wurde. Hieraus ergiebt sich durch Umkehrung

$$t-a = \beta_1 \zeta^{\frac{1}{r_1-r_2}} + \beta_2 \zeta^{\frac{2}{r_1-r_2}} \cdots; \quad \beta_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}.$$

Da zufolge der Gleichungen (2)

(3) $$\zeta = \frac{\alpha+\beta\eta}{\gamma+\delta\eta}$$

ist, so verhält sich t in der Umgebung der durch die Gleichung

$$\frac{\alpha+\beta\eta}{\gamma+\delta\eta} = 0$$

bestimmten Stelle von η dann und nur dann eindeutig, wenn

$$\frac{1}{r_1-r_2} = g$$

eine positive ganze Zahl ist. D. h. wenn t eine eindeutige Function von η sein soll, so muss für einen singulären Punkt a, wo die Differenz $r_1 - r_2$ nicht ganzzahlig ist, der reciproke Werth dieser Differenz eine ganze Zahl sein.

Wenn $r_1 - r_2$ eine ganze Zahl

$$r_1 - r_2 = m$$

ist, so kann A von Null verschieden sein.

Sei zunächst $m = 0$, also

$$r_1 = r_2 = \frac{1}{2},$$

dann ist das Auftreten von Logarithmen unvermeidlich (Nr. 50, Bd. I, S. 174) und da z_1 zum Exponenten r_1 gehören soll, ist

$$\mathfrak{P}_1(a\,|\,a) \neq 0, \quad A \neq 0.$$

Wir erhalten somit die Entwickelung

$$\frac{1}{A\zeta} = \delta_0 + \delta_1(t-a) + \delta_2(t-a)^2 + \cdots + \log(t-a),$$

also, wenn wir von den Logarithmen zu den Numeris übergehen,

$$e^{\frac{1}{A\zeta}} = (t-a)\{\varepsilon_0 + \varepsilon_1(t-a) + \varepsilon_2(t-a)^2 + \cdots\}, \quad \varepsilon_0 \neq 0,$$

woraus sich

$$t-a = \mathfrak{P}\left(e^{\frac{1}{A\zeta}}\right)$$

ergiebt, wo $\mathfrak{P}$ eine gewöhnliche Potenzreihe andeutet. Nun ist aber, wenn β von Null verschieden ist,

$$(4)\qquad \frac{1}{A\zeta} = \frac{1}{A}\frac{\gamma+\delta\eta}{\alpha+\beta\eta} = -\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{A\beta^2}\left\{\frac{1}{\eta+\frac{\alpha}{\beta}} - \frac{\beta\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}\right\},$$

wir erhalten also

$$(5)\qquad t-a = \mathfrak{P}\left[e^{-\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{A\beta}\frac{1}{\alpha+\beta\eta}}\right],$$

und für $\beta = 0$

$$(5a)\qquad t-a = \mathfrak{P}\left(e^{\frac{1}{A\alpha}(\gamma+\delta\eta)}\right),$$

d. h. t als Function von η in eindeutiger Form dargestellt.

Wenn $m > 0$ ist, so könnte A verschwinden; in diesem Falle wäre der Punkt $t = a$ ein scheinbar singulärer Punkt (Nr. 55, Bd. I, S. 196) und wir erhielten

$$\zeta = (t-a)^m(\delta_0 + \delta_1(t-a) + \cdots),\quad \delta_0 \neq 0.$$

Hieraus kann sich für t dann und nur dann eine eindeutige Entwickelung nach Potenzen von ζ ergeben, wenn $m = 1$ ist; dann wäre aber der Punkt a eine reguläre Stelle der Differentialgleichung. Soll also t eine eindeutige Function von η sein, so darf die Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_2)$ keine scheinbar singuläre Stelle besitzen.

Wenn für $m > 0$ A von Null verschieden ist, so muss, da z_2 zum Exponenten r_2 gehören soll, nothwendig

$$\mathfrak{P}_2(a\,|\,a) \neq 0$$

sein; es ist also

$$\frac{1}{\zeta} = (t-a)^{-m}(\delta_0 + \delta_1(t-a) + \cdots) + A\log(t-a),\quad \delta_0 \neq 0,$$

und hieraus kann sich offenbar niemals eine eindeutige Entwickelung von t als Function von ζ beziehungsweise η ergeben.

197. Neue Auffassung der scheinbar singulären Stellen. Das Fuchs'sche Beispiel.

Um das in der vorigen Nummer gewonnene Ergebniss in eleganter Form aussprechen zu können, wollen wir eine besondere Auffassung der scheinbaren singulären Stellen Platz greifen lassen.

Wenn $t = a$ eine Stelle ist, in deren Umgebung die Entwickelungen des canonischen Fundamentalsystems keine Logarithmen enthalten, so ist dieselbe eine reguläre Stelle, wenn

$$r_1 - r_2 = 1$$

ist, sie ist eine scheinbar singuläre Stelle, wenn

$$r_1 - r_2 = m > 1$$

ist. Wir sagen im letzteren Falle, $t = a$ sei eine $(m - 1)$- scheinbar singuläre Stelle, oder in $t = a$ seien $(m - 1$ fache scheinbar singuläre Stellen vereinigt. Allgemein, v eine nicht scheinbar singuläre Stelle und

$$r_1 - r_2 = \lambda + m - 1$$

ist, wo λ eine Zahl bedeutet, deren realer Theil nicht negativ kleiner wie Eins ist, so sagen wir, in $x = a$ sei eine ein singuläre Stelle mit $m - 1$ scheinbar singulären S vereinigt.

Wenn $t = a$ den unendlich fernen Punkt bedeutet, so bleib vorhin durchgeführten Betrachtungen bestehen, wenn man nur die Stelle von $t - a$ setzt, wir können also sagen:

Damit sich aus der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_2)$ di abhängige Variable t als eindeutige Function des Int quotienten η ergeben soll, ist nothwendig, dass $(\mathfrak{A}_2)$ scheinbar singulären Punkte besitzt, und dass die renzen der Wurzeln der zu nicht logarithmischen singu Stellen gehörigen determinirenden Fundamentalgleich reciproke ganze Zahlen sind.

Diese nothwendigen Bedingungen sind aber im Allge nicht hinreichend, wie wir an einem sehr lehrreichen von Fuchs gegebenen Beispiele zeigen wollen.

Sei die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{d\log R}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\lambda^2}{R}y = 0, \tag{6}$$

woselbst λ eine Constante bedeutet und

$$R = (t - a_1)(t - a_2)(t - a_3)(t - a_4)$$

zu nehmen ist, vorgelegt; dieselbe verwandelt sich durch die formation

$$y = e^{-\frac{1}{4}\int d\log R}\,\mathfrak{y}$$

in

$$\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt} = \left(\frac{1}{4}\frac{R''}{R} - \frac{3}{16}\frac{R'^2}{R^2} - \frac{\lambda^2}{R}\right)\mathfrak{y}, \tag{7}$$

und diese Differentialgleichung besitzt, wie man sofort verific Lösungen

$$\mathfrak{y}_1 = R^{-\frac{1}{4}} e^{i\lambda\int\limits_\alpha^t \frac{dt}{\sqrt{R}}}, \quad \mathfrak{y}_2 = R^{-\frac{1}{4}} e^{-i\lambda\int\limits_\alpha^t \frac{dt}{\sqrt{R}}}, \qquad (i=\sqrt{-1}),$$

deren Quotienten

$$\frac{\mathfrak{y}_2}{\mathfrak{y}_1} = \eta = e^{-2\lambda i\int\limits_\alpha^t \frac{dt}{\sqrt{R}}}$$

wir zu untersuchen haben; α bedeutet eine Integrationsconstante.

Zunächst erkennen wir, dass die für die eindeutige Umkehrbarkeit gefundenen nothwendigen Bedingungen erfüllt sind. Die Wurzeln der zu $t = a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen sind nämlich

$$r_1 = \frac{3}{4}, \quad r_2 = \frac{1}{4}, \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4),$$

die Wurzeln der zu $t = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung

$$r_1 = 0, \quad r_2 = -1;$$

Logarithmen treten in der Umgebung von $t = \infty$ nicht auf.

Bezeichnen wir mit $\varphi(u)$ die durch Umkehrung des elliptischen Integrales erster Gattung

$$u = \int\limits_\alpha^t \frac{dt}{\sqrt{R}}$$

entstehende eindeutige doppeltperiodische Function von u, mit ω_1, ω_2 ein System von Fundamentalperioden derselben, so ist t als Function des Integralquotienten η in der Form

$$t = \varphi\left(-\frac{1}{2\lambda i} \log \eta\right) \tag{8}$$

darstellbar. Diese Function ist aber im Allgemeinen nicht eindeutig, sondern hat die Stellen $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ zu Verzweigungspunkten. Damit t eine eindeutige Function von η sein soll, muss

$$\frac{2\pi i}{2\lambda i} = \varkappa_1\omega_1 + \varkappa_2\omega_2 = \omega \tag{9}$$

sein, wo $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ ganze Zahlen bedeuten, d. h. es muss

$$\lambda = \frac{\pi}{\omega}$$

sein. Während die allgemein als nothwendig erkannten Bedingungen sich in algebraische Gleichungen oder Ungleichungen zwischen den in den Coefficienten der Differentialgleichung auftretenden Parametern umsetzen lassen, ist die Bedingung (9) nicht durch eine algebraische,

sondern durch eine transcendente Gleichung zwischen λ und den a_1, a_2, a_3, a_4 dargestellt, da ja bekanntlich die Perioden ω_1, ω_2 transcendente Functionen von den a_1, a_2, a_3, a_4 sind. Wir werden darum im Folgenden die gefundenen nothwendigen Bedingungen kurz als die algebraischen, die im allgemeinen Falle uns noch unbekannten übrigen als die transcendenten Bedingungen für die eindeutige Umkehrbarkeit des Integralquotienten bezeichnen.

Machen wir uns an dem Beispiele klar, woran es liegt, dass die algebraischen Bedingungen allein nicht hinreichend sind.

Wir hatten bemerkt, dass die Punkte $\eta = 0$, $\eta = \infty$ Verzweigungspunkte der Function t von η sein könnten, es wird sich also darum handeln, die Bedeutung dieser Punkte zu ergründen.

Da das Integral erster Gattung

$$\int_a^t \frac{dt}{\sqrt{R}}$$

bei freier Beweglichkeit von t in seiner Ebene zwar alle endlichen complexen Werthe annehmen, aber niemals unendlich gross werden kann, so wird die Function η von t, wenn t alle möglichen Wege in seiner Ebene beschreibt, alle complexen Werthe erreichen können mit Ausnahme der Werthe Null und Unendlich. Wenn wir also die Gesammtheit der η-Werthe darstellen wollen, so werden wir aus der Ebene der complexen Variabeln η die Stellen

$$\eta = 0, \quad \eta = \infty$$

ausschliessen müssen; dadurch verwandelt sich diese Ebene in eine Fläche mit zwei Grenzpunkten F, die erst durch einen diese Grenzpunkte mit einander verbindenden Querschnitt l in eine einfach zusammenhängende Fläche $\bar{F}$ übergeht.

Innerhalb dieser Fläche $\bar{F}$ ist unsere Function t von η eindeutig; denn da die algebraischen Bedingungen erfüllt sind, ist t in der Umgebung jeder Stelle von $\bar{F}$ eindeutig, d. h. t bleibt ungeändert, wenn η einen unendlich kleinen geschlossenen Weg beschreibt, der irgend eine Stelle von F umgiebt. Nun lässt sich aber jeder in einer einfach zusammenhängenden Fläche beschriebene geschlossene Weg durch stetige Deformation innerhalb dieser Fläche auf einen Punkt zusammenziehen, so dass also für eine einfach zusammenhängende Fläche aus der Eindeutigkeit einer Function in der Umgebung jeder Stelle ohne Weiteres die Eindeutigkeit in der ganzen Fläche folgt.

Dies gilt nicht für eine mehrfach zusammenhängende Fläche. Soll vielmehr t innerhalb F eindeutig sein, so müssen wir dafür Sorge

tragen, dass diese Function keine Werthänderung erfährt, wenn die Variable η den Querschnitt l, der F in eine einfach zusammenhängende Fläche $\overline{F}$ verwandelt, überschreitet. Dies wird dadurch erreicht, dass wir λ gemäss der Gleichung (9) bestimmen.

Beiläufig gewinnen wir den folgenden allgemeinen Satz:

Die für die eindeutige Umkehrbarkeit des Integralquotienten η einer Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchs'schen Classe aufgestellten nothwendigen algebraischen Bedingungen sind dann und nur dann hinreichend, wenn das Gebiet der η-Werthe, die durch analytische Fortsetzung des Integralquotienten erreicht werden können, ein einfach zusammenhängendes ist.

Ist jenes Gebiet ein mehrfach zusammenhängendes, so müssen zu den algebraischen Bedingungen noch andere hinzutreten, welche bewirken, dass die unabhängige Variable der Differentialgleichung auch dann keine Werthänderung erleidet, wenn η einen der Querschnitte überschreitet, durch welche jenes mehrfach zusammenhängende Gebiet in ein einfach zusammenhängendes verwandelt wird.

198. Bedeutung der Unbestimmtheitsstellen der Umkehrungsfunction bei der Aufstellung der hinreichenden Bedingungen für die Eindeutigkeit.

In unserem Beispiele sind die Stellen $\eta = 0$, $\eta = \infty$ Unbestimmtheitsstellen der Function t von η; sehen wir zu, auf welche Weise diese Unbestimmtheitsstellen entstehen.

Denken wir uns die t-Ebene nach Ausschluss der singulären Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 unserer Differentialgleichung (7) durch vier von diesen Punkten ausgehende nach dem Unendlichen hin gelegte Querschnitte l_1, l_2, l_3, l_4 in eine einfach zusammenhängende Fläche $\overline{T}$ verwandelt und betrachten einen innerhalb dieser Fläche eindeutig definirten Zweig

$$\eta = e^{-2\lambda i u}$$

des Integralquotienten, wo also das Integral

$$u = \int_a^t \frac{dt}{\sqrt{R}}$$

innerhalb $\overline{T}$ erstreckt zu denken ist. Wir suchen die Substitutionen der projectiven Gruppe ϑ zu bestimmen, die der Monodromiegruppe $\overline{\Theta}$ von $(\mathfrak{A}_2)$ isomorph ist.

Bezeichnen wir das Integral

$$\int \frac{dt}{\sqrt{R}}$$

erstreckt längs einer vom Punkte α ausgehenden, den Punkt $a_\varkappa$ umschliessenden Schleife (vergl. Nr. 114, Bd. I, S. 410), die den Querschnitt $l_\varkappa$ im positiven Sinne überschreitet, durch $\alpha_\varkappa$ für $\varkappa = 1, 2, 3, 4$, so verwandelt sich u, wenn t einen Weg beschreibt, der den Querschnitt $l_\varkappa$ im positiven Sinne durchkreuzt, in

$$\alpha_\varkappa - u,$$

und demnach η in

(10) $$A_\varkappa \eta = \frac{c_\varkappa}{\eta} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4),$$

wo

$$c_\varkappa = e^{-2\lambda i \alpha_\varkappa}$$

gesetzt wurde. Die Substitutionen (10) stellen eine **Basis der projectiven Gruppe** ϑ dar, indem nämlich zwischen denselben, da $t = \infty$ kein Verzweigungspunkt der Function η ist, die Beziehung

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = 1$$

besteht, woraus sich

$$c_1 c_2^{-1} c_3 c_4^{-1} = 1$$

ergiebt. Man kann dann z. B.

$$\omega_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \omega_2 = \alpha_1 - \alpha_3$$

als ein System von Fundamentalperioden der elliptischen Function

$$t = \varphi(u)$$

ansehen, und wenn man

$$\gamma_1 = c_1 c_2^{-1} = e^{-2\lambda i \omega_1},$$

$$\gamma_2 = c_1 c_3^{-1} = e^{-2\lambda i \omega_2}$$

setzt, so sind die Substitutionen von ϑ in einer der beiden Formen

$$S\eta = \gamma_1^{g_1} \gamma_2^{g_2} \eta,$$

$$T\eta = \gamma_1^{g_1} \gamma_2^{g_2} c_1 \frac{1}{\eta}$$

darstellbar, wo g_1, g_2 irgendwelche ganze Zahlen bedeuten.

Wenn $t = a_\varkappa$ ist, erhält η den Werth

$$e^{-2\lambda i \int_\alpha^{a_\varkappa} \frac{dt}{\sqrt{R}}},$$

d. h. da, wie leicht zu erkennen ist,

$$\alpha_\varkappa = 2\int_a^{a_\varkappa} \frac{dt}{\sqrt{R}}$$

gefunden wird, den Werth

$$e^{-\lambda i \alpha_\varkappa} = \sqrt{c_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4).$$

Die Gesammtheit der Werthe des Integralquotienten, die den Werthen $t = a_1, a_2, a_3, a_4$ entsprechen, ist demnach in der Formel

$$\sqrt{\gamma_1^{g_1}\gamma_2^{g_2}c_1}$$

enthalten; in der Umgebung derselben ist zufolge der erfüllten algebraischen Bedingungen t eindeutig. Wir sehen sofort, dass diese Werthe durch die Wurzeln der Gleichungen

(11) $$\eta = T\eta$$

dargestellt werden. Auf der anderen Seite erkennen wir die beiden Stellen

$$\eta = 0, \quad \eta = \infty$$

als die Wurzeln der Gleichungen

(12) $$\eta = S\eta.$$

Die beiden Typen von Substitutionen der Gruppe ϑ, die durch die beiden Formen S und T charakterisirt werden, zeigen also einen wesentlichen Unterschied, wir können denselben durch die folgende Ueberlegung noch klarer hervortreten lassen.

Bilden wir für eine der Substitutionen T die Substitution T^2, so ist offenbar

$$T^2 = 1,$$

dagegen sind für eine der Substitutionen S die successiven Potenzen

$$S^\nu \qquad (\nu = -\infty, \cdots +\infty)$$

im Allgemeinen sämmtlich von einander verschieden. Sei

$$-2\lambda i(g_1\omega_1 + g_2\omega_2) = \mu_1 + \mu_2 i,$$

wo μ_1, μ_2 reale Grössen bedeuten, dann sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich

1) $\mu_1 = 0,$

2) $\mu_1 > 0,$

3) $\mu_1 < 0$

ist. Im Falle 1) ist

$$|\gamma_1^{g_1}\gamma_2^{g_2}| = 1,$$

und wenn η irgend einen complexen Werth bedeutet, so nähert sich

$$S^{\nu}\eta = e^{\nu\mu_2 i}\eta$$

für $\nu = \pm\infty$ keiner bestimmten Grenze. Dagegen ist im Falle 2)

$$\lim_{\nu=+\infty} S^{\nu}\eta = \infty, \quad \lim_{\nu=+\infty} S^{-\nu}\eta = 0,$$

und im Falle 3)

$$\lim_{\nu=+\infty} S^{\nu}\eta = 0, \quad \lim_{\nu=+\infty} S^{-\nu}\eta = \infty,$$

für jeden endlichen Werth von η. Wir sehen hiernach, dass es in jeder noch so kleinen Umgebung der Stellen $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ stets Werthe giebt, die aus jedem beliebigen endlichen Werthe von η durch Substitutionen der Gruppe ϑ hervorgehen, d. h. die Function t von η nimmt in jeder Nähe der Stellen $\eta = 0$, $\eta = \infty$ jeden beliebigen Werth beliebig oft an.

Diese Eigenschaft charakterisirt die Stellen $\eta = 0$, $\eta = \infty$ als Unbestimmtheitsstellen der Function t von η.

Wenn λ der Gleichung (9) gemäss gewählt und durch ω' eine Periode von $\varphi(u)$ bezeichnet wird, die mit

$$\omega = \frac{\pi}{\lambda}$$

zusammen ein System von Fundamentalperioden constituirt, so lässt sich der Ausdruck

$$-2\lambda i(g_1\omega_1 + g_2\omega_2)$$

in die Form setzen

$$-2\lambda i(g_1\omega_1 + g_2\omega_2) = 2h_1\pi i + 2h_2\pi i\frac{\omega'}{\omega},$$

wo h_1, h_2 ganze Zahlen bedeuten. Da, wie wir stillschweigend vorausgesetzt haben, die a_1, a_2, a_3, a_4 von einander verschieden sind, ist der Quotient irgend zweier Fundamentalperioden ω, ω' niemals real, es kann also niemals vorkommen, dass der reale Theil von

$$-2\lambda i(g_1\omega_1 + g_2\omega_2)$$

verschwindet; d. h. wenn λ der Gleichung (9) gemäss bestimmt wird, ist das Eintreten des Falles 1) ausgeschlossen. Wir können aber auch direct zeigen, dass der Fall 1) nicht eintreten darf, wenn t eine eindeutige Function von η sein soll.

In der That sei also

$$S\eta = e^{\mu_2 i}\eta,$$

wo μ_2 eine reale Grösse bedeutet, dann liegen die sämmtlichen Werthe, die aus η durch successive Anwendung der Potenzen von S hervorgehen, auf dem mit dem Radius $|\eta|$ um den Punkt $\eta = 0$ als Mittelpunkt beschriebenen Kreise K. Nehmen wir zunächst an, μ_2 sei kein

rationales Vielfaches von π, was offenbar darauf hinauskommt, dass $\frac{\pi}{\lambda}$ kein aliquoter Theil einer Periode der Function $\varphi(u)$ ist.

Dann lässt sich bekanntlich stets ein System von ganzen Zahlen m_1, m_2 so wählen, dass der Ausdruck

$$m_1 \mu_2 + m_2 \pi$$

sich von irgend einer vorgeschriebenen realen Grösse φ beliebig wenig unterscheidet. Es giebt folglich in jeder Nähe jeder beliebigen Stelle

$$|\eta| e^{\varphi i}$$

der Kreisperipherie K Stellen, die aus η durch eine Potenz der Substitution S hervorgehen, d. h. wenn t einen Werth der unabhängigen Variabeln unserer Differentialgleichung bedeutet, für welchen der Werth η des Integralquotienten zum Vorscheine kommt, so giebt es in jeder Nähe einer jeden Stelle der Kreisperipherie K ebenfalls auf K gelegene Stellen, die diesem selben Werthe t der unabhängigen Variabeln zugehören.

Aber noch mehr! Betrachten wir die Substitutionen T unserer Gruppe ϑ. Wenn $\frac{\pi}{\lambda}$ kein aliquoter Theil einer Periode der Function $\varphi(u)$ ist, so besteht zwischen den Grössen π, $\lambda\omega_1$, $\lambda\omega_2$ keine homogene lineare Beziehung mit ganzzahligen Coefficienten; es lässt sich folglich nach einem berühmten Satze von Jacobi ein System von drei ganzen Zahlen g_1, g_2, g_3 so finden, dass das Aggregat

$$-2\lambda i(g_1\omega_1 + g_2\omega_2) + 2g_3\pi i$$

sich von einer beliebig vorgeschriebenen complexen Grösse dem absoluten Betrage nach beliebig wenig unterscheidet. Es liegen folglich in jeder Nähe einer jeden beliebigen Stelle der η-Ebene Stellen, die aus dem Werthe η durch Anwendung einer der Substitutionen T hervorgehen, d. h. bedeutet t irgend einen Werth der unabhängigen Variabeln der Differentialgleichung (A_2), so befinden sich in jeder noch so kleinen Umgebung jedes Punktes der η-Ebene Stellen, die als Werthe des Integralquotienten zu jenem Werthe t gehören. Dass dies nicht möglich ist, wenn t eine eindeutige Function von η sein soll, werden wir sehr bald allgemein erörtern. Wir gehen vorher noch auf den Fall ein, wo $\frac{\pi}{\lambda}$ ein aliquoter Theil einer Periode von $\varphi(u)$ ist.

Sei also

$$\text{(9a)} \qquad \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\varkappa_1\omega_1 + \varkappa_2\omega_2}{\varkappa}, \quad \varkappa > 1,$$

wo $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ ganze Zahlen bedeuten, dann ist t auch keine eindeutige

Function von η, sondern es gehören zu einem Werthe von η
verschiedenen Werthe

$$\varphi\left(-\frac{\log\eta}{2\lambda i}-\frac{h(\varkappa_1\omega_1+\varkappa_2\omega_2)}{\varkappa}\right)\qquad (h=0,1,\cdots\varkappa-1)$$

von t, welche, wie aus der Theorie der elliptischen Functionen l
ist, von einem derselben, etwa

$$\varphi\left(-\frac{\log\eta}{2\lambda i}\right),$$

algebraisch abhängen. In diesem Falle kann demnach die Diffe
gleichung $(\mathfrak{A}_2)$ durch eine Transformation von der Form

$$\mathfrak{y}=\varrho\bar{\mathfrak{y}},\quad \bar{t}=\psi(t),$$

wo ψ eine rationale Function, ϱ die Wurzel aus einer rationalen F
von t bedeutet, in eine Differentialgleichung mit der unabh
Variabeln $\bar{t}$ übergeführt werden, in welcher $\bar{t}$ eine eindeutige F
des Integralquotienten η ist.

Drittes Kapitel.

199. Eigenschaften projectiver Substitutionen einer Variabeln. Canonische Form und Eintheilung derselben.

Wir gehen nun dazu über, die an dem Fuchs'schen Beispiele beobachteten Verhältnisse allgemein zu discutiren und beginnen mit einer etwas eingehenderen Untersuchung der projectiven Substitutionen einer Variabeln η, die ja bei unserer Frage wesentlich in Betracht kommen.

Sei eine solche projective Substitution

$$\zeta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta} = S\eta$$

vorgelegt, wo wir in der Regel die Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

annehmen werden, so bemerken wir zuvörderst, dass durch dieselbe eine eindeutig conforme, d. h. in den kleinsten Theilen ähnliche, oder, wie man sich auch ausdrückt, winkeltreue Abbildung der Ebene der complexen Variabeln η auf die Ebene der complexen Variabeln ζ vermittelt wird, da ja $S\eta$ eine monogene Function von η darstellt.

Bei dieser conformen Abbildung entspricht jeder Geraden und jedem Kreise der ζ-Ebene eine Gerade oder ein Kreis der η-Ebene und umgekehrt.

In der That, bezeichnen wir durch einen oberen Accent die conjugirte Grösse einer complexen Grösse a, so stellt die Gleichung

$$(2) \qquad A\zeta\zeta' + B\zeta + B'\zeta' + C = 0,$$

wo A, C reale Grössen bedeuten, einen Kreis beziehungsweise, wenn $A = 0$, eine Gerade in der ζ-Ebene dar, und zwar den allgemeinsten Kreis bez. die allgemeinste Gerade. Setzen wir hierin

$$\zeta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \quad \zeta' = \frac{\alpha'\eta' + \beta'}{\gamma'\eta' + \delta'},$$

so erhalten wir als entsprechende Gleichung in der η-Ebene

$$(3) \qquad \begin{cases} \eta\eta'(A\alpha\alpha' + B\alpha\gamma' + B'\alpha'\gamma + C\gamma\gamma') \\ + \eta\,(A\alpha\beta' + B\alpha\delta' + B'\gamma\beta' + C\gamma\delta') \\ + \eta'(A\beta\alpha' + B'\delta\alpha' + B\gamma'\beta + C\gamma'\delta) \\ + \quad A\beta\beta' + B\beta\delta' + B'\beta'\delta + C\delta\delta' = 0, \end{cases}$$

und diese stellt wieder einen Kreis dar. Dass auch umgekehrt jedem Kreise der η-Ebene ein Kreis der ζ-Ebene entspricht, erhellt daraus, dass

$$\eta = \frac{\delta\zeta - \beta}{-\gamma\zeta + \alpha}$$

ist.

Wenn $A = 0$ ist, d. h. die Gleichung (2) eine gerade Linie darstellt, so geht der entsprechende Kreis (3) der η-Ebene durch den Punkt

$$\eta = -\frac{\delta}{\gamma},$$

der dem $\zeta = \infty$ entspricht, hindurch. Diese Bemerkung leitet uns beiläufig darauf hin, dass zwischen der durch die projective Transformation (1) der complexen Grössen η, ζ bestimmten Abbildung und den sogenannten Cremona'schen Transformationen eine einfache Beziehung besteht.

Bekanntlich lässt sich eine Cremona'sche Transformation beliebiger Ordnung stets aus solchen Transformationen zweiter Ordnung zusammensetzen (Rosanes, Crelle's Journal, Bd. 73, S. 109). Die Cremona'sche Transformation zweiter Ordnung zweier Ebenen in einander ist dadurch charakterisirt, dass jeder Geraden der einen Ebene ein Kegelschnitt der anderen entspricht, der durch drei feste Punkte hindurchgeht, oder mit anderen Worten, den sämmtlichen Geraden der einen Ebene entsprechen die Kegelschnitte eines bestimmten Netzes der anderen.

Daraus folgt also zunächst, dass die zwischen der η- und ζ-Ebene statuirte Beziehung (1) eine Cremona'sche Transformation ist, denn den Geraden der einen Ebene entsprechen Kreise der anderen, die durch einen festen Punkt hindurchgehen, d. h. also Kegelschnitte, die durch diesen festen Punkt und die beiden imaginären Kreispunkte hindurchgehen. Setzt man

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 i, \quad \eta = \eta_1 + \eta_2 i,$$

so kann ein solches Kreisnetz der η-Ebene durch Anwendung einer realen Collineation

$$\frac{\alpha_2 + \beta_2\eta_1 + \gamma_2\eta_2}{\alpha_1 + \beta_1\eta_1 + \gamma_1\eta_2}, \quad \frac{\alpha_3 + \beta_3\eta_1 + \gamma_3\eta_2}{\alpha_1 + \beta_1\eta_1 + \gamma_1\eta_2}$$

in ein beliebiges Kegelschnittnetz transformirt werden, es setzt sich also jede Cremona'sche Transformation zweiter Ordnung aus einer projectiven Substitution zwischen den complexen Grössen

$$\zeta_1 + \zeta_2 i, \quad \eta_1 + \eta_2 i$$

und aus einer realen Collineation zusammen. Daraus folgt, dass auch

jede beliebige Cremona'sche Transformation aus projectiven Substitutionen zwischen den complexen Grössen $\zeta_1 + \zeta_2 i$, $\eta_1 + \eta_2 i$ und aus realen Collineationen zusammengesetzt werden kann.

Wir werden in der Regel die durch eine Substitution von der Form (1) verknüpften complexen Grössen ζ, η nicht in zwei verschiedenen, sondern vielmehr in einer und derselben Ebene zu deuten haben; es wird dann jeder Punkt η in einen gewissen anderen Punkt ζ transformirt. Fragen wir insbesondere nach denjenigen Punkten der η-Ebene, die mit ihren transformirten identisch sind, so haben wir zur Bestimmung derselben die quadratische Gleichung

$$\gamma\eta^2 + (\delta - \alpha)\eta - \beta = 0,$$

deren Wurzeln wir als die Doppelpunkte der projectiven Substitution bezeichnen.

Dieselben ergeben sich in der Form

$$\left.\begin{matrix}\lambda\\ \mu\end{matrix}\right\} = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma} \pm \sqrt{\frac{(\alpha + \delta)^2 - 4}{4\gamma^2}},$$

sie sind also von einander verschieden, wenn

$$(\alpha + \delta)^2 \neq 4$$

ist. In diesem Falle lässt sich die Substitution (1) in die Form setzen

$$\text{(I)} \qquad \frac{\zeta - \lambda}{\zeta - \mu} = K\,\frac{\eta - \lambda}{\eta - \mu},$$

wir nennen dies die canonische Form der Substitution (1), da dieselbe der canonischen Form der homogenen Substitution

$$\text{(1a)} \qquad \begin{aligned} z_1 &= \delta y_1 + \gamma y_2, \\ z_2 &= \beta y_1 + \alpha y_2 \end{aligned}$$

entspricht, wenn wir

$$\zeta = \frac{z_2}{z_1}, \quad \eta = \frac{y_2}{y_1}$$

setzen. Die Constante K, die wir den Multiplicator der projectiven Substitution (1) nennen, bestimmt sich demgemäss als der Quotient der Wurzeln der zur homogenen Substitution (1a) gehörigen Fundamentalgleichung

$$\begin{vmatrix} \delta - \omega & \beta \\ \gamma & \alpha - \omega \end{vmatrix} = 0;$$

der Multiplicator ist demnach im Sinne der Nr. 121 (Bd. I, S. 439, vergl. Nr. 125, ebenda S. 462) eine Invariante der Substitution (1), d. h. er ändert sich nicht, wenn man von (1) zu einer ähnlichen projectiven Substitution übergeht.

Da sich aus (I) durch Differentiation

$$\frac{1}{(\zeta-\mu)^2}\,d\zeta = \frac{K}{(\eta-\mu)^2}\,d\eta$$

ergiebt, finden wir für K überdies die zwiefache Darstellung

(4) $$K = \left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)_{\eta=\lambda}, \quad \frac{1}{K} = \left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)_{\eta=\mu}.$$

Dieser Multiplicator K ist im Allgemeinen eine complexe Zahl, die wir in der Form

$$K = |K|\,e^{i\,\mathrm{Arg}\,K}$$

darstellen wollen. Wir scheiden dann nach dem Vorgange von Herrn Klein die projectiven Substitutionen mit getrennten Doppelpunkten in drei Unterarten, je nachdem

1) $|K| = 1,$
2) $|K| \neq 1, \quad \mathrm{Arg}\,K = 0,$
3) $|K| \neq 1, \quad \mathrm{Arg}\,K \neq 0$

ist.

Im Falle 1) nennt man die Substitution (1) eine **elliptische**; ihre ν^{te} Potenz ist in der Form

$$\frac{\zeta_\nu-\lambda}{\zeta_\nu-\mu} = K^\nu\,\frac{\eta-\lambda}{\eta-\mu} \qquad (\nu=-\infty,\cdots+\infty)$$

darstellbar, wenn man

$$\zeta_\nu = S^\nu\eta$$

setzt. Falls die reelle Grösse

$$\mathrm{Arg}\,K = \frac{g}{h}\,2\pi$$

ist, wo g, h ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler bedeuten, so ist

$$S^h\eta = \eta \quad \text{oder} \quad S^h = 1,$$

man sagt dann, die elliptische Substitution S sei eine **periodische**.

Im Falle 2) nennt man die Substitution S eine **hyperbolische**, im Falle 3) eine **loxodromische**. In beiden Fällen ist

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{\zeta_\nu-\lambda}{\zeta_\nu-\mu} = \frac{\eta-\lambda}{\eta-\mu}\lim_{\nu=\infty}K^\nu,$$

d. h. wenn $|K| < 1$ ist, so haben wir

(5) $$\begin{cases} \lim\limits_{\nu=+\infty}\zeta_\nu = \lim\limits_{\nu=+\infty}S^\nu\eta = \lambda, \\ \lim\limits_{\nu=-\infty}\zeta_\nu = \lim\limits_{\nu=-\infty}S^\nu\eta = \mu, \end{cases}$$

dagegen, wenn $|K| > 1$ ist, umgekehrt

(6) $$\lim_{\nu=+\infty}S^\nu\eta = \mu; \quad \lim_{\nu=-\infty}S^\nu\eta = \lambda$$

Die Doppelpunkte λ, μ der Substitution S fallen zusammen, wenn

$$(\alpha + \delta)^2 = 4$$

ist; in diesem Falle nennt man ebenfalls nach Herrn Klein die Substitution eine parabolische. Es hat dann auch die zu der homogenen Substitution (1a) gehörige Fundamentalgleichung eine doppelte Wurzel und die canonische Form von (1) lautet demnach (vergl. Nr. 77, Bd. I, S. 126)

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{\zeta - \lambda} = \frac{1}{\eta - \lambda} + L,$$

wo durch einfache Rechnung

$$\text{(7)} \qquad L = \frac{\alpha + \delta}{2}\gamma, \quad \lambda = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma}, \quad \left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)_{\eta = \lambda} = 1$$

gefunden wird. Für

$$\zeta_\nu = S^\nu \eta$$

ergiebt sich

$$\frac{1}{\zeta_\nu - \lambda} = \frac{1}{\eta - \lambda} + \nu L,$$

woraus

$$\text{(8)} \qquad \lim_{\nu = \pm\infty} S^\nu \eta = \lambda$$

folgt. Stellen wir dieses Ergebniss mit dem durch die Gleichungen (5), (6) dargestellten zusammen, so haben wir den Satz:

Die aus einem beliebigen complexen Werthe η durch alle möglichen Potenzen einer nicht elliptischen Substitution erzeugte Punktmenge besitzt zwei durch die beiden Doppelpunkte der angewandten Substitution dargestellte Grenzstellen, die nur im Falle einer parabolischen Substitution mit einander coincidiren.

Betrachten wir dagegen für eine elliptische Substitution die aus einem Werthe $\eta = \eta^0$ erzeugte Punktmenge

$$\zeta_\nu^0 = S^\nu \eta^0,$$

so liegen diese sämmtlichen Punkte auf dem durch die Gleichung

$$\text{(9)} \qquad \left|\frac{\eta - \lambda}{\eta - \mu}\right| = \left|\frac{\eta^0 - \lambda}{\eta^0 - \mu}\right|$$

dargestellten Kreise. Wenn S eine periodische Substitution ist, so ist die Anzahl dieser Punkte eine endliche; wenn S nicht periodisch, d. h. $\operatorname{Arg} K$ mit 2π nicht commensurabel ist, so lassen sich nach Vorschrift einer beliebig kleinen positiven Grösse ε zwei ganze Zahlen ν_1, $\varkappa_1$ stets so bestimmen, dass sich das Aggregat

$$2\nu_1 \operatorname{Arg} K + 2\varkappa_1 \pi$$

von einer willkürlich vorgeschriebenen realen Grösse dem absoluten Betrage nach um weniger unterscheidet wie ε. Die Punktmenge

$$P = \left(\zeta_\nu^{\,0}\right) \qquad (\nu = -\infty, \cdots +\infty)$$

ist also derart beschaffen, dass sich in jeder Nähe eines jeden Punktes der Kreislinie (9) Punkte dieser Menge befinden, d. h. es ist jeder Punkt des Kreises (9) eine Grenzstelle dieser Punktmenge, oder anders ausgedrückt, die erste Ableitung P' der Punktmenge P (vergl. Nr. 133 S. 8) erfüllt die Kreislinie (9) vollständig und lückenlos.

200. Allgemeines über Punktmengen. Bahncurven elliptischer Substitutionen. Weierstrass' Auffassung eines analytischen Gebildes

Betrachtet man eine durch n unbeschränkt veränderliche reale Grössen $x_1, x_2, \cdots x_n$ bestimmte Mannigfaltigkeit von Punkten, so nennt man nach Herrn G. Cantor eine in dieser Mannigfaltigkeit enthaltene Punktmenge P eine perfecte, wenn dieselbe mit ihrer ersten Ableitung P' identisch ist. Man nennt ferner eine Punktmenge M eine zusammenhängende, wenn für je zwei Punkte

$$\left(x_1^{\,0}, x_2^{\,0}, \cdots x_n^{\,0}\right), \quad \left(x_1^{\,\nu}, x_2^{\,\nu}, \cdots x_n^{\,\nu}\right)$$

derselben, nach Vorschrift einer beliebig kleinen positiven Grösse ε, sich eine endliche Anzahl von Punkten

$$\left(x_1^{\,1}, x_2^{\,1}, \cdots x_n^{\,1}\right), \cdot \cdot \left(x_1^{\nu-1}, x_2^{\nu-1}, \cdots x_n^{\nu-1}\right)$$

der Menge M so angeben lässt, dass die Ungleichungen

$$\left|\sum_{\varkappa=1}^{n}\left(x_\varkappa^{\lambda+1} - x_\varkappa^{\,\lambda}\right)^2\right| < \varepsilon \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots n)$$

erfüllt sind. Herr Cantor definirt dann eine perfecte und zusammenhängende Punktmenge als ein Continuum. Diese Definition ist in gewissem Sinne enger, in anderem Sinne wieder wesentlich weiter als die von uns in der Nr. 133 (S. 9) benutzte; ein Continuum in dem daselbst von uns festgelegten Sinne bezeichnet Herr Cantor, wenn es kein abgeschlossenes ist, als ein Semicontinuum. Die von uns benutzte Definition des Continuums wurde so gefasst, dass unter dieselbe nur ein ebenso vielfach ausgedehntes Gebiet fällt, wie dasjenige ist, aus welchem die betrachtete Punktmenge ausgesondert ist, indem ja gleichzeitig mit jedem Punkte auch jeder Punkt einer gewissen Umgebung dem Continuum zugehören musste; diese Definition ist für functionentheoretische Betrachtungen von der Art, wie wir sie hier anzustellen haben, aus dem Grunde bequem, weil dann das Existenz-

gebiet einer monogenen Function von gewissen Variabeln als ein Continuum schlechthin bezeichnet werden kann, was den gewöhnlichen Vorstellungen entspricht. Wir wollen darum eine perfecte und zusammenhängende Punktmenge ein continuirliches Gebilde nennen und insbesondere von continuirlichen Curven, Flächen u. s. w. sprechen.

Wenn eine Punktmenge P so beschaffen ist, dass ihre erste Ableitung P' ein continuirliches Gebilde vollständig und lückenlos erfüllt, so sagt man, die Punktmenge sei auf diesem continuirlichen Gebilde überall dicht.

Mit Benutzung dieser Terminologie können wir also den Satz aussprechen:

Die Punktmenge, welche aus einem complexen Werthe η durch Anwendung aller Potenzen einer nicht periodischen elliptischen Substitution hervorgeht, erfüllt eine gewisse durch diesen Werth η hindurchgehende Kreislinie überall dicht.

Man kann diesen Kreis durch eine einfache geometrische Betrachtung noch genauer charakterisiren.

Man sagt bekanntlich von zwei Punkten η und $\bar{\eta}$, die durch die Gleichung

(10) $$\bar{\eta} = \frac{-b'\eta' - c}{a\eta' + b},$$

wo a, c reale Grössen bedeuten, mit einander verknüpft sind, sie lägen harmonisch in Bezug auf den Kreis

(11) $$a\eta\eta' + b\eta + b'\eta' + c = 0,$$

oder auch (nach Lord Kelvin), sie seien Spiegelbilder von einander. Dann ist sofort zu übersehen, dass die Doppelpunkte λ, μ der Substitution S in Bezug auf jeden Kreis

(12) $$\left|\frac{\eta - \lambda}{\eta - \mu}\right| = r,$$

wo r eine positive Constante bedeutet, harmonisch liegen; der Kreis (9) ist also jener Kreis, der durch η hindurchgeht und dem Kreisbüschel (12) angehört. Herr Klein nennt die Kreise des Büschels (12) die Bahncurven der elliptischen Substitution S; unser Satz kann also wie folgt ausgesprochen werden:

Die Punktmenge, welche aus dem beliebigen complexen Werthe η durch Anwendung aller Potenzen der nicht periodischen elliptischen Substitution S hervorgeht, liegt auf der durch η hindurchgehenden Bahncurve von S überall dicht.

Ehe wir diese Resultate auf das Studium des Integralquotienten η einer linearen Differentialgleichung anwenden, müssen wir eine Vorstellungsweise einführen, die sich an die von Herrn Weierstrass in seinen functionentheoretischen Vorlesungen gegebene Auffassung eines analytischen Gebildes anschliesst.

Hat man eine Function

$$\eta = f(t)$$

der complexen Variabeln t etwa dadurch definirt, dass ein Zweig dieser Function in der Umgebung einer regulären Stelle $t = t_0$ durch eine gewöhnliche Potenzreihe

$$(\alpha) \qquad \eta = \mathfrak{P}(t \mid t_0) = \delta_0 + \delta_1(t - t_0) + \delta_2(t - t_0)^2 + \cdots$$

dargestellt ist, so erhält man durch analytische Fortsetzung dieser Reihe die Gesammtheit aller derjenigen Functionselemente, die durch gewöhnliche Potenzreihen, fortschreitend nach positiven ganzen Potenzen von linearen Functionen von t, dargestellt werden können. Wenn in der Entwickelung (α) der Coefficient δ_1 nicht verschwindet, so ist auch umgekehrt t nach positiven ganzen Potenzen von $\eta - \delta_0$ entwickelbar

$$t = \mathfrak{Q}(\eta \mid \delta_0);$$

wenn wir von dieser Reihe ausgehen und dieselbe analytisch fortsetzen, so erhalten wir die Gesammtheit aller Functionselemente, die durch gewöhnliche Potenzreihen, fortschreitend nach positiven ganzen Potenzen von linearen Functionen von η, darstellbar sind.

Betrachten wir die Gesammtheit der zusammengehörigen Werthepaare (t, η), die wir auf die eine oder auf die andere Weise erhalten, so bemerken wir, dass diejenigen Werthepaare

$$t = t_0, \quad \eta = \delta_0,$$

die so beschaffen sind, dass sowohl $t = t_0$ eine reguläre Stelle der Function η als auch $\eta = \delta_0$ eine reguläre Stelle der Function t von η ist, beide Male zum Vorschein kommen. Dagegen kommen wir im Allgemeinen bei der Fortsetzung des Elementes $\mathfrak{P}(t \mid t_0)$ zu Werthepaaren (t, η), die bei der Fortsetzung des Elementes $\mathfrak{Q}(\eta \mid \delta_0)$ nicht erreicht werden, und umgekehrt bei Fortsetzung der letzteren Potenzreihe zu Werthepaaren, die durch Fortsetzung von $\mathfrak{P}(t \mid t_0)$ nicht erzielt werden können. Um diesem Uebelstande aus dem Wege zu gehen, kann man sich die beiden Variabeln η, t durch eine dritte Hülfsvariable dargestellt denken, also etwa

$$(\beta) \qquad \begin{cases} \eta = \delta_0 + \mathfrak{P}_1(\tau), \\ t = t_0 + \mathfrak{P}_2(\tau), \end{cases}$$

indem man z. B. die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_2(\tau) = \varepsilon_1\tau + \varepsilon_2\tau^2 + \cdots$$

ganz beliebig, aber so wählt, dass ε_1 von Null verschieden ist, und dann $\mathfrak{P}_1(\tau)$ aus $\mathfrak{P}(t\,|\,t_0)$ dadurch herleitet, dass man in $\mathfrak{P}(t\,|\,t_0)$ für $t - t_0$ die Reihe $\mathfrak{P}_2(\tau)$ einsetzt. Herr Weierstrass nennt dann das Reihenpaar (β) ein Element des analytischen Gebildes (η, t) und definirt die Fortsetzung desselben in folgender Weise.

Sei τ_0 eine Stelle des gemeinsamen Convergenzbereiches der beiden Reihen (β), dann setze man

$$\tau = \tau_0 + c_1\tau' + c_2\tau'^2 + \cdots,$$

wo c_1 von Null verschieden und die Reihe auf der rechten Seite für hinreichend kleines τ' convergent, aber sonst ganz willkürlich gewählt ist; dann verwandelt sich das Reihenpaar (β) in

$$(\beta') \qquad \begin{cases} \eta = \mathfrak{P}_1'(\tau'), \\ t = \mathfrak{P}_2'(\tau'), \end{cases}$$

und das Gebilde (β') coincidirt in einer gewissen Umgebung von $\tau' = 0$ mit dem Gebilde (β) in einer gewissen Umgebung von $\tau = \tau_0$, es kann also (β') als die Fortsetzung von (β) betrachtet werden.

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens erhält man eine gewisse Gesammtheit von Reihenpaaren, die ein in sich abgeschlossenes Ganzes bilden in dem Sinne, dass, wenn man die Gesammtheit der Werthepaare (t, η) in's Auge fasst, die durch diese Reihenpaare geliefert werden, diese Gesammtheit dieselbe bleibt, wie man auch die Fortsetzung machen und von welchem jener Reihenpaare man auch ausgegangen sein mag. Diese so erzielten Werthepaare enthalten sowohl die durch Fortsetzung von $\mathfrak{P}(t\,|\,t_0)$ als auch die durch Fortsetzung von $\mathfrak{L}(\eta\,|\,\delta_0)$ zu erreichenden, man bezeichnet die Gesammtheit derselben als das analytische Gebilde (η, t).

Denken wir uns etwa die vierfache reale ebene Mannigfaltigkeit R_4, die dadurch bestimmt wird, dass wir η, t als unbeschränkt veränderliche complexe Grössen auffassen, so ist das analytische Gebilde (η, t) ein Gebilde zweiter Stufe im R_4. Projiciren wir dasselbe auf die t-Ebene, so ist die Projection die Gesammtheit derjenigen Stellen t, in deren Umgebung sich η verhält wie eine algebraische Function, projiciren wir jenes Gebilde auf die η-Ebene, so erhalten wir ebenso die Gesammtheit der η-Werthe, in deren Umgebung sich t verhält wie eine algebraische Function.

Die Punktmenge (η, t), die durch Fortsetzung des Elementes (β) zum Vorschein kommt, besitzt im Allgemeinen (d. h. wenn η keine

algebraische Function von t ist) noch Grenzstellen, die nicht zu d· Punktmenge (η, t) gehören, für welche sich aber in jeder Nähe Punk dieser Punktmenge befinden, und nur, wenn wir diese Grenzstellen d Punktmenge, d. h. dem Gebilde hinzufügen würden, wäre dassel eine perfecte Punktmenge im R_4. Diese Grenzstellen werden v dem Gebilde nicht wirklich erreicht, sondern das Gebil kommt ihnen nur beliebig nahe. Dass es nicht zweckmässig wä dieselben dem Gebilde hinzuzufügen, lehrt ein Blick auf das Fuchs'sch Beispiel.

201. Grenzstellen, die einem analytischen Gebilde nicht zuzuzähle sind. Gebilde, die nach einer Seite hin eindeutig sind. Isolirt Punktmengen und isolirtwerthige Functionen.

In der That hatten wir in der Nr. 198 (S. 263) gezeigt, dass, wenn $t = t_0$ ein beliebiger Werth der unabhängigen Variabeln, $\eta = \delta_0$ einer der zugehörigen Werthe der daselbst betrachteten Function

$$\eta = e^{-2\lambda i \int_\alpha^t \frac{dt}{\sqrt{R}}}$$

ist und η_0 einen beliebigen complexen Werth bedeutet, stets eine der Substitutionen T angegeben werden kann, für welche

$$T\delta_0 - \eta_0$$

dem absoluten Betrage nach kleiner ist als eine beliebig klein vorgeschriebene positive Grösse, sofern λ nicht gemäss der Gleichung (9a), Nr. 198 (S. 263) gewählt wird. D. h. aber mit anderen Worten, in jeder Nähe jeder beliebigen Stelle (t_0, η_0) des R_4 liegen Stellen, die dem analytischen Gebilde (t, η) angehören; also ist jede Stelle der vierfachen Mannigfaltigkeit R_4 eine Grenzstelle dieses Gebildes, oder mit Benutzung der oben eingeführten Terminologie, das Gebilde (t, η) ist in der ganzen vierfachen Mannigfaltigkeit R_4 überall dicht. Würde man nun alle diese Grenzstellen dem Gebilde hinzuzählen, so würde dasselbe die ganze vierfache Mannigfaltigkeit R_4 lückenlos erfüllen, man hätte also überhaupt kein besonderes Gebilde, also auch keine functionale Beziehung zwischen η und t.

Bei den analytischen Beziehungen, die von den Analysten des achtzehnten Jahrhunderts eingehender studirt worden waren, hatten sich derartige Verhältnisse nicht gezeigt. Der erste, dem eine ähnliche Erscheinung, wie die eben beschriebene, bei seinen Untersuchungen aufgefallen zu sein scheint, war Abel. Aus der Zeit, in welcher sich

Abel mit der Untersuchung der hyperelliptischen und der allgemeinen Abel'schen Integrale beschäftigte, stammt ein Brief an Holmboe, in welchem Abel schreibt, er habe etwas Unmögliches bewiesen. Man geht wohl kaum fehl, wenn man annimmt, dass sich diese Bemerkung auf die Erkenntniss der Thatsache bezieht, dass die Werthe, welche ein allgemeines Abel'sches Integral oder auch ein elliptisches Integral dritter Gattung für einen beliebigen Werth der unabhängigen Variabeln annimmt, durch die Formel

$$u = \bar{u} + m_1 w_1 + m_2 w_2 + m_3 w_3 + \cdots$$

dargestellt werden, wo $\bar{u}$ einen bestimmten zu x gehörigen Werth dieses Integrals, $m_1, m_2, m_3, \cdots$ irgendwelche ganze Zahlen, $w_1, w_2, w_3, \cdots$ Constanten bedeuten, deren Anzahl grösser ist wie zwei, und zwischen denen im Allgemeinen keine homogene lineare Relation mit ganzzahligen Coefficienten besteht.

Wie Jacobi zuerst bewiesen hat, lassen sich nämlich (vergl. Nr. 198, S. 263) die ganzen Zahlen $m_1, m_2, m_3, \cdots$ stets so wählen, dass das Aggregat

$$m_1 w_1 + m_2 w_2 + m_3 w_3 + \cdots$$

jedem complexen Werthe beliebig nahe kommt; es wird also in jeder Nähe jeder Stelle (x, u) Stellen geben, die dem durch das betrachtete Abel'sche Integral bestimmten analytischen Gebilde angehören, d. h. dieses Gebilde ist in dem Gebiete der beiden Variabeln (x, u) überall dicht. Nimmt man nun keinen Anstand, die sämmtlichen Grenzstellen des Gebildes demselben hinzuzuzählen, so ergiebt sich wie oben die Ungereimtheit, dass eine Function für jeden Werth der unabhängigen Variabeln jeden beliebigen Werth „anzunehmen" im Stande ist, wodurch der Charakter einer functionalen Beziehung völlig aufgehoben erscheint. Ob Abel diese Schwierigkeit wirklich gefunden hat, entzieht sich unserer Combination, jedenfalls erwähnt er dieselbe in keiner seiner Abhandlungen. Bemerkenswerth ist, dass Jacobi aus dem erwähnten, von ihm völlig klar erkannten Umstande nur den Schluss gezogen hat, dass die Umkehrungsfunction eines Abel'schen Integrals, wie er sich ausdrückt, ein „Absurdum" sei, während doch der selbe Gedankengang ihn hätte veranlassen müssen, die Function u von x selbst für unmöglich zu erklären. Auf die Consequenzen, die Jacobi aus der von ihm entdeckten Schwierigkeit gezogen hat, kommen wir weiter unten zurück.

Wir werden also dem analytischen Gebilde (t, η) diejenigen Grenzstellen, denen das Gebilde nur beliebig nahe kommt, ohne dieselben wirklich zu erreichen, im Allgemeinen nicht hinzufügen, wodurch es

aber natürlich nicht ausgeschlossen ist, dass wir, je nachdem es sich als zweckmässig erweist, bei der Untersuchung specieller Functionen gewisse Arten dieser Grenzstellen dem Existenzbereiche der Function hinzuzählen.

Betrachten wir nun den besonderen Fall, wo das analytische Gebilde (t, η) nach der einen Seite hin eindeutig, d. h. wo die eine der beiden Variabeln, etwa t, eine allenthalben eindeutige Function der anderen η ist. Sei $\eta = \delta_0$, $t = t_0$ eine Stelle des Gebildes, also

$$(\beta) \qquad \begin{cases} t = t_0 + \mathfrak{P}_1(\tau) = t_0 + \varepsilon_1\tau + \varepsilon_2\tau^2 + \cdots, \\ \eta = \delta_0 + \mathfrak{P}_2(\tau) = \delta_0 + \delta_1\tau + \delta_2\tau^2 + \cdots, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ gewöhnliche Potenzreihen bedeuten, dann ist jedenfalls

$$\delta_1 \neq 0,$$

und die Entwickelungen (β) stellen in einer gewissen Umgebung der Stelle (t_0, δ_0) das ganze Gebilde dar, d. h. jede Stelle des analytischen Gebildes (t, η), die in einer gewissen Umgebung von (t_0, δ_0) liegt, geht aus den Entwickelungen (β) hervor, indem man dem Parameter τ Werthe in der Umgebung von $\tau = 0$ beilegt. Daraus folgt nach bekannten Sätzen über Potenzreihen, dass sich eine endliche positive Grösse δ so angeben lässt, dass, wenn (t_0, η_0) eine ebenfalls dem Gebilde (t, η) angehörende Stelle bedeutet, der absolute Betrag der Differenz $\delta_0 - \eta_0$

$$|\delta_0 - \eta_0| > \delta$$

sein muss.

Projiciren wir das Gebilde (t, η) auf die Ebene der complexen Variabeln η, so ist diese Projection die Gesammtheit der Stellen η, in deren Umgebung sich die eindeutige Function t von η wie eine rationale Function verhält; diese Gesammtheit bildet ein Continuum E, welches als der Existenzbereich der Function t von η bezeichnet wird. Dieses Continuum E bedeckt die η-Ebene oder einen zweifach ausgedehnten Theil derselben einfach, es ist ein unabgeschlossenes und seine Begrenzung wird von denjenigen Stellen gebildet, die Projectionen der dem Gebilde (t, η) nicht angehörenden Grenzstellen desselben sind. Von diesen Stellen weiss man nach den Untersuchungen des Herrn Weierstrass, dass sie Unbestimmtheitsstellen (Herr Weierstrass nennt sie wesentlich singuläre Punkte) der Function t von η sein müssen, und dass die Function t die Eigenschaft hat, in der Nähe einer solchen Stelle jedem Werthe beliebig nahe zu kommen (vergl. eine Arbeit des Herrn Picard, Annales de l'École Normale, 2. Serie, Bd. 9, S. 147). Dagegen lässt sich um jede dem Existenzbereiche E angehörige

Stelle δ_0 ein Kreis mit dem endlichen Radius δ beschreiben, innerhalb dessen keine zweite Stelle η_0 liegt, für welche die Function t denselben Werth t_0 annimmt, wie für δ_0.

Von einer Punktmenge, die so beschaffen ist, dass sich um jeden Punkt derselben eine endliche Umgebung so abgrenzen lässt, dass innerhalb dieser Umgebung kein zweiter Punkt jener Menge liegt, sagt man nach Herrn Cantor, sie sei isolirt. Betrachtet man also die Punktmenge, welche von der Gesammtheit der η-Werthe gebildet wird, für welche die eindeutige Function t denselben Werth t_0 annimmt, so ist dieselbe eine isolirte, und ihre Grenzstellen sind nach den vorhergehenden Erörterungen die sämmtlichen Unbestimmtheitsstellen der Function t von η.

Wir ziehen hieraus zunächst die Folgerung:

Ein analytisches Gebilde (t, η), welches in der ebenen vierfachen Mannigfaltigkeit R_4 überall dicht ist, kann niemals nach einer Seite hin eindeutig sein.

Dies war die Consequenz, die Jacobi aus der von ihm erkannten Eigenschaft eines allgemeinen hyperelliptischen beziehungsweise Abelschen Integrals, für jeden Werth der unabhängigen Variabeln jedem beliebigen Werthe beliebig nahe zu kommen, gezogen hat; er schloss nämlich, dass ein solches Integral niemals eindeutig umkehrbar sein könne.

Wir können aber die Natur eines analytischen Gebildes (t, η), welches nach einer Seite eindeutig sein soll, noch schärfer kennzeichnen.

Denken wir uns nämlich, das analytische Gebilde (t, η) sei zwar nicht im ganzen R_4, aber auf einem aus dem R_4 ausgesonderten continuirlichen dreifach ausgedehnten Gebilde G_3 überall dicht. Schneiden wir dann das Gebilde durch eine Ebene $t = t_0$, so sind die Schnittpunkte auf einer Curve dieser Ebene (nämlich dem Schnitt derselben mit G_3) überall dicht; projiciren wir die Gesammtheit dieser Schnittpunkte auf die η-Ebene, so sind dieselben auf der Projection jener Curve überall dicht. Die Projectionen jener Schnittpunkte unseres Gebildes (t, η) mit der Ebene $t = t_0$ auf die η-Ebene stellen aber die Gesammtheit der Werthe dar, für welche die Function t von η den Werth t_0 annimmt; sollte etwa t eine eindeutige Function von η sein, so müsste diese Gesammtheit eine isolirte Punktmenge bilden, könnte also auf keiner continuirlichen Curve überall dicht sein. Wir haben also den Satz:

Ein analytisches Gebilde (t, η), welches auf einem aus der vierfachen ebenen Mannigfaltigkeit R_4 ausgesonderten continuirlichen dreifach ausgedehnten Gebilde überall dicht ist, kann nicht nach einer Seite hin eindeutig sein.

Wenn eine abzählbare Punktmenge nicht auf einem continuirlic Gebilde überall dicht ist, so ist sie isolirt. Wenn also das analytis Gebilde (t, η) die Eigenschaft hat, auf keinem aus dem R_4 ausge derten continuirlichen dreifach ausgedehnten Gebilde überall dicht sein, so ist sein Schnitt mit einer $t = t_0$-Ebene sowohl wie mit e $\eta = \delta_0$-Ebene eine isolirte Punktmenge, also ist in diesem F sowohl t als Function von η, wie auch η als Function von t so schaffen, dass die Gesammtheit der Werthe dieser Functionen, die einem bestimmten Werthe der unabhängigen Variabeln gehören, s eine isolirte Punktmenge bildet. Wir sagen von einer solchen Funct sie sei eine isolirtwerthige. Das Gebilde (η, t) ist also in dem trachteten Falle nach beiden Seiten hin isolirtwerthig.

Offenbar gilt der Satz:

Ein analytisches Gebilde (η, t), welches nach der ei Seite hin von endlicher Vieldeutigkeit ist, ist nach der deren Seite hin isolirtwerthig.

202. Discontinuirliche projective Gruppen einer Variabeln. Begrenzung der Continua, wo die Gruppe eigentlich discontinuir ist. Infinitesimale Substitutionen.

Wir gehen jetzt nach diesen Vorbereitungen an das Studium Integralquotienten η unserer homogenen linearen Differentialgleich $(\mathfrak{A}_2)$ (Nr. 196, S. 251), beziehungsweise des durch denselben bestimn analytischen Gebildes (η, t).

Wenn t eine eindeutige Function von η sein soll, so muss η Function von t isolirtwerthig sein. Sei

$$t = t_0, \quad \eta = \delta_0$$

eine Stelle des durch den Integralquotienten η bestimmten analytis Gebildes, dann erhalten wir die Gesammtheit der η-Werthe, die demselben Werthe t_0 von t gehören, indem wir auf δ_0 alle Subst tionen der abzählbaren projectiven Gruppe ϑ anwenden. Damit al eine isolirtwerthige Function von t sei, muss die Gruppe ϑ die folg Eigenschaft haben:

Es giebt einen complexen Werth δ_0, um den sich Kreis mit endlichem Radius δ beschreiben lässt, innerl dessen kein von δ_0 verschiedener Punkt der Punktme liegt, die aus δ_0 durch Anwendung der Substitutionen Gruppe ϑ hervorgeht.

Wenn eine Gruppe von projectiven Substitutionen einer Vari

diese Eigenschaft hat, so sagen wir, sie sei innerhalb der complexen Zahlenebene discontinuirlich.

Für eine discontinuirliche Gruppe lassen sich die folgenden Eigenschaften nachweisen. Betrachten wir einen der aus δ_0 durch die Substitutionen der Gruppe hervorgegangenen Punkte ε_0; sei

$$\varepsilon_0 = S\delta_0,$$

so entspricht dem um δ_0 mit dem Radius δ beschriebenen Kreise k_0 ein den Punkt ε_0 einschliessender ebenfalls kreisförmiger Bereich l_0 von endlichem Radius, dessen Begrenzungspunkte von ε_0 in endlichen Abständen liegen. Befände sich innerhalb l_0 ein Punkt ε_1 (ausser ε_0), der aus ε_0 durch eine Substitution S_1 von ϑ hervorgeht, so müsste der Punkt

$$S^{-1}\varepsilon_1$$

innerhalb des Kreises k_0 liegen; dieser Punkt geht aber durch die Substitution

$$S^{-1}S_1S$$

aus δ_0 hervor, und da diese Substitution auch der Gruppe ϑ angehört, so ist dies nicht möglich. D. h. die Punktmenge, welche aus δ_0 durch die Substitutionen der discontinuirlichen Gruppe ϑ hervorgeht, ist eine isolirte.

Auf Grund des in der Nr. 200 (S. 271) bewiesenen Satzes folgt hieraus, dass eine discontinuirliche Gruppe keine nichtperiodische elliptische Substitution enthalten könne, d. h.:

Die in einer discontinuirlichen Gruppe enthaltenen elliptischen Substitutionen sind nothwendig periodisch.

Eine isolirte Punktmenge ist stets abzählbar; wenn also, wie wir voraussetzen dürfen, δ_0 nicht ein Doppelpunkt einer in ϑ enthaltenen Substitution ist, so schliessen wir:

Eine discontinuirliche Gruppe ist stets abzählbar.

Wenn ε_0 aus δ_0 durch eine Substitution der Gruppe hervorgeht, so geht ein zu δ_0 unendlich benachbarter Punkt durch dieselbe Substitution in einen zu ε_0 unendlich benachbarten Punkt über. Also haben auch alle Punkte einer gewissen Umgebung von δ_0 die Eigenschaft, dass die aus einem derselben durch die Substitutionen der Gruppe ϑ hervorgehende Punktmenge eine isolirte ist. Wir sagen von einem Punkte δ_0 der complexen Zahlenebene, aus welchem durch die Substitutionen der discontinuirlichen Gruppe ϑ eine isolirte Punktmenge erzeugt wird, die Gruppe ϑ sei im Punkte δ_0 eigentlich discontinuirlich. Die Gruppe ist dann auch für alle Punkte einer gewissen Umgebung von δ_0 eigentlich discontinuirlich; d. h.:

Die Gesammtheit der Stellen, für welche eine discontinuirliche Gruppe eigentlich discontinuirlich ist, besteht aus lauter innerhalb dieser Gesammtheit gelegenen Punkten, sie zerfällt also in eine endliche oder unendlich grosse Anzahl von Continuis (vergl. Nr. 133, S. 9).

Die Begrenzung dieser Continua wird von einer gewissen abgeschlossenen Punktmenge P gebildet, wir können diese Punktmenge P leicht schärfer charakterisiren.

Es folgt aus dem Begriffe der discontinuirlichen Gruppe, dass dieselbe keine infinitesimale Transformation enthalten kann. Unter einer infinitesimalen Transformation haben wir dabei eine Substitution

$$\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$$

zu verstehen, in welcher die Grössen

$$\alpha-1,\ \beta,\ \gamma,\ \delta-1$$

unendlich klein sind. Wenden wir also auf einen willkürlichen Werth η irgend eine Substitution der discontinuirlichen Gruppe an, so wird der transformirte Werth in endlichem Abstande von η liegen sofern η nicht ein Doppelpunkt der angewandten Substitution ist. Bedeutet λ einen Punkt, der ein Doppelpunkt einer in der Gruppe enthaltenen parabolischen, hyperbolischen oder loxodromischen Substitution ist, so befinden sich nach dem Satze der Nr. 199 (S. 269) in jeder Nähe desselben Stellen, die aus einem willkürlichen Werthe durch Anwendung von Potenzen der betreffenden Substitution hervorgehen. In der Nähe einer solchen Stelle λ ist also die Gruppe nicht eigentlich discontinuirlich.

Wir sagen allgemein, die Gruppe ϑ sei in der Umgebung einer Stelle η uneigentlich discontinuirlich, wenn sich in jeder Nähe dieser Stelle Punkte befinden, die aus η durch Substitutionen der Gruppe hervorgehen.

Aus den eben gemachten Bemerkungen ergiebt sich also, dass die Doppelpunkte der nicht elliptischen Substitutionen der Gruppe solche Stellen sind, in deren Umgebung die Gruppe uneigentlich discontinuirlich ist. Wenn in jeder Nähe einer Stelle a Stellen liegen, in deren Umgebung die Gruppe uneigentlich discontinuirlich ist, so ist die Gruppe auch in a uneigentlich discontinuirlich. Es bildet folglich die Gesammtheit derjenigen Stellen, in deren Umgebung die Gruppe uneigentlich discontinuirlich ist, eine abgeschlossene Punktmenge, und dies ist eben jene Punktmenge P, die die Begrenzung der von den Stellen, wo die Gruppe eigentlich discontinuirlich ist, erfüllten Continua ausmacht.

Betrachtet man allgemein eine Gruppe, die keine infinitesimale Substitution enthält, so kann diese Gruppe nur dann in der Umgebung einer Stelle uneigentlich discontinuirlich sein, wenn diese Stelle entweder selbst Doppelpunkt einer nicht elliptischen Substitution der Gruppe ist, oder wenn sich in jeder Nähe derselben solche Doppelpunkte befinden. Bezeichnet man also die Gesammtheit der Doppelpunkte der nicht elliptischen Substitutionen einer solchen Gruppe als Punktmenge Q, bildet die erste Ableitung Q' dieser Punktmenge, so stellt die aus der Vereinigung von Q und Q' hervorgehende Punktmenge $Q + Q'$ die Gesammtheit der Stellen dar, in deren Umgebung die Gruppe uneigentlich discontinuirlich ist. Wenn diese abgeschlossene Punktmenge $Q + Q'$ die ganze complexe Zahlenebene überall dicht erfüllt, so ist die Gruppe keine in dieser Zahlenebene discontinuirliche. Wenn die Gruppe discontinuirlich ist, so muss es, wie wir gezeigt haben, mindestens ein Continuum von Punkten geben, welches nicht der Punktmenge $Q + Q'$ angehört, sondern von dieser Punktmenge begrenzt wird. Die Punktmenge $Q + Q'$ ist dann mit der oben durch P bezeichneten identisch.

203. Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit discontinuirlicher Gruppe. Die Umkehrungsfunction des Integralquotienten ist isolirtwerthig.

Betrachten wir nun eine Differentialgleichung zweiter Ordnung $(\mathfrak{A}_2)$, für welche die zum Integralquotienten η gehörige projective Gruppe eine discontinuirliche ist.

Wenn ein Doppelpunkt einer Substitution der Gruppe ϑ zum Werthevorrathe der Function η von t gehört, so hat ein t-Werth, für welchen dieser Doppelpunkt zum Vorschein kommt, die Eigenschaft, dass für denselben zwei sonst von einander verschiedene Zweige der Function η von t denselben Werth annehmen; ein solcher t-Werth muss folglich eine Verzweigungsstelle der Function η, also ein singulärer Punkt der Differentialgleichung sein.

Bedeutet $t = a$ eine singuläre Stelle der Differentialgleichung, für welche die Differenz der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung $r_1 - r_2$ keine ganze Zahl ist, so erleidet irgend ein Zweig des Integralquotienten η (vergl. Nr. 196, S. 253 ff.), wenn t einen einfachen unendlich kleinen Umlauf um a vollzieht, eine Substitution, die sich in der canonischen Form:

$$(1) \qquad \frac{\bar{\eta} - \lambda}{\bar{\eta} - \mu} = e^{2\pi i (r_1 - r_2)} \frac{\eta - \lambda}{\eta - \mu}$$

darstellen lässt. Wenn $r_1 - r_2$ real ist, so ist diese Substitution elliptische, also muss, da die Gruppe ϑ discontinuirlich sein so in diesem Falle $r_1 - r_2$ rational sein. Aus der Form der Entwickel

$$(2) \qquad \frac{\eta - \lambda}{\eta - \mu} = (t-a)^{r_1 - r_2}(\delta_0 + \delta_1(t-a) + \cdots)$$

ergiebt sich dann, dass die Stellen

$$t = a, \quad \eta = \lambda$$

und allgemein

$$t = a, \quad \eta = S\lambda,$$

wo S irgend eine Substitution der Gruppe ϑ bedeutet, dem analytisc Gebilde (t, η) angehören.

Ist $r_1 - r_2$ complex, aber nicht rein imaginär, so ist die S stitution (1) eine loxodromische. In diesem Falle erreicht, wer in a einrückt, η den Werth λ, und wenn wir um $t = a$ herum ei Bereich f von hinreichend kleinen Dimensionen abgrenzen, so entspri vermöge der Entwickelung (2), jeder Stelle in einer gewissen l gebung von $\eta = \lambda$ eine Stelle t des Bereiches f. Die Stelle

$$t = a, \quad \eta = \lambda$$

ist in diesem Falle eine Grenzstelle des Gebildes (t, η), die dem bilde nicht angehört, es werden aber durch die Entwickelung wenn wir die Potenz

$$(t-a)^{r_1 - r_2}$$

in bestimmter Weise fixiren, wohldefinirte Stellen des Gebildes in j Nähe der Stelle $t = a$, $\eta = \lambda$ gegeben. In diesem Sinne können also $\eta = \lambda$ als eine isolirte singuläre Stelle der Function t vo auffassen, und diese Stelle ist dann ein Verzweigungspunkt di Function, indem t in der Umgebung von $\eta = \lambda$ nach positiven ga Potenzen von

$$(\eta - \lambda)^{\frac{1}{r_1 - r_2}}$$

entwickelt werden kann. Aehnliches gilt für alle Stellen $\eta = S\lambda$.

Wenn $r_1 - r_2$ rein imaginär ist, so ist die Substitution (1) hyperbolische. Setzt man

$$t - a = \varrho e^{\varphi i}, \quad r_1 - r_2 = \tau i,$$

so ist

$$(3) \qquad \frac{\eta - \lambda}{\eta - \mu} = e^{\tau i \log \varrho} e^{-\tau\varphi}(\delta_0 + \delta_1(t-a) + \cdots);$$

der Punkt $\eta = \lambda$ wird also, wenn t mit bestimmtem Argument in Punkt a einrückt, nicht wirklich erreicht, sondern, wenn wir t unzäh viele Umläufe um $t = a$ vollziehen lassen, so dass $\tau\varphi$ positiv s

gross wird, so nähert sich η asymptotisch der Stelle λ; wird $\tau\varphi$ negativ unendlich gross, so nähert sich η ebenso der Stelle μ. Den Punkten eines $t = a$ umgebenden Bereiches f entspricht in diesem Falle ein die Punkte $\eta = \lambda$, $\eta = \mu$ umgebender bandförmiger Streifen, der zwar diese Punkte niemals erreicht, dieselben aber, sich ihnen spiralförmig annähernd, umwindet. Die Stellen $t = a$, $\eta = \lambda$ und $t = a$, $\eta = \mu$ sind auch hier Grenzstellen des Gebildes (t, η), die dem Gebilde nicht angehören; die Entwickelung (2) beziehungsweise (3) liefert aber wohldefinirte, dem Gebilde zugehörige Stellen, die an die Stellen $t = a$, $\eta = \lambda$ und $t = a$, $\eta = \mu$ so nahe herangebracht werden können, als man immerhin will. Es werden die Stellen $\eta = \lambda$, $\eta = \mu$ als Verzweigungspunkte der Function t von η gelten können, um welche herum eine Fortsetzung dieser Function bewirkt werden kann. Aehnlich für alle Stellen $t = a$, $\eta = S\lambda$ und $t = a$, $\eta = S\mu$, wo S eine Substitution von ϑ bedeutet.

Sei nun $r_1 - r_2$ eine ganze Zahl m und mögen in der Umgebung von $t = a$ Logarithmen auftreten, dann lässt sich (vergl. die Gleichung (4), Nr. 196, S. 255) die Substitution, die ein Zweig von η erfährt, wenn t einen unendlich kleinen einfachen Umlauf um $t = a$ vollzieht, in die canonische Form

(4) $$\frac{1}{\bar{\eta} - \lambda} = \frac{1}{\eta - \lambda} + c$$

setzen, wo, wenn (vergl. a. a. O.) die Entwickelung die Gestalt

(5) $$\frac{\gamma + \delta\eta}{A(\alpha + \beta\eta)} = (t - a)^{-m}(\delta_0 + \delta_1(t - a) + \cdots) + \log(t - a)$$

hat,

$$\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad c = -\frac{2\pi i A\beta^2}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

gefunden wird. Setzt man

$$\delta_0 = \delta_0' + \delta_0'' i, \quad t - a = \varrho e^{\varphi i},$$

so ist in hinreichender Nähe von $t = a$

$$\frac{\gamma + \delta\eta}{A(\alpha + \beta\eta)} \text{ von } \quad \varrho^{-m}(\delta_0' \cos m\varphi + \delta_0'' \sin m\varphi) + \log \varrho$$
$$+ i[\varrho^{-m}(\delta_0'' \cos m\varphi - \delta_0' \sin m\varphi) + \varphi]$$

beliebig wenig verschieden; es entsprechen folglich, wenn die Zahl m von Null verschieden ist, allen Punkten in einer gewissen Umgebung von $\eta = \lambda$ Punkte einer gewissen Umgebung von $t = a$, und $\eta = \lambda$ ist auch wieder als ein Verzweigungspunkt der Function t von η aufzufassen. Wenn dagegen

$$r_1 - r_2 = m = 0$$

ist, so ist für alle Punkte in einer gewissen Umgebung von $t = a$ reale Theil von

$$\frac{\gamma + \delta\eta}{A(\alpha + \beta\eta)}$$

von dem Ausdrucke

$$\delta_0' + \log \varrho$$

beliebig wenig verschieden, also wenn t hinreichend nahe an a g nommen wird, wesentlich negativ, so dass in diesem Falle nicht all Punkten einer gewissen Umgebung von $\eta = \lambda$ Stellen t, die in d Umgebung von $t = a$ liegen, zugehören. Die Entwickelung (5) d Nr. 196 (S. 255) zeigt, dass t in der Nähe von $\eta = \lambda$ eindeutig i und dass die Function t von η den Werth a wirklich erreicht, we η so in den Punkt λ einrückt, dass der reale Theil des Ausdruckes

$$(6) \qquad -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{A\beta}\,\frac{1}{\alpha + \beta\eta}$$

negativ unendlich gross wird.

Wenn $\beta = 0$ ist, so tritt an die Stelle des Ausdruckes (6) d Ausdruck

$$\frac{1}{A\alpha}(\gamma + \delta\eta),$$

und an Stelle von (5) die Entwickelung (5a) der Nr. 196.

Allemal gehören auch in diesem Falle die sämmtlichen Stell

$$t = a, \quad \eta = S\lambda$$

zu den Grenzstellen des analytischen Gebildes (t, η), die dem Gebil nicht angehören; im Falle $r_1 - r_2 = 0$ sind die Stellen $\eta =$ Unbestimmtheitsstellen der Function t von η, ohne Verzweigun stellen derselben zu sein.

Wir erkennen aus diesen Betrachtungen zuvörderst, dass wir al dem Gebilde (t, η) angehörigen Stellen erhalten, wenn wir zu jede regulären, ferner zu den scheinbar singulären und denjenigen singuläre Stellen von t, denen elliptische Substitutionen entsprechen, die zug hörigen η-Werthe berechnen. Jeder dieser η-Werthe ist so beschaffe dass in demselben die Gruppe ϑ eigentlich discontinuirlich ist, den keiner dieser η-Werthe gehört der abgeschlossenen Punktmeng $P = Q + Q'$ an. Also ist die Punktmenge, die von der Gesammthei der η-Werthe, die zu einem t-Werthe der bezeichneten Art gehöre gebildet wird, eine isolirte, d. h. η ist eine isolirtwerthige Functio von t. Wir haben also mit Rücksicht auf die Bemerkungen de Nr. 202 (S. 279) den Satz:

Die Discontinuität der projectiven Gruppe ϑ innerhal der complexen Zahlenebene ist nothwendig und hinreichen dafür, dass der Integralquotient η eine isolirtwerthige Func

tion der unabhängigen Variabeln t ist. Der Werthevorrath dieser Function, d. h. die Projection des analytischen Gebildes (t, η) auf die η-Ebene, umfasst eines oder mehrere der Continua von Stellen, in denen die Gruppe ϑ eigentlich discontinuirlich ist.

Projiciren wir diejenigen Grenzstellen des analytischen Gebildes (t, η), die nicht dem Gebilde angehören, auf die η-Ebene, so gehören diese Projectionen der abgeschlossenen Punktmenge

$$P = Q + Q'$$

an. In jeder Nähe eines Punktes der Punktmenge nimmt nach den Ergebnissen der Nr. 199 (S. 269) die Function t von η jeden Werth beliebig oft an, es sind folglich die Stellen von P die Grenzstellen der isolirten Punktmenge, die von den zu einem Punkte t_0 des Existenzbereiches der Function η von t (der Existenzbereich ist nichts anderes wie die Projection des Gebildes (t, η) auf die t-Ebene) gehörigen η-Werthen gebildet wird, und wir sehen also, dass diese Grenzstellen unabhängig sind von der Wahl jenes Werthes t_0 und dass sie nur von der Natur der Gruppe ϑ abhängen.

Der Fall, dass einzelne dieser Grenzstellen, oder genauer, dass Stellen der Punktmenge Q, d. h. Doppelpunkte nicht elliptischer Substitutionen von ϑ, Verzweigungspunkte der Function t von η sind, kann, wie sich leicht zeigen lässt, nur dann eintreten, wenn die Function t von η eine unendlich vieldeutige ist.

In der That sei t als Function von η von endlicher Vieldeutigkeit.

Wäre dann für eine singuläre Stelle $t = a$ die Differenz $r_1 - r_2$ der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung nicht rational, also complex, oder eine von Null verschiedene ganze Zahl und es träten Logarithmen auf, so würden sich schon durch wiederholte Umkreisung der entsprechenden Stelle $\eta = \lambda$ unendlich viele Zweige der Function t von η ergeben. Wir haben also für die endliche Vieldeutigkeit der Function t von η die nothwendigen Bedingungen:

Die Gruppe ϑ muss discontinuirlich sein, und die Differenzen der Wurzeln der zu den singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen sind rationale Zahlen, wenn keine Logarithmen auftreten, und Null, wenn Logarithmen vorhanden sind.

Wenn zu der singulären Stelle $t = a$ eine elliptische Substitution gehört, und die Grösse $r_1 - r_2$ ist kein Stammbruch, sondern etwa

$$r_1 - r_2 = \frac{g}{h}, \quad g > 1,$$

wo g, h ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler bedeuten, so ist der Doppelpunkt $\eta = \lambda$ ein Verzweigungspunkt und zwar ein g-facher algebraischer Windungspunkt der Function t von η. Ebenso ist dann auch jeder Punkt $\eta = S\lambda$ ein g-facher Windungspunkt dieser Function; alle diese Verzweigungspunkte gehören dem Existenzbereiche der Function t an, und wenn diese Function von endlicher Vieldeutigkeit ist, so sind dies die einzigen isolirten Verzweigungsstellen, die überhaupt möglich sind.

204. Die Umkehrungsfunction des Integralquotienten ist eindeutig. Existenzbereich dieser Function.

Sei nun insbesondere t eine eindeutige Function von η; dann ist zufolge der algebraischen Bedingungen (Nr. 197, S. 256) der Existenzbereich der Function t in der η-Ebene frei von Verzweigungspunkten, jede Stelle der Punktmenge $P = Q + Q'$ ist eine Unbestimmtheitsstelle unserer Function, wo die Function in jeder Nähe jeden Werth beliebig oft annimmt, und umgekehrt muss auch jede Unbestimmtheitsstelle der Function der Punktmenge P angehören.

Betrachten wir eine Stelle $\eta = \eta_0$, die dem Existenzbereiche der Function t angehört, dann gehört η_0 einem der Continua an, die von den Stellen, in deren Nähe die Gruppe ϑ eigentlich discontinuirlich ist, gebildet werden. Falls alle diese Stellen ein einziges (zusammenhängendes) Continuum ausmachen, so ist dasselbe mit dem Existenzbereiche der Function t von η identisch. Sind dagegen mehrere von einander getrennte Continua vorhanden, so wird also das Continuum L, dem der betrachtete Punkt η_0 angehört, von den übrigen Continuis durch einen Theil der Punktmenge P getrennt, der, da er die Begrenzung eines Flächenstücks ausmachen muss, eine perfecte und zusammenhängende Punktmenge, im einfachsten Falle eine geschlossene continuirliche Curve bildet.

Auf dieser Curve ist dann ein Theil der Punktmenge Q überall dicht, und jeder Punkt der Curve ist eine Unbestimmtheitsstelle der eindeutigen Function t von η; es ist folglich nach bekannten functionentheoretischen Principien nicht möglich, die Function t über jene Curve hinweg in das benachbarte Continuum von Stellen, in denen die Gruppe ϑ discontinuirlich ist, fortzusetzen; d. h. der Existenzbereich der Function t ist auf das eine Continuum L beschränkt. Wir haben also den wichtigen Satz:

Wenn in der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}_2$) der Integralquotient η eine eindeutige Umkehrung zulässt, so ist der Existenzbereich dieser eindeutigen Umkehrungsfunction *ein* Continuum von Punkten, in denen die Gruppe ϑ eigentlich discontinuirlich ist, und dieses Continuum wird begrenzt von der Punktmenge Q der Doppelpunkte der nicht elliptischen Substitutionen der Gruppe ϑ und der ersten Ableitung Q' dieser Punktmenge; jeder Punkt dieser Begrenzung ist eine Stelle der Unbestimmtheit für die Umkehrungsfunction.

Wenn die Punktmenge $Q + Q'$ keinen einzigen Punkt enthält, d. h. wenn die discontinuirliche Gruppe ϑ der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}_2$) aus lauter elliptischen Substitutionen besteht, und es ist der Integralquotient eindeutig umkehrbar, so umfasst die Projection des Gebildes (t, η) auf die η-Ebene die ganze Ebene; t als Function von η besitzt keine Stelle der Unbestimmtheit und ist folglich eine rationale Function. Die Gruppe ϑ muss also in diesem Falle eine endliche sein, und die Differentialgleichung ($\mathfrak{A}_2$) ist algebraisch integrirbar.

In diesem Falle ist der Existenzbereich der Function t von η ein einfach zusammenhängender. Es giebt aber, wie wir später sehen werden, auch noch andere Fälle, wo dieser Existenzbereich einfach zusammenhängend ist. Weiss man, dass die von den Punkten der Punktmenge P begrenzten Continua von Punkten, wo die Gruppe ϑ eigentlich discontinuirlich ist, einfach zusammenhängende sind, so kann man nach einer Bemerkung der Nr. 197 (S. 259) aus dem Bestehen der algebraischen Bedingungen auf die Eindeutigkeit der Umkehrungsfunction des Integralquotienten schliessen. Hat man also eine discontinuirliche Gruppe von der gedachten Beschaffenheit, so fällt die Frage nach einer eindeutigen Function von η, die bei den Substitutionen jener Gruppe ungeändert bleibt, im wesentlichen zusammen mit der Frage, ob sich eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ($\mathfrak{A}_2$) angeben lässt, die keinen scheinbar singulären Punkt besitzt und für welche die gegebene Gruppe die Monodromiegruppe eines Integralquotienten darstellt. Diese Frage wird im folgenden Abschnitte ihre Erledigung finden.

Der Existenzbereich der Function t von η kann aber auch ein mehrfach zusammenhängender sein; in dem Fuchs'schen Beispiele (Nr. 197, S. 256) ist er z. B. ein zweifach zusammenhängender. Wir kommen später auf die hier nur berührte Frage der discontinuirlichen Gruppen und auf die damit zusammenhängenden Umkehrprobleme ausführlich zurück. Als das wesentliche Ergebniss der bisherigen Untersuchung heben wir die Thatsache hervor, dass die Natur der Um-

kehrungsfunction des Integralquotienten, sofern dieselbe eindeutig ganz allein von der Beschaffenheit der projectiven Gruppe ϑ abhä indem diese die Unbestimmtheitsstellen jener Function determinirt.

Wenn t als Function des Integralquotienten η zwar nicht deutig, aber von endlicher Vieldeutigkeit ist, so gilt, wie man lei übersieht, auch der Satz, dass der Existenzbereich dieser Function einem der Continua zusammenfallen muss, die von den Stellen, die Gruppe ϑ eigentlich discontinuirlich ist, gebildet werden. D auch in diesem Falle ist jeder Punkt der Punktmenge P eine St der Unbestimmtheit für die Function t, und da keine Stelle der Pu menge Q ein Verzweigungspunkt dieser Function sein kann, ist Fortsetzung von t über eine Linie hinweg, auf welcher die Punktme Q überall dicht ist, nicht möglich. Dagegen kann es sich, wen eine unendlich vielwerthige Function von η ist, ereignen, dass Existenzbereich dieser Function mehrere durch Theile der Punktme P von einander getrennte Continua umfasst; denn in diesem Falle k eine Fortsetzung der Function t von einem dieser Continua in anderes dadurch ermöglicht werden, dass eine Stelle der Punktmenge die auf der gemeinsamen Begrenzung zweier solcher Continua lie eine Verzweigungsstelle der Function t von η ist und dass jede Werthe von η in einer gewissen Umgebung dieser Stelle, oder in eine diese Stelle umgebenden ringförmigen Bereiche, Werthe von t in d Umgebung eines gewissen singulären Punktes der Differentialgleichu zugehören.

Wenn in einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung (die unabhängige Variable t eine eindeutige Function des Integr quotienten η ist, so liefert diese Function unmittelbar eine eindeuti Function der unabhängigen Variabeln η, die bei den Substitution der discontinuirlichen projectiven Gruppe ϑ ungeändert bleibt.

Wesentlich anders liegt es bei einer Differentialgleichung n^{ter} Or nung, wo $n > 2$ ist, wenn in derselben die unabhängige Variable t eindeutige Function der Integralquotienten $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ erschei da in diesem Falle der Bereich der Werthesysteme, deren diese Integr quotienten fähig sind, kein Continuum von derselben Dimension, die complexe $(n-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der una hängigen Veränderlichen $\eta_1, \cdots \eta_{n-1}$, sondern nur ein in die Mannigfaltigkeit enthaltenes eindimensionales continuirliches Gebil erfüllt. Gleichwohl lässt sich auch in diesem allgemeinen Falle Satz aufstellen, der dem für $n = 2$ in Bezug auf die Discontinui der projectiven Gruppe ϑ gefundenen analog ist.

Viertes Kapitel.

205. Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung. Discontinuirliche projective Gruppen in mehreren Veränderlichen. Beispiel solcher Gruppen durch Betrachtung hyperelliptischer Integrale erster Gattung.

Sei, wie in der Nr. 194 (S. 264),

$$\text{(I)} \qquad \frac{d^n \mathfrak{y}}{dt^n} + r_2(t)\frac{d^{n-2}\mathfrak{y}}{dt^{n-2}} + \cdots + r_n(t)\mathfrak{y} = 0$$

die vorgelegte Differentialgleichung, $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ ein Fundamentalsystem von Integralquotienten, ϑ die zu demselben gehörige projective Monodromiegruppe. Wir fassen auch hier das analytische Gebilde

$$\text{(II)} \qquad (t, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1})$$

in's Auge, welches durch die Functionen von t, die als Integralquotienten der Differentialgleichung (I) mit $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ bezeichnet wurden, in dem Gebiete der n complexen Veränderlichen

$$t, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$$

definirt wird. Dieses Gebiet ist eine $2n$-fach ausgedehnte reale ebene Mannigfaltigkeit R_{2n}, deren Punkte durch die realen Theile und Coefficienten von i der complexen Grössen

$$t = t' + t''i, \quad \eta_\varkappa = \eta_\varkappa' + \eta_\varkappa'' i \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n-1)$$

bestimmt werden.

Eine Stelle

$$t = t_0, \quad \eta_1 = \delta_1, \cdots \eta_{n-1} = \delta_{n-1}$$

wird dem Gebilde (II) zugezählt, wenn sich ein Parameter τ so angeben lässt, dass alle Werthesysteme $t, \eta_1, \cdots \eta_{n-1}$, die durch die Gleichungen

$$\text{(III)} \qquad t = t_0 + \mathfrak{P}(\tau), \quad \eta_\varkappa = \delta_\varkappa + \mathfrak{P}_\varkappa(\tau) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n-1),$$

wo $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \cdots \mathfrak{P}_{n-1}$ gewöhnliche Potenzreihen bedeuten, für hinreichend kleine Werthe von τ geliefert werden, so beschaffen sind, dass für den Werth t der unabhängigen Variabeln die Werthe $\eta_1, \cdots \eta_{n-1}$ der Integralquotienten zum Vorschein kommen. Die Projection des

Gebildes (II) auf die $2(n-1)$-fach ausgedehnte reale ebene Mannigfaltigkeit R_{2n-2} der $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$ bestimmt in dieser Mannigfaltigkeit ein continuirliches Gebilde, welches der früher betrachteten complexen Integralcurve $\mathfrak{C}$ analog ist, und welches wir als das Integralgebilde $\mathfrak{C}$ bezeichnen wollen. Die Punkte dieses Integralgebilde machen den Existenzbereich der Function t der Integralquotiente $\eta_1, \cdots \eta_{n-1}$ aus.

Wenn diese Function t eine eindeutige ist, d. h. wenn jeder Punkt des Integralgebildes $\mathfrak{C}$ nur für einen Werth von t zum Vorschein kommt, so stellen die Gleichungen (III) das ganze Gebilde (II) in einer gewissen Umgebung der Stelle $(t_0, \delta_1, \cdots \delta_{n-1})$ dar; d. h. wenn wir mit ε eine hinreichend kleine positive Grösse bezeichnen, so werden alle Stellen des Gebildes (II), für welche gleichzeitig

$$|t-t_0|<\varepsilon, \quad |\eta_1-\delta_1|<\varepsilon, \cdots |\eta_{n-1}-\delta_{n-1}|<\varepsilon$$

ist, unter den sich aus den Gleichungen (III) für hinreichend kleine Werthe von τ ergebenden Werthesystemen von $t, \eta_1, \cdots \eta_{n-1}$ enthalten sein. Oder mit anderen Worten; wenn

$$\delta_x = \delta_x' + i\delta_x'' \qquad (x=1,2,\cdots n-1),$$
$$t_0 = t_0' + it_0''$$

gesetzt wird, so stellen die Gleichungen (III) alle Punkte des Gebildes (II) dar, für welche die Summe

$$(t'-t_0')^2 + (t''-t_0'')^2 + \sum_{x=1}^{n-1}\left[(\eta_x'-\delta_x')^2 + (\eta_x''-\delta_x'')^2\right]$$

hinreichend klein ist.

Daraus schliessen wir, dass, wenn $(t_0, \bar{\delta}_1, \cdots \bar{\delta}_{n-1})$ ebenfalls eine Stelle des Gebildes (II) darstellt und

$$\bar{\delta}_x = \bar{\delta}_x' + i\bar{\delta}_x'' \qquad (x=1,2,\cdots n-1)$$

gesetzt wird, stets eine endliche positive Grösse δ so angegeben werden kann, dass

$$\sum_{x=1}^{n-1}\left[(\bar{\delta}_x'-\delta_x')^2 + (\bar{\delta}_x''-\delta_x'')^2\right] > \delta^2$$

ist, d. h. schneiden wir das Gebilde (II) durch die Ebene $t=t_0$, so bilden die Schnittpunkte auf dieser Ebene und folglich auch deren Projectionen auf die Mannigfaltigkeit R_{2n-2} der $(\eta_1, \cdots \eta_{n-1})$ eine isolirte Punktmenge.

Diese Punktmenge entsteht aber aus dem Punkte $(\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_{n-1})$ des Integralgebildes $\mathfrak{C}$ durch Anwendung aller Substitutionen der projectiven Gruppe ϑ; diese Gruppe muss also die Eigenschaft haben, dass

wenn $(\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_{n-1})$ irgend eine Stelle des Integralgebildes $\mathfrak{C}$ bedeutet, keines der Werthesysteme

$$S(\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_{n-1}),$$

die aus $(\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_{n-1})$ durch irgend eine von der identischen Substitution verschiedene Substitution S der Gruppe ϑ hervorgehen, einen Punkt darstellt, der sich innerhalb einer gewissen mit einem endlichen Radius δ um den Punkt $(\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_{n-1})$ beschriebenen sphärischen Umgebung

$$\sum_{\varkappa=1}^{n-1}\left[(\eta_\varkappa' - \delta_\varkappa')^2 + (\eta_\varkappa'' - \delta_\varkappa'')^2\right] \leq \delta^2$$

befindet.

Wir sagen von einer Gruppe projectiver Substitutionen in $(n-1)$ Grössen $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$, sie sei in dem Gebiete der $(n-1)$ complexen Grössen $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$, d. h. im R_{2n-2} discontinuirlich, wenn es einen Punkt $(\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_{n-1})$ dieses Gebietes giebt, um den sich eine sphärische Umgebung von endlichem Radius so abgrenzen lässt, dass innerhalb derselben kein Punkt liegt, der aus $(\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_{n-1})$ durch eine (von der 1 verschiedene) Substitution der Gruppe hervorgeht. Wie für $n = 2$ in der Nr. 202 (S. 279 ff.) lassen sich auch für beliebiges n die folgenden Eigenschaften einer discontinuirlichen Gruppe nachweisen.

Die Punktmenge, die aus $(\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_{n-1})$ durch die Substitutionen der Gruppe hervorgeht, ist eine isolirte.

Eine discontinuirliche Gruppe ist abzählbar.

Die Gesammtheit der Stellen, an denen die Gruppe eigentlich discontinuirlich ist, d. h. der Stellen, für welche die Punktmenge, die aus einer dieser Stellen durch die Transformationen der Gruppe hervorgeht, eine isolirte ist, bildet ein oder mehrere Continua im Gebiete R_{2n-2}.

Wir haben also zunächst den Satz:

Wenn in einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung die unabhängige Variable t eine eindeutige Function des Ortes der Integralcurve $\mathfrak{C}$ ist, so ist die projective Monodromiegruppe ϑ der Integralquotienten, bei deren Substitutionen diese Function ungeändert bleibt, eine discontinuirliche.

Wir heben ferner noch besonders hervor, dass die Gruppe ϑ nicht nur für die Stellen des Integralgebildes $\mathfrak{C}$, sondern für alle Punkte gewisser $(2n-2)$-fach ausgedehnter Continua eigentlich discontinuirlich sein muss; es könnte also auch eindeutige Functionen der unbeschränkt veränderlichen complexen Grössen $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}$

geben, die bei den Substitutionen von ϑ ungeändert bleiben, und der That lassen sich unter Anwendung eines von Herrn Poinca entdeckten Princips für jede gegebene discontinuirliche Gruppe in l liebig vielen complexen Veränderlichen Functionen dieser Veränd lichen bilden, die bei den Substitutionen jener Gruppe ungeänd bleiben. Wir werden von diesem Poincaré'schen Verfahren an späte Stelle (Nr. 307) ausführlich zu handeln haben.

Auch die Aufstellung von discontinuirlichen projectiven Grupp hat selbst für $n > 2$ keine erheblichen Schwierigkeiten; es handelt s aber dann darum, zu untersuchen, ob es lineare Differentialgleichung giebt, für welche eine auf irgend eine Weise erlangte projective c continuirliche Gruppe die Monodromiegruppe der Integralquotient bildet, und für welche die unabhängige Variable als eindeutige Functi des Ortes auf der Integralcurve erscheint.

Die Untersuchungen des folgenden Abschnittes werden zeigen, da diese Frage für Differentialgleichungen höherer Ordnung einen wese lich anderen Charakter hat, wie für Differentialgleichungen zweit Ordnung, für welch' letztere durch die von Herrn Poincaré gegebe Aufstellung aller projectiven discontinuirlichen Gruppen einer Variabe und der bei den Substitutionen derselben unveränderlichen Function in der That auch die Aufgabe, alle linearen Differentialgleichungen m eindeutig umkehrbaren Integralquotienten aufzufinden, vollständig (ledigt ist.

Eine Classe von discontinuirlichen Gruppen in mehreren Veränd lichen hat Jacobi bei Gelegenheit seiner bereits erwähnten Unt suchungen über die hyperelliptischen Integrale entdeckt; wir wollen, wir auf Betrachtungen, die sich auf jene Integrale beziehen, no wiederholt zurückzukommen haben, kurz die von Jacobi und sein Nachfolgern gegebene Theorie skizziren.

Hat man ein hyperelliptisches Gebilde

$$(1)\qquad s = \sqrt{(z-a_0)(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_{2p+1})},$$

wo $a_0, a_1, a_2, \cdots a_{2p+1}$ von einander verschiedene complexe Grös bedeuten, so bezeichnet man bekanntlich

$$u_x = \int^z \frac{g_x(z)\,dz}{s}$$

als Integral erster Gattung, wenn $g_x(z)$ eine ganze rationale Funct von höchstens $(p-1)^{\text{tem}}$ Grade ist. Legt man durch die Pun $a_0, a_1, \cdots a_{2p+1}$ die Querschnitte $l_0, l_1, \cdots l_{2p+1}$ nach dem unendl fernen Punkte hin und bezeichnet den Werth von u_x, der in ei Punkte z erzielt wird, wenn man mit einem bestimmten Werthe vo

und von einer gewissen unteren Grenze z_0 ausgehend, auf einem in der zerschnittenen Ebene $\overline{T}$ verlaufenden Wege nach z hin integrirt, durch $\bar{u}_\varkappa(z)$, so ergiebt sich der allgemeinste Werth, dessen die Function $u_\varkappa$ im Punkte z fähig ist, in folgender Weise.

Bedeute $\alpha_{\varkappa\lambda}$ den Werth des Integrales $u_\varkappa$, wenn dasselbe über eine vom Punkte z_0 ausgehende, den Punkt a_λ umschlingende Schleife erstreckt wird, für $\lambda = 0, 1, 2, \cdots 2p + 1$, dann ist zunächst, da $z = \infty$ kein singulärer Punkt ist,

$$\alpha_{\varkappa 0} - \alpha_{\varkappa 1} + \alpha_{\varkappa 2} - \cdots - \alpha_{\varkappa, 2p+1} = 0.$$

Jeder Werth, dessen die Function $u_\varkappa$ im Punkte z fähig ist, ist dann in einer der beiden Formen

$$\bar{u}_\varkappa(z) + m_1(\alpha_{\varkappa 0} - \alpha_{\varkappa 1}) + m_2(\alpha_{\varkappa 0} - \alpha_{\varkappa 2}) + \cdots + m_{2p}(\alpha_{\varkappa 0} - \alpha_{\varkappa, 2p}),$$

$$\alpha_{\varkappa 0} - \bar{u}_\varkappa(z) + m_1(\alpha_{\varkappa 0} - \alpha_{\varkappa 1}) + m_2(\alpha_{\varkappa 0} - \alpha_{\varkappa 2}) + \cdots + m_{2p}(\alpha_{\varkappa 0} - \alpha_{\varkappa, 2p})$$

enthalten, wo $m_1, m_2, \cdots m_{2p}$ irgend welche positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, die nur von der Beschaffenheit des Weges abhängen, längs dessen die Integration von z_0 ausgehend ausgeführt wurde, und die Werthe von $u_\varkappa$, die im Punkte z zum Vorschein kommen auf Wegen, für welche die Quadratwurzel s auch ihr Zeichen beibehält, sind durch die erste dieser beiden Formeln gegeben. Die Differenzen

$$A_{\varkappa\lambda} = \alpha_{\varkappa 0} - \alpha_{\varkappa\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots 2p)$$

heissen die zu dem Integrale $u_\varkappa$ gehörigen Periodicitätsmoduln.

Wählen wir die ganze Function $g_\varkappa(z)$ auf p verschiedene Arten so, dass zwischen den diesen Wahlen

$$g_1(z), \quad g_2(z), \quad \cdots \; g_p(z)$$

entsprechenden Integralen

$$u_\varkappa(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{g_\varkappa(z)\,dz}{s} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots p)$$

keine lineare Relation mit constanten Coefficienten stattfindet, so lässt sich jedes zu dem Gebilde (1) gehörige Integral erster Gattung in der Form

$$c_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_p u_p$$

darstellen, wo die $c_0, c_1, \cdots c_p$ Constanten bedeuten.

Die Aenderungen, die das Functionssystem $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots \bar{u}_p$ bei allen möglichen geschlossenen Umläufen der unabhängigen Variabeln z erfährt, werden dann durch die Substitutionen einer projectiven Gruppe G_p in p Variabeln bestimmt, für welche die $2p + 1$ Substitutionen

$$(2)\qquad \begin{cases}(u_1 + A_{1\lambda}, & u_2 + A_{2\lambda}, & \cdots & u_p + A_{p\lambda}) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots 2p),\\ (\alpha_{10} - u_1, & \alpha_{20} - u_2, & \cdots & \alpha_{p0} - u_p)\end{cases}$$

und deren inverse eine Basis darstellen.

Betrachtet man statt der sämmtlichen p Functionen $u_1, u_2, \cdots u_p$ deren nur $q < p$, etwa $u_1, u_2, \cdots u_q$, so erfahren diese bei allen möglichen Umläufen von z ebenfalls die Substitutionen einer projectiven Gruppe G_q in q Variabeln, für welche die $2p + 1$ Substitutionen

$$(u_1 + A_{1\lambda}, \quad u_2 + A_{2\lambda}, \quad \cdots \quad u_q + A_{q\lambda}) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots 2p),$$
$$(\alpha_{10} - u_1, \quad \alpha_{20} - u_2, \quad \cdots \quad \alpha_{q0} - u_q)$$

und ihre inversen eine Basis bilden. Diese Gruppe ist nun, wenn $q < p$ ist, niemals discontinuirlich, d. h. es giebt keine Stelle $(u_1, u_2, \cdots u_q)$ im Bereiche der $2q$-fach ausgedehnten ebenen realen Mannigfaltigkeit R_{2q}, für welche die Gruppe G_q eigentlich discontinuirlich wäre. Dies ergiebt sich aus dem folgenden von Jacobi herrührenden Satze:

Es lassen sich nach Vorschrift von q willkürlichen complexen Grössen $r_1, r_2, \cdots r_q$ und einer positiven Grösse δ von beliebiger Kleinheit stets $2p$ ganze Zahlen $m_1, m_2, \cdots m_{2p}$ so finden, dass

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{2p} m_\lambda A_{\varkappa\lambda} - r_\varkappa\right| < \delta \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots q),$$

falls zwischen den $A_{\varkappa\lambda}$ nicht gewisse Beziehungen mit ganzzahligen Coefficienten bestehen und q kleiner ist wie p.

Hiernach ist nämlich das durch die $q < p$ Functionen $u_1, u_2, \cdots u_q$ bestimmte analytische Gebilde in dem ganzen $2(q+1)$-fach ausgedehnten Gebiete der $u_1, u_2, \cdots u_q, t$ überall dicht, und das Functionssystem $u_1, u_2, \cdots u_q$ kommt für jeden beliebigen Werth von t jedem Punkte der $2q$-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeit R_{2q} beliebig nahe.

Dagegen ist die Gruppe G_p discontinuirlich, und zwar ist sie für jeden endlichen Punkt $(u_1, u_2, \cdots u_p)$ der $2p$-fach ausgedehnten realen ebenen Mannigfaltigkeit R_{2p} eigentlich discontinuirlich. Es folgt dies indirect daraus, dass, wenn man im R_{2p} das durch den Werthevorrath der Functionen

$$(3)\qquad u_1(z), \quad u_2(z), \quad \cdots \quad u_p(z)$$

bestimmte Gebilde $\mathfrak{C}$ in's Auge fasst und die abhängige Variable z als Function des Ortes auf diesem Gebilde $\mathfrak{C}$ studirt, gewisse rationale Functionen von z sich als eindeutige Functionen der Integrale (3) ergeben. Diese Functionen bleiben dann offenbar ungeändert, wenn

man die Integrale $u_1, u_2, \cdots u_p$ durch eine Substitution der Gruppe G_p transformirt. Nach den Untersuchungen von Herrn Weierstrass und Riemann gelangt man zu einer Darstellung dieser eindeutigen Functionen in folgender Weise.

206. Lösung des Umkehrproblems durch die Weierstrass'sche ϑ-Function. Jacobi'sches Umkehrproblem. Elliptische Functionen.

Man kann die ganzen Functionen $g_\varkappa(x)$ so wählen oder kann lineare Verbindungen der $u_1, u_2, \cdots u_p$ mit constanten Coefficienten so herstellen, dass die so entstehenden Integrale erster Gattung

(4) $$w_1(z), \quad w_2(z), \cdots w_p(z)$$

die Periodicitätsmoduln

$$\begin{array}{l} \pi i, \ 0, \cdots \ 0, \ b_{11}, b_{12}, \cdots b_{1p}, \\ 0, \pi i, \cdots \ 0, \ b_{21}, b_{22}, \cdots b_{2p}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0, \ 0, \cdots \pi i, \ b_{p1}, b_{p2}, \cdots b_{pp} \end{array}$$

besitzen. Allgemein bestehen zwischen den Periodicitätsmoduln eines Systems linear unabhängiger Integrale erster Gattung gewisse von Herrn Weierstrass entdeckte algebraische Beziehungen, von denen wir an späterer Stelle noch ausführlich handeln werden; diese Beziehungen haben für die Periodicitätsmoduln der $w_1, w_2, \cdots w_p$ die einfache Gestalt

(5) $$b_{\varkappa\lambda} = b_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots p),$$

und überdies ist der reale Theil der quadratischen Form

(6) $$\sum_{\varkappa=1}^{p} \sum_{\lambda=1}^{p} b_{\varkappa\lambda} n_\varkappa n_\lambda = \varphi(n_1, n_2, \cdots n_p)$$

für reale Werthesysteme der $n_1, n_2, \cdots n_p$ negativ.

Die Weierstrass'sche Thetareihe

$$\vartheta(v_1, v_2, \cdots v_p) = \sum_{(n_1, n_2, \cdots n_p)}^{(p)} e^{\varphi(n_1, n_2, \cdots n_p) + 2(n_1 v_1 + n_2 v_2 + \cdots + n_p v_p)},$$

wo die $n_1, n_2, \cdots n_p$ alle Systeme von p ganzen Zahlen durchlaufen, convergirt dann für alle endlichen Werthesysteme der $v_1, v_2, \cdots v_p$.

Bezeichnet man die Punkte $a_0, a_1, \cdots a_{2p+1}$ in irgend einer Reihenfolge durch

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_p, \quad \beta, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_p$$

und setzt

$$f(z) = \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_p)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_p)},$$

so erhält man zur Berechnung von z als Function der Integra
oder der mit denselben linear verknüpften Integrale (3) die For

$$(7)\quad \frac{f(z)}{\sqrt{f(\alpha)f(\beta)}} = \frac{\vartheta\left(w_1(z) - \sum_{\lambda=1}^{p} w_1(\alpha_\lambda),\ w_2(z) - \sum_{\lambda=1}^{p} w_2(\alpha_\lambda),\ \cdots\ w_p(z) - \sum_{\lambda=1}^{p} w_p\right.}{\vartheta\left(w_1(z) - \sum_{\lambda=1}^{p} w_1(\beta_\lambda),\ w_2(z) - \sum_{\lambda=1}^{p} w_2(\beta_\lambda),\ \cdots\ w_p(z) - \sum_{\lambda=1}^{p} w_p\right.}$$

Wir sehen, dass die Darstellung der Function z des Ortes au
Gebilde $\mathfrak{C}$ erfolgt mit Hülfe einer Function von p unabhän
Variabeln

$$\vartheta(v_1, v_2, \cdots v_p),$$

die die Eigenschaft hat, sich mit gewissen Exponentialfunction
multipliciren, wenn auf die $v_1, v_2, \cdots v_p$ eine Substitution der G
G_p ausgeübt wird. Von dieser ϑ-Function kann man leicht
Quotientenbildung zu Functionen von p unabhängigen Variabe
langen, die bei den Substitutionen der Gruppe G_p absolut unge
bleiben; es ist aber von der grössten Bedeutung, dass man auch
Zuhülfenahme der ϑ-Function direct von der Function z der
grale $u_1, u_2, \cdots u_p$, d. h. des Ortes auf dem Gebilde $\mathfrak{C}$, zu Func
der als unabhängig veränderliche Grössen aufzufassenden $u_1, u_2,$
gelangen kann, die bei den Substitutionen von G_p ungeändert b
und zwar geschieht dies mit Hülfe des Abel'schen Theorems.

Durch Anwendung dieses berühmten Theorems kann man nä
wie wir hier nicht näher ausführen wollen, von dem Gleichungss

$$(8)\qquad u_\varkappa(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{g_\varkappa(z)\,dz}{s} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots p)$$

zu den Gleichungen des sogenannten Jacobi'schen Umkehrpr

$$(9)\qquad u_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{p} \int_{b_\lambda}^{z_\lambda} \frac{g_\varkappa(z)\,dz}{s}. \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots p)$$

gelangen, wo die $b_1, \cdots b_p$ Constanten, die $z_1, z_2, \cdots z_p$ von ei
unabhängige Grössen bedeuten, die durch diese Gleichungen als Fun
der unabhängigen Variabeln $u_1, u_2, \cdots u_p$ eindeutig bestimmt
Eine explicite Darstellung dieser Functionen hat zuerst Herr
strass mit Hülfe seiner allgemeinen ϑ-Function gegeben, dies
der Darstellung (7) der durch die Gleichungen (8) definirten Fu
der Integrale (3) ganz analog.

Die Gleichungen (9) liefern auch noch eine eindeutige Bestimmung der $z_1, z_2, \cdots z_p$ als Functionen der $u_1, u_2, \cdots u_p$, wenn unter den Integralzeichen an die Stelle der

$$(\alpha) \qquad \frac{g_\varkappa(z)}{s}\, dz \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots p)$$

irgend ein System von Differentialen erster Gattung eines beliebigen algebraischen Gebildes vom Range (Geschlecht) p gesetzt wird. Aber auch dann sind die so definirten eindeutigen Systeme von $2p$-fach periodischen Functionen nicht die allgemeinsten, indem zwischen den Perioden der aus dem Jacobi'schen Umkehrprobleme entspringenden Functionen (für $p > 3$) Beziehungen stattfinden, die zwischen den $\frac{p(p+1)}{2}$ Constanten, von denen die quadratische Form φ der allgemeinen ϑ-Function abhängt, nicht bestehen müssen. Die Argumente der allgemeinsten, durch ϑ-Functionen darstellbaren $2p$-fach periodischen Functionen von p Variabeln lassen sich zwar nicht immer als Summen von p Integralen erster Gattung, wohl aber als Summen von p algebraischen Integralen von anderer Beschaffenheit darstellen.

Für $p = 1$, d. h. im Falle der elliptischen Functionen, führt die Lösung des Umkehrproblems für das Integral erster Gattung

$$(10) \qquad u = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(z-a_0)(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}}$$

zu den allgemeinsten doppeltperiodischen Functionen. Wenn nämlich zwei beliebige Grössen ω_1, ω_2 gegeben sind, die der einzigen Bedingung, die für die Perioden einer doppeltperiodischen eindeutigen Function erfüllt sein muss, Genüge leisten, der Bedingung nämlich, dass der Quotient $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ nicht real, d. h. dass die Gruppe

$$u + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2,$$

wo m_1, m_2 ganze Zahlen bedeuten, eine discontinuirliche ist, so kann man die beiden Invarianten (vergl. Nr. 276) der biquadratischen Form

$$(11) \qquad (z-a_0)(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)$$

stets und zwar nur auf eine Weise so bestimmen, dass sich aus der Gleichung (10) z als doppeltperiodische Function von u mit den Perioden ω_1, ω_2 ergiebt. Dass man die Invarianten der Form (11), d. h. diejenigen ganzen Functionen der Coefficienten dieser Form, die ungeändert bleiben, wenn man die Form durch eine beliebige Substitution von der Gestalt

(12) $$z = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

transformirt, in Betracht zieht, liegt daran, dass durch Anwendung der Substitution (12) der Charakter des Integrales (10) nicht geändert wird. Statt die beiden Invarianten der allgemeinen Form (11) zu betrachten, kann man auch zuerst durch geeignete Wahl der Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in (12) drei der Nullstellen der biquadratischen Form für z in die Punkte

$$\zeta = 0,\ 1,\ \infty$$

verlegen und dann die vierte Nullstelle als Function von ω_1, ω_2 studiren; es entspricht dies der Transformation des elliptischen Integrales (10) in die Normalform

$$u = \int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\lambda\zeta)}}.$$

Diese vierte Nullstelle λ ist dann eine eindeutige Function des Periodenverhältnisses $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, die sogenannte elliptische Modulfunction, mit der wir uns noch eingehend zu beschäftigen haben werden.

Wir sehen also hier, dass sich, wenn das System der Perioden, d. h. die Gruppe der Function z von u willkürlich gegeben ist, die Coefficienten der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{z - a_0 \cdot z - a_1 \cdot z - a_2 \cdot z - a_3},$$

die diese Function definirt, eindeutig bestimmen lassen. Für $p > 1$ kann man die $2p$ Perioden, ja selbst die Perioden $b_{\lambda\varkappa}$, wie sie in der allgemeinen ϑ-Function auftreten, nicht mehr willkürlich vorschreiben und dann die Coefficienten der Gleichungen des Jacobi'schen Umkehrproblems als Functionen derselben bestimmen; sondern damit eine solche Bestimmung möglich sein soll, müssen zwischen den Grössen $b_{\lambda\varkappa}$ nicht nur die Beziehungen (5) und die Bedingung, dass der reale Theil der quadratischen Form (6) negativ sei, sondern ausser diesen für $p > 3$ noch

$$\frac{(p-2)(p-3)}{2}$$

andere Relationen bestehen. Wir werden ähnliche Ergebnisse finden, wenn wir uns die Aufgabe stellen, eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung anzugeben, für welche die Monodromiegruppe der Integralquotienten gegeben ist. Diese Aufgabe wollen wir im folgenden Kapitel behandeln.

Fünftes Kapitel.

207. Die in den Coefficienten einer linearen Differentialgleichung auftretenden Parameter als Functionen der Fundamentalinvarianten. Constantenzählung. Auftreten von scheinbar singulären Stellen.

Wir denken uns die lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung der Fuchs'schen Classe in der Form geschrieben, wo der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung gleich Null ist:

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n y = 0$$

und bezeichnen mit $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen, mit h die demselben entsprechende unimodulare Monodromiegruppe; ferner sei

$$\eta_\varkappa = \frac{y_{\varkappa+1}}{y_1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n-1)$$

ein System von Integralquotienten und ϑ die zu demselben gehörige mit h isomorphe projective Monodromiegruppe. Da der identischen Substitution von ϑ nur Substitutionen von h entsprechen können, welche die $y_1, y_2, \cdots y_n$ mit einer n^{ten} Einheitswurzel multipliciren (Nr. 180, S. 179), so können wir an Stelle von h gleich die Gruppe ϑ betrachten.

Wir scheiden unter den singulären Stellen der Differentialgleichung (A) die scheinbar singulären Punkte $b_1, b_2, \cdots b_\tau$ von den übrigen, den wirklich singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$, welch' letzteren wir den unendlich fernen Punkt, falls derselbe weder reguläre noch scheinbar singuläre Stelle ist, als $a_{\sigma+1}$ bereits zugezählt denken. Bei Umläufen um die scheinbar singulären Stellen $b_1, b_2, \cdots b_\tau$ bleiben die Integralquotienten $\eta_1, \cdots \eta_{n-1}$ ungeändert. Die wirklichen singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$ denken wir uns aus der Ebene der complexen Variabeln x ausgesondert, und die so entstehende Fläche T durch die σ von den Punkten $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ nach $a_{\sigma+1}$ hin gelegten Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$ in eine einfach zusammenhängende $\overline{T}$ zerschnitten.

Dann sind also innerhalb $\overline{T}$ die Integralquotienten $\eta_1, \cdots \eta_{n-1}$ eindeutig und erfahren, wenn x den Querschnitt $l_\varkappa$ im positiven Sinne

überschreitet, eine gewisse projective Substitution $A_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$, wenn x die Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$ der Reihe nach in negativem Sinne überschreitet, eine projective Substitution $A_{\sigma+1}$, und es ist

(1) $$A_{\sigma+1} = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_\sigma^{-1} = (A_\sigma A_{\sigma-1} \cdots A_1)^{-1}.$$

Die Substitutionen

$$A_1, \; A_2, \; \cdots \; A_\sigma, \; A_{\sigma+1}$$

bilden dann eine Basis der Gruppe ϑ, und die Gruppe ist vollkommen bestimmt, wenn die Coefficienten der σ Substitutionen

(2) $$A_1, \; A_2, \; \cdots \; A_\sigma$$

bekannt sind. Da wir es mit projectiven Substitutionen zu thun haben so hängt jedes $A_\varkappa$ von $n^2 - 1$, die σ Substitutionen (2) also im Ganzen von

$$\sigma(n^2 - 1)$$

Constanten ab.

Da wir ähnlich wie in der Nr. 121 (Bd. I, S. 440) die Gruppe ϑ nur in ihrer Beziehung zur Differentialgleichung untersuchen wollen, so können wir uns ϑ noch durch eine willkürliche projective Substitution, die von dem Quotientensysteme $\eta_1, \cdots \eta_{n-1}$ zu irgend einem andern Fundamentalsysteme von Integralquotienten überführt, transformirt denken, so dass also (vergl. a. a. O.) unsere Gruppe ϑ von

$$(\sigma - 1)(n^2 - 1) = \mathsf{N}$$

wesentlichen Constanten abhängt. Wir können z. B. auch hier ein System von Fundamentalinvarianten als diese Constanten ansehen, darüber wollen wir aber nichts Genaueres festsetzen, sondern annehmen, die Gruppe ϑ sei, abgesehen von der transformirenden Substitution, durch die N Parameter

(3) $$\alpha_1, \; \alpha_2, \; \cdots \; \alpha_{\mathsf{N}}$$

bestimmt. Wir wissen dann nach den Ergebnissen des achten Abschnittes, wie wir diese Parameter der Gruppe als Functionen der in den Coefficienten der Differentialgleichung auftretenden Parameter berechnen können.

Wir wollen jetzt die umgekehrte Aufgabe behandeln, d. h. wir fragen nach der Art der functionalen Abhängigkeit der in den Coefficienten der Differentialgleichung (A) auftretenden Constanten von den Parametern (3) der Gruppe ϑ.

Die Coefficienten von (A) haben, da die Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe angehören sollte, nach den Ergebnissen der Nr. 62 (Bd. I, S. 220) die Gestalt

$$p_\varkappa = \frac{F_{(\sigma+\tau-1)\varkappa}(x)}{Q(x)} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n),$$

wo

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_\sigma)(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_\tau)$$

gesetzt wurde und $F_\nu(x)$ eine ganze Function vom höchstens ν^{ten} Grade in x bedeutet. Die Differentialgleichung hängt demnach ab

1) von den $\sigma + \tau$ singulären Stellen $a_1, \cdots a_\sigma, b_1, \cdots b_\tau$,

2) von den (vergl. Nr. 68, Bd. I, S. 240)

$$\frac{n(n+1)}{2}(\sigma+\tau) - \frac{n(n-1)}{2} - \sigma - \tau$$

Coefficienten der ganzen Functionen

$$F_{2(\sigma+\tau-1)}, \cdots F_{n(\sigma+\tau-1)},$$

d. h. also im Ganzen von

$$(n, \sigma+\tau) = \frac{n(n+1)}{2}(\sigma+\tau) - \frac{n(n-1)}{2}$$

Parametern. Zwischen diesen bestehen noch die algebraisch ausdrückbaren Beziehungen, welche bewirken, dass die Punkte $b_1, b_2, \cdots b_\tau$ scheinbar singuläre Stellen sind. Diese sind für $b_\varkappa$ zunächst $n-1$ Bedingungen für die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung und ferner (vergl. Nr. 55, Bd. I, S. 197) die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen, die das Auftreten von Logarithmen verhindern. Also entsprechen jedem scheinbar singulären Punkte $b_\varkappa$

$$\frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

Bedingungen, so dass die Differentialgleichung (A) von

$$(n, \sigma+\tau) - \tau\,\frac{(n+2)(n-1)}{2},$$

d. h. von

$$\frac{n(n+1)}{2}\sigma + \tau - \frac{n(n-1)}{2}$$

Parametern abhängt. Durch eine lineare Transformation der unabhängigen Variabeln x kann man bewirken, dass

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

wird ($a_{\sigma+1} = \infty$ hatten wir schon von vornherein vorausgesetzt), es sind also noch zwei von der gefundenen Anzahl abzuziehen. Die endgültige Zahl der Parameter ist demnach

$$\frac{n(n+1)}{2}\sigma + \tau - 2 - \frac{n(n-1)}{2}.$$

Wäre die Anzahl τ der scheinbar singulären Stellen gleich Null, so hingen die Coefficienten der Differentialgleichung (A) von

(4) $$\frac{n(n+1)}{2}\sigma - \frac{n(n-1)}{2} - 2$$

Parametern ab; die Anzahl N der Parameter der Gruppe ϑ ist im A
gemeinen grösser, nur für $n = 2$ stimmt die Zahl (4) mit N überei
Wir erschliessen hieraus den folgenden Satz:

Die Parameter der projectiven Monodromiegruppe der Integralquotienten einer linearen Differentialgleichur zweiter Ordnung ohne scheinbar singuläre Stellen brauche keinerlei durch Gleichungen darstellbare Bedingungen zu e füllen; dagegen müssen zwischen diesen N Parametern fi eine von scheinbar singulären Stellen freie Differentia gleichung von der Ordnung $n > 2$

$$N - \sigma\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + 2 = \sigma\left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - 1\right) - \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 3\right.$$

Relationen bestehen, wenn σ die Anzahl der wirklichen si gulären im Endlichen gelegenen Stellen bedeutet.

Die linearen Differentialgleichungen ohne scheinbar singulä Stellen sind in gewissem Sinne das Analogon der Integrale erst Gattung eines algebraischen Gebildes; man könnte darum die zwisch den Parametern der Gruppe ϑ für $n > 2$, $\sigma > 1$ bestehenden B ziehungen den im vorigen Abschnitte erwähnten Beziehungen zwische den Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung, die zu Gebild vom Range $p > 1$ gehören, an die Seite stellen, und weiter den Fa $n = 2$ als das Analogon des Falles $p = 1$, d. h. der elliptischen Int grale betrachten. Dass diese Analogie nicht nur eine äusserliche is sondern auch bei tiefer gehenden Fragen erhalten bleibt, wird aus de folgenden Ueberlegungen hervorgehen.

Denkt man sich eine projective Gruppe ϑ in $(n-1)$ Variabel die aus den $\sigma + 1$ Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1},$$

zwischen denen die Beziehung (1) besteht, als Basis gebildet ist, dur ihre N wesentlichen Parameter (3) gegeben, so wird man im A gemeinen keine lineare Differentialgleichung (A) n^{ter} Ordnung (Fuchs'schen Classe mit σ im Endlichen gelegenen wirklichen u ohne scheinbare singuläre Punkte herstellen können, für welche die Monodromiegruppe der Integralquotienten darstellt, sondern n wird dieser Differentialgleichung noch

$$\sigma\left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - 1\right) - \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 3\right)$$

scheinbar singuläre Stellen beilegen müssen, damit die Anzahl de

den Coefficienten verfügbaren Parameter mit der Anzahl N der Parameter der Gruppe ϑ übereinstimmt. Die Parameter der Coefficienten sind dann im Allgemeinen transcendente und mehrdeutige Functionen der $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_N$, die auch nicht für alle Werthesysteme dieser Grössen zu existiren brauchen, es kann vielmehr der Existenzbereich jener Functionen durch gewisse Ungleichheitsbedingungen, denen die $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_N$ genügen müssen, beschränkt sein.

Wir wollen das Studium dieser Art von Functionen nur in dem einfachsten Falle in Angriff nehmen, wo $n = 2$ ist und also die Differentialgleichung

$$(A_2) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + p_2 y = 0$$

als frei von scheinbar singulären Stellen vorausgesetzt werden kann.

208. Differentialgleichung zweiter Ordnung ohne scheinbar singuläre Stellen. Abbildung der Ebene der unabhängigen Variabeln durch den Integralquotienten.

Wenn man allgemein eine lineare Differentialgleichung von der Form (A_2) betrachtet, um dieselbe in Bezug auf die Eigenschaften der Monodromiegruppe ϑ ihres Integralquotienten zu untersuchen, so kann man, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, die Voraussetzung machen, dass ihre nicht scheinbar singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ einfache sind (vergl. Nr. 197, S. 256), d. h. dass die Differenz $r_1 - r_2$ der Wurzeln der zu einer solchen Stelle $x = a$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung in ihrem realen Theile nicht negativ und kleiner sei wie Eins, und dass die scheinbar singulären Stellen $b_1, b_2, \cdots b_\tau$ sämmtlich von einander getrennt liegen, d. h. auch einfache sind, so dass also für eine dieser Stellen $x = b$ die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen die Werthe

$$r_1 = \frac{3}{2}, \quad r_2 = -\frac{1}{2}$$

besitzen. Die Richtigkeit dieser Behauptung wird sich aus den Untersuchungen des siebenten Kapitels ergeben, wir werden daselbst zeigen, dass man von einer beliebigen Differentialgleichung zweiter Ordnung zu einer anderen mit derselben unabhängigen Variabeln und denselben wirklich singulären Punkten übergehen kann, für welche die Monodromiegruppe der Integralquotienten auch dieselbe ist, wie für die gegebene Differentialgleichung und die „nur einfache singuläre Stellen besitzt“. Hier bemerken wir nur noch, dass die Voraussetzung, die gegebene Differentialgleichung habe nur einfache singuläre

Stellen, in der Theorie der algebraischen Functionen ihr Analo man kann auch hier wie dort den **allgemeinen** Fall einer b singulären Stelle durch Grenzübergang aus dem von nur einfache lären Stellen erhalten, indem man eine oder mehrere einfache s singuläre Stellen mit einer einfachen wirklichen singulären St mit einander zusammenfallen lässt; es ist dies auch schon i Nr. 197 (S. 256) eingeführten Terminologie zum Ausdrucke {

Wenn wir dann von der Differentialgleichung (A_2) sagen, sitze keine scheinbar singuläre Stelle, so heisst dies, **ihre lichen singulären Stellen sind wirkliche, und für je selben ist der reale Theil der Differenz der Wurzeln gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung genommen kleiner wie Eins** (vergl. Nr. 197, S. 256).

Wir denken uns überdies durch eine lineare Transforma unabhängigen Variabeln die singulären Stellen $a_1, a_2, a_{\sigma+1}$ die Punkte

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

verlegt, dann ist also die Anzahl der Parameter in den Coe der Differentialgleichung gleich $3\sigma - 3$, und ebenso gross ist zahl der Parameter, von denen die Gruppe ϑ abhängt.

Betrachten wir dann den Integralquotienten $\eta(x)$ in der d Querschnitte $l_1, l_2, \cdot$ schnittenen Fläche $\overline{T}$ so ist jeder Zweig innerhalb $\overline{T}$ eindeutig und $\eta(x)$ erleidet, we Querschnitt $l_\varkappa$ in p Sinne (d. h. von der zur negativen Seite gehend) überschrei Substitution $A_\varkappa$, die in der canonischen

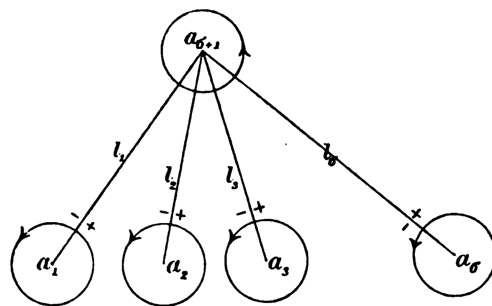


Fig. 2.

(5)
$$\frac{A_\varkappa \eta - \lambda_\varkappa}{A_\varkappa \eta - \mu_\varkappa} = e^{2\pi i \delta_\varkappa} \frac{\eta - \lambda_\varkappa}{\eta - \mu_\varkappa},$$

beziehungsweise

(6)
$$\frac{1}{A_\varkappa \eta - \lambda_\varkappa} = \frac{1}{\eta - \lambda_\varkappa} + \gamma_\varkappa$$

geschrieben denken. Im Falle (5) ist

$$\delta_\varkappa = r_{\varkappa 1} - r_{\varkappa 2}$$

die Differenz der Wurzeln der zu $a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, im Falle (6) ist

$$r_{\varkappa 1} - r_{\varkappa 2} = 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma).$$

In ähnlicher Weise bezeichnen wir auch die dem Umlaufe um $a_{\sigma+1} = \infty$ entsprechende Substitution mit $A_{\sigma+1}$, so dass also

$$\delta_{\sigma+1} = r_1 - r_2$$

die Differenz der Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung bedeutet, wenn die Substitution $A_{\sigma+1}$ nicht parabolisch ist.

Denken wir uns das durch den Integralquotienten $\eta(x)$ gegebene analytische Gebilde (η, x) in der realen vierfach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeit R_4 und projiciren dasselbe auf die η-Ebene, so wird diese Projection einen zweifach ausgedehnten Theil der η-Ebene einfach oder mehrfach überdecken. Wir werden jeden Punkt dieser Projection besonders betrachten und erhalten auf diese Weise eine über einen zweifach ausgedehnten Theil der η-Ebene ausgebreitete, im Allgemeinen mehrblättrige Fläche F, auf welcher x eine eindeutige Function des Ortes ist. Fixiren wir einen bestimmten Zweig $\eta(x)$ des Integralquotienten, so ist dieser innerhalb $\overline{T}$ eindeutig; lassen wir nun x die Begrenzung von $\overline{T}$ durchlaufen, indem wir also z. B. x von a_1 ausgehend auf dem positiven Ufer des Querschnittes l_1 bis nach $a_{\sigma+1}$, dann auf dem negativen Ufer von l_2 nach a_2, dann auf dem positiven Ufer von l_2 nach $a_{\sigma+1}$ und in dieser Weise fortfahrend endlich von $a_{\sigma+1}$ auf dem negativen Ufer von l_1 nach a_1 zurück führen, so beschreibt $\eta(x)$ eine in sich selbst zurückkehrende Linie, die einen gewissen Bereich F_0 der Fläche F begrenzt. Dieser Bereich ist die eindeutig conforme Abbildung der Fläche $\overline{T}$, er ist also ebenso wie diese einfach zusammenhängend.

Die Punkte der Begrenzung von F_0 gehören entweder der Fläche F an oder sind Grenzstellen der durch die Punkte von F gebildeten Punktmenge. Bezeichnen wir mit $s_\varkappa'$ die Gesammtheit der $\eta(x)$-Werthe, die den x Punkten des positiven, mit $s_\varkappa$ die Gesammtheit der $\eta(x)$-Werthe, die den x Punkten des negativen Ufers von $l_\varkappa$ entsprechen, so liegen die Stücke $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ der Begrenzung von F_0 für $\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma$ ganz auf der Fläche F, wenn wir die Punkte $a_\varkappa$, $a_{\sigma+1}$, die den Querschnitt $l_\varkappa$ begrenzen, den Ufern desselben nicht hinzufügen.

Wenn dann der reale Theil von $\delta_\varkappa$ nicht verschwindet, also positiv ist, wie wir voraussetzen können, oder wenn die Substitution $A_\varkappa$ eine parabolische ist, so schliessen sich die Stücke $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ in dem Doppel-

punkte $\lambda_\varkappa$ der Substitution $A_\varkappa$ zusammen; dieser Doppelpunkt g aber nur dann der Fläche F wirklich an, wenn $\delta_\varkappa$ eine reale rat Zahl ist. Wenn $\delta_\varkappa$ complex, also

$$\delta_\varkappa = \delta_\varkappa' + i\delta_\varkappa'', \quad \delta_\varkappa' > 0$$

ist, so ist in der Umgebung von $x = a_\varkappa$ (vergl. Nr. 203, S. 282)

$$\frac{\eta - \lambda_\varkappa}{\eta - \mu_\varkappa} = (t - a_\varkappa)^{\delta_\varkappa}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1(t - a_\varkappa) + \cdots),$$

also wenn wir

$$t - a_\varkappa = re^{\varphi i}$$

setzen,

$$\frac{\eta - \lambda_\varkappa}{\eta - \mu_\varkappa} = r^{\delta_\varkappa'} e^{-\delta_\varkappa''\varphi} e^{(\delta_\varkappa'\varphi + \delta_\varkappa'' \log r)i}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1(t - a_\varkappa) + \cdots).$$

Wenn also t längs $l_\varkappa$, d. h. mit einem bestimmten Argumente einrückt, so wird der absolute Betrag der Grösse

$$\frac{\eta - \lambda_\varkappa}{\eta - \mu_\varkappa}$$

gleich Null, aber das Argument derselben beliebig gross; in d Falle sind also $s_\varkappa$ und $s_\varkappa'$ in der Nähe von $\lambda_\varkappa$ spiralförmig gew Man kann bewirken, dass $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ sich mit bestimmtem Argument Punkte $\lambda_\varkappa$ annähern, indem man den Querschnitt $l_\varkappa$ von $a_\varkappa$ nich bestimmtem Argumente ausgehen, sondern ihn sich um diesen spiralförmig winden lässt.

Wenn der reale Theil $\delta_\varkappa'$ von $\delta_\varkappa$ verschwindet, d. h. wenn A hyperbolische Substitution ist, so ist der Bereich F_0 an der St nicht geschlossen, sondern windet sich (vergl. Nr. 203, S. 283) förmig um die Punkte $\lambda_\varkappa$, $\mu_\varkappa$ herum.

Aehnliche Betrachtungen gelten für den Doppelpunkt $\lambda_{\sigma+}$ Substitution $A_{\sigma+1}$, in welchem sich, wenn die Substitution $A_{\sigma+1}$ hyperbolische ist, die Begrenzungsstücke s_σ' und s_1 zusammenschl und ebenso für die entsprechenden Doppelpunkte

$$\lambda_{\sigma+1}', \; \lambda_{\sigma+1}'', \; \cdots \; \lambda_{\sigma+1}^{(\sigma)}$$

der Substitutionen

$$A_1 A_{\sigma+1} A_1^{-1}, \quad (A_2 A_1) A_{\sigma+1} (A_2 A_1)^{-1}, \cdots (A_\sigma \cdots A_1) A_{\sigma+1} (A_\sigma \cdots$$

die beziehungsweise die gemeinsame Grenze der Stücke s_1' u s_2' und s_3, $\cdots$ s_σ' und s_1 bilden, und von denen vermöge der Bezi (1) der letzte

$$\lambda_{\sigma+1}^{(\sigma)} = \lambda_{\sigma+1}$$

ist.

Wir nennen im Folgenden die Punkte

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\sigma, \lambda_{\sigma+1}, \lambda'_{\sigma+1}, \cdots \lambda_{\sigma+1}^{(\sigma-1)}$$

die Ecken, die Stücke

$$s_1, s_1', s_2, s_2', \cdots s_\sigma, s_\sigma'$$

die Seiten des Bereiches F_0 und sagen von der Ecke $\lambda_\varkappa$, sie entspräche dem Punkte $x = a_\varkappa$, von den Ecken

$$\lambda_{\sigma+1}, \lambda'_{\sigma+1}, \cdots \lambda_{\sigma+1}^{(\sigma-1)},$$

sie entsprächen dem Punkte $x = a_{\sigma+1} = \infty$.

Da die Function $\eta(x)$, wenn x den Querschnitt $l_\varkappa$ im positiven Sinne überschreitet, die Substitution $A_\varkappa$ erfährt, so gehen die η-Werthe, die x-Punkten des positiven Ufers von $l_\varkappa$ entsprechen, aus den η-Werthen, die den correspondirenden x-Punkten des negativen Ufers entsprechen, durch Anwendung der Substitution $A_\varkappa$ hervor; wir erhalten demnach die Punkte der Seite $s_\varkappa'$, indem wir auf die Punkte von $s_\varkappa$ die Substitution $A_\varkappa$ anwenden; wir schreiben dies kurz

$$s_\varkappa' = A_\varkappa s_\varkappa$$

und sagen, $s_\varkappa'$ gehe durch die Substitution $A_\varkappa$ aus $s_\varkappa$ hervor.

I. Es sind also die 2σ Seiten des Bereiches F_0 einander durch die projectiven Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma,$$

die man als die projectiven Fundamentalsubstitutionen der Differentialgleichung (A_2) bezeichnen kann, zugeordnet.

209. Die Winkelsumme bei einem Cyklus von Ecken. Andere Zerschneidung der Ebene der unabhängigen Variabeln.

Seien nun $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ zwei Seiten, die im Punkte $\lambda_\varkappa$ zusammenstossen. Wenn wir uns den Querschnitt $l_\varkappa$ als stetig verlaufende Curve denken, die in jedem Punkte eine bestimmte Tangente hat, so wird das Gleiche auch von den Curvenzügen $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ gelten, da diese ja die conformen Abbildungen von $l_\varkappa$ durch eine monogene Function $\eta(x)$, beziehungsweise $A_\varkappa\eta(x)$ und alle Punkte von $l_\varkappa$ reguläre Stellen dieser monogenen Functionen sind. Betrachten wir dagegen die beiden dem Punkte $\lambda_\varkappa$ unendlich benachbarten Elemente der Curven $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$, wir bezeichnen dieselben als geometrische Quantitäten aufgefasst durch

$$\varepsilon_\varkappa, \varepsilon_\varkappa',$$

so ist der Winkel, unter welchem sich $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ im Punkte $\lambda_\varkappa$ tr
durch die Differenz

$$\sphericalangle (s_\varkappa', s_\varkappa) = \operatorname{Arg} \varepsilon_\varkappa' - \operatorname{Arg} \varepsilon_\varkappa$$

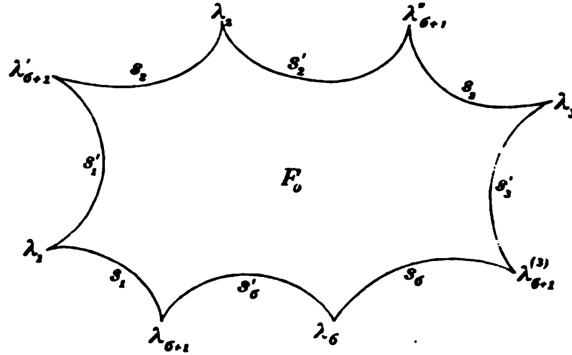


Fig. 3.

gegeben. Nun ist aber

$$\frac{\varepsilon_\varkappa'}{\varepsilon_\varkappa} = \left(\frac{dA_\varkappa \eta}{d\eta}\right)_{\eta=\lambda_\varkappa},$$

also nach den Gleichungen (4) und (7) der Nr. 199 (S. 268, 269)

$$\frac{\varepsilon_\varkappa'}{\varepsilon_\varkappa} = e^{2\pi i \delta_\varkappa},$$

oder

$$\frac{\varepsilon_\varkappa'}{\varepsilon_\varkappa} = 1,$$

je nachdem die Substitution $A_\varkappa$ von der Form (5) oder (6) ist
legen wir also $\delta_\varkappa$ in seinen realen und imaginären Theil

$$\delta_\varkappa = \delta_\varkappa' + i\delta_\varkappa'',$$

so ist für den Fall einer nicht parabolischen Substitution $A_\varkappa$

$$\sphericalangle (s_\varkappa', s_\varkappa) = 2\pi\delta_\varkappa',$$

für den Fall einer parabolischen Substitution

$$\sphericalangle (s_\varkappa', s_\varkappa) = 0.$$

Betrachten wir ferner die in den Punkten

$$\lambda'_{\sigma+1},\ \lambda''_{\sigma+1},\ \cdots\ \lambda_{\sigma+1}$$

zusammenstossenden Bogenelemente der Seiten von F_0 und
mit $\varepsilon_{\varkappa+1}$ das dem Punkte $\lambda^{(\varkappa)}_{\sigma+1}$ unendlich benachbarte E
$s_{\varkappa+1}$, mit $\varepsilon_\varkappa'$ das dem Punkte $\lambda^{(\varkappa)}_{\sigma+1}$ unendlich benachba
von $s_\varkappa'$, so ist

$$\sphericalangle (s_2, s_1') = \text{Arg}\, \varepsilon_2 - \text{Arg}\, \varepsilon_1',$$
$$\sphericalangle (s_3, s_2') = \text{Arg}\, \varepsilon_3 - \text{Arg}\, \varepsilon_2',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sphericalangle (s_1, s_\sigma') = \text{Arg}\, \varepsilon_1 - \text{Arg}\, \varepsilon_\sigma',$$

it die Summe dieser Winkel

$$\sum_{\varkappa=1}^{\sigma} (s_{\varkappa+1}, s_\varkappa') = \sum_{\varkappa=1}^{\sigma} (\text{Arg}\, \varepsilon_\varkappa - \text{Arg}\, \varepsilon_\varkappa'),$$

$_{+1} = s_1$ zu nehmen ist.

un haben wir aber

$$\frac{\varepsilon_\varkappa}{\varepsilon_\varkappa'} = \left(\frac{d\eta}{dA_\varkappa \eta}\right)_{\eta=\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}} = \left(\frac{dA_\varkappa^{-1}\eta}{d\eta}\right)_{\eta=\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa)}},$$

ı

$$\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa)} = A_\varkappa \cdots A_2 A_1 \lambda_{\sigma+1}$$

können wir setzen

$$\frac{\varepsilon_\varkappa}{\varepsilon_\varkappa'} = \left[\frac{d(A_{\varkappa-1} \cdots A_1 \eta)}{d(A_\varkappa A_{\varkappa-1} \cdots A_1 \eta)}\right]_{\eta=\lambda_{\sigma+1}};$$

s folgt aber, mit Rücksicht auf die Gleichung (1),

$$\prod_{\varkappa=1}^{\sigma} \frac{\varepsilon_\varkappa}{\varepsilon_\varkappa'} = \left[\frac{d\eta}{d(A_\sigma \cdots A_1 \eta)}\right]_{\eta=\lambda_{\sigma+1}} = \left[\frac{dA_{\sigma+1}\eta}{d\eta}\right]_{\eta=\lambda_{\sigma+1}}.$$

wir also

$$\delta_{\sigma+1} = \delta_{\sigma+1}' + i\delta_{\sigma+1}'',$$

venn $A_{\sigma+1}$ von der Form (5) ist,

$$\sum_{\varkappa=1}^{\sigma} (s_{\varkappa+1}, s_\varkappa') = 2\pi \delta_{\sigma+1}',$$

$A_{\sigma+1}$ eine parabolische Substitution ist,

$$\sum_{\varkappa=1}^{\sigma} (s_{\varkappa+1}, s_\varkappa') = 0.$$

s erlangte Resultat in eleganter Form aussprechen zu können eine von Herrn Poincaré herrührende Bezeichnung ein, och vielfach verwerthet werden wird.

gen nämlich von den Ecken des Bereiches F_0, die einem en der Punkte

$$a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_\sigma,\ a_{\sigma+1}$$

ie bildeten einen Cyklus. Es bilden also dann die Ecken

$$\lambda_{\sigma+1}, \lambda'_{\sigma+1}, \cdots \lambda_{\sigma+1}^{(\sigma-1)}$$

zusammengenommen und jede der übrigen Ecken

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\sigma$$

für sich je einen Cyklus. Aus den vorhergehenden Erörterungen · giebt sich dann der Satz:

II. Die Summe der Winkel, unter denen sich die Seit des Bereiches F_0 in den einen Cyklus bildenden Ecke schneiden, ist gleich 2π multiplicirt mit dem realen Thei der Differenz der Wurzeln der zu demjenigen singuläre Punkte von (A_2) gehörigen determinirenden Fundamenta gleichung, dem die Ecken jenes Cyklus entsprechen.

Durch die beiden Sätze I, II ist die Natur des Bereiches F_0, sowe dieselbe durch die Differentialgleichung, beziehungsweise durch d Gruppe ϑ bestimmt ist, vollkommen charakterisirt. Die sonstige g staltliche Beschaffenheit von F_0 hängt wesentlich von der Art der Ze schneidung der x-Ebene, beziehungsweise der durch Aussonderung d Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$ entstehenden Fläche T ab.

Zunächst ist klar, dass wir die Gestalt der Seiten von F_0 stet variiren können, indem wir die Gestalt der Querschnitte $l_1, l_2, \cdots$ stetig sich ändern lassen. Wir können aber auch die Fläche T dur ein anderes Schnittsystem in eine einfach zusammenhängende Fläc verwandeln und dadurch eine ganz verschiedene Vertheilung der Eck und Seiten von F_0 erhalten.

Für viele Untersuchungen sehr zweckmässig ist die folgende Z schneidung der Fläche T. Wir legen durch die sämmtlichen singulä Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$$

einen in sich zurücklaufenden Schnitt l und bezeichnen z. B. dasjen Ufer desselben, welches zur Linken liegt, wenn die Punkte a_i in d angegebenen Reihenfolge passirt werden, als das positive, ebenso d durch das positive Ufer des Schnittes begrenzten Theil der Fläche als das positive oder positiverseits gelegene Gebiet T_1, den ander Theil von T als das negative Gebiet T_2. Dann ist der Zweig $\eta($ des Integralquotienten innerhalb T_1 eindeutig und kann nach T_2 h fortgesetzt werden, wenn wir den Schnitt l in irgend einem Pun überschreiten. Je nachdem die Ueberschreitung in Punkten erfol die den verschiedenen durch die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ begrenz Abtheilungen von l angehören, wird natürlich der Werth von $\eta($ den wir den Punkten von T_2 zuzuordnen haben, ein anderer s

Denken wir uns z. B. das Gebiet T_2 mit T_1 längs des Theiles $(a_{\sigma+1}, a_1)$ von l vereinigt, d. h. betrachten wir nur den von a_1 bis $a_{\sigma+1}$ reichenden Theil $\bar{l}$ des Schnittes l als bestehend, so können wir die so entstehende Fläche $T_1 + T_2 = T'$ wieder auf die Fläche F abbilden.

Bei der durch die Fig. 4 angedeuteten Lage wird dann ein Punkt auf der negativen Seite des Querschnittstückes $(a_\varkappa, a_{\varkappa+1})$ aus dem correspondirenden Punkte η auf der positiven Seite durch die Substitution

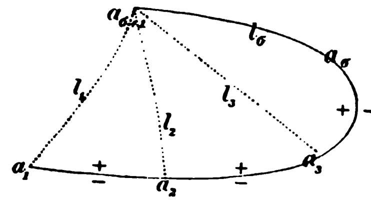


Fig. 4.

$$A_\varkappa A_{\varkappa-1} \cdots A_1$$

hervorgehen. Durchlaufen wir die Begrenzung von $\overline{T}'$, indem wir z. B. von a_1 mit dem Werthe $\eta = \lambda_1$ ausgehend auf der positiven Seite von $\bar{l}$ über $a_2, \cdots a_\sigma$ nach $a_{\sigma+1}$, und dann auf der negativen Seite von $\bar{l}$ nach a_1 zurückgehen, so beschreibt η einen Curvenzug, der einen einfach zusammenhängenden Bereich F_0' der Fläche F begrenzt (Fig. 5). Bezeichnen wir durch $\bar{s}_\varkappa$ den dem positiven, mit $\bar{s}_\varkappa'$ den dem negativen Ufer des Stückes $(a_\varkappa, a_{\varkappa+1})$ von $\bar{l}$ entsprechenden Theil jenes Curvenzuges, so ist

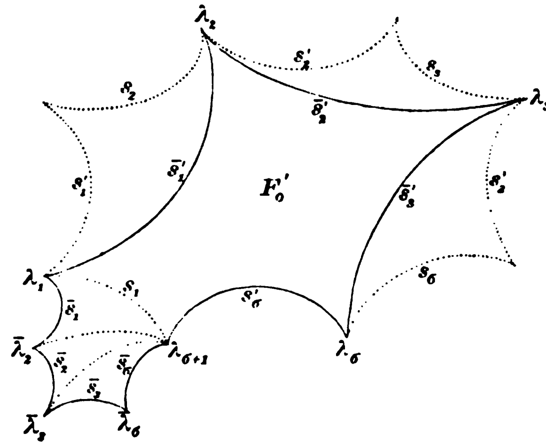


Fig. 5.

$$\bar{s}_\varkappa' = A_\varkappa A_{\varkappa-1} \cdots A_1 \bar{s}_\varkappa,$$

und der Punkt $\bar{\lambda}_\varkappa$, in welchem die Seiten $\bar{s}_{\varkappa-1}, \bar{s}_\varkappa$ von F_0' zusammenstossen, entspricht dem Punkte $a_\varkappa$. Man hat dann

$$\bar{\lambda}_\varkappa = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_{\varkappa-1}^{-1} \lambda_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

und

$$\bar{\lambda}_{\sigma+1} = A_1^{-1} \cdots A_\sigma^{-1} \lambda_{\sigma+1} = \lambda_{\sigma+1};$$

die Seiten $\bar{s}'_{\varkappa+1}$ und $s_\varkappa'$ besitzen demnach den Punkt $\lambda_{\varkappa+1}$ zur gemeinschaftlichen Grenze, und $\bar{\lambda}_\varkappa$ ist ein Doppelpunkt der mit $A_\varkappa$ ähnlichen Substitution

$$A_1^{-1} \cdots A_{\varkappa-1}^{-1} A_\varkappa A_{\varkappa-1} \cdots A_1 .$$

Es bilden also die Ecken λ_1 und $\lambda_{\sigma+1}$ für sich und die Eckenpaare

$$\lambda_2,\ \bar{\lambda}_2;\ \lambda_3,\ \bar{\lambda}_3;\ \cdots\ \lambda_\sigma,\ \bar{\lambda}_\sigma$$

je einen Cyklus, und es besteht auch für diese Cyklen der Satz, da die Summe der Winkel, die in den zu einem Cyklus gehörigen Eck stattfinden, gleich ist 2π multiplicirt mit dem realen Theile d Wurzeldifferenz der zu dem, dem Cyklus entsprechenden, singulär Punkte von (A_2) gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung.

Wenn wir dem Querschnitte $\bar{l}$ den Querschnitt l_1 hinzufügen, können wir $\bar{l} + l_1$ als den Schnitt l auffassen; es ist folglich der v den Curvenzügen

$$\bar{s}_1,\ \bar{s}_2,\ \cdots\ \bar{s}_\sigma,\ s_1$$

begrenzte Bereich der Fläche F die conforme Abbildung des Gebie T_1 der x-Ebene.

210. **Reguläre Theilung entsprechend der Gruppeneigenschaft. Erlaubte Abänderungen. Die Parameter in den Coefficienten als eindeutige Functionen der Parameter der Monodromiegruppe.**

Gehen wir wieder zu der durch die Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$ begrenzten Fläche $\bar{T}$ zurück. Wenn wir den Querschnitt $l_\varkappa$ in positiver Richtung überschreiten, so verwandelt sich $\eta(x)$ in den Zweig

$$A_\varkappa \eta(x);$$

dieser ist in einer Fläche $\bar{T}_\varkappa$, die genau ebenso beschaffen ist wie $\bar{T}$ selbst, eindeutig; wir denken uns diese Fläche $\bar{T}_\varkappa$ als ein mit $\bar{T}$ congruentes Blatt, welches mit $\bar{T}$ längs des Querschnittes $l_\varkappa$ so zusammenhängt, dass das positive Ufer von $l_\varkappa$ in $\bar{T}$ an das negative Ufer von $l_\varkappa$ in $\bar{T}_\varkappa$ geheftet ist. Dieses Blatt $\bar{T}_\varkappa$ bilden wir nun wieder auf die Fläche F ab; die Abbildung $F_\varkappa$ ist ein Bereich, der aus F_0 durch Anwendung der Substitution $A_\varkappa \eta$ hervorgeht, d. h. $F_\varkappa$ ist die Abbildung von F_0 durch Vermittelung der Function $A_\varkappa \eta$. Also wird sich $F_\varkappa$ an F_0 längs der Seite $s_\varkappa'$ anschliessen und wird im übrigen mit F_0 keinen Punkt (der Fläche F) gemein haben.

Genau ebenso werden wir eine mit $\bar{T}$ congruente Fläche $\bar{T}_{-\varkappa}$ mit $\bar{T}$ so zusammenheften, dass das negative Ufer von $l_\varkappa$ in $\bar{T}$ mit dem positiven Ufer von $l_\varkappa$ in $\bar{T}_{-\varkappa}$ zusammenhängt; in diesem Blatte $\bar{T}_{-\varkappa}$ ist dann der Zweig

$$A_{\varkappa}^{-1}\eta$$

eindeutig, und die Abbildung von $\overline{T}_{-\varkappa}$ auf die Fläche F liefert einen Bereich $F_{-\varkappa}$, der aus F_0 durch die Substitution $A_{\varkappa}^{-1}\eta$ hervorgeht und sich an F_0 längs der Seite $s_{\varkappa}$ anschliesst.

Nun kann jedes der Blätter $\overline{T}_{\pm\varkappa}$ in genau derselben Weise weiter benutzt werden; man überschreitet immer wieder die Querschnitte und heftet entsprechend den neu entstehenden Zweigen von $\eta(x)$ neue Blätter

$$\overline{T}_{\pm\varkappa,\,\pm\iota}$$

an die alten, bildet dieselben auf die Fläche F ab, erhält dadurch Bereiche

$$F_{\pm\varkappa,\,\pm\iota}$$

und fährt so fort, bis man entsprechend allen Zweigen von $\eta(x)$, d. h. also entsprechend allen Substitutionen der Gruppe ϑ, Blätter

$$\overline{T}_{\pm\varkappa_1,\,\pm\varkappa_2,\cdots\pm\varkappa_\lambda}$$

erhalten hat, wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\lambda$ irgend welche der Zahlen $1, 2, \cdots \sigma$ bedeuten. Die Abbildungen dieser Blätter auf die Fläche F liefern dann Bereiche

$$F_{\pm\varkappa_1,\,\pm\varkappa_2,\cdots\pm\varkappa_\lambda},$$

die aus F_0 durch Anwendung der Substitution

$$A_{\varkappa_1}^{\pm 1} A_{\varkappa_2}^{\pm 1} \cdots A_{\varkappa_\lambda}^{\pm 1}\eta$$

hervorgehen, und die Gesammtheit der so entstandenen Bereiche erfüllt die Fläche F schlicht und lückenlos. Analog bildet die Gesammtheit der Blätter $\overline{T}_{\pm\varkappa_1,\cdots\pm\varkappa_\lambda}$ eine zusammenhängende über der x-Ebene ausgebreitete Riemann'sche Fläche R, in welcher der Integralquotient der Differentialgleichung (A_2) eine eindeutige Function des Ortes ist, und die offenbar nichts anderes ist, als die Projection des analytischen Gebildes (x, η) auf die x-Ebene.

Die Eintheilung der Fläche F in die Bereiche

(7) $$F_{\pm\varkappa_1,\,\pm\varkappa_2,\cdots\pm\varkappa_\lambda}$$

besitzt die folgende Eigenschaft. Zunächst gelten für jeden dieser Bereiche die Sätze I, II, da die Abbildung durch eine projective Substitution, durch welche ja jeder dieser Bereiche aus F_0 hervorgeht, eine winkeltreue ist. Es kann also jeder solcher Bereich ebenso gut wie F_0 selbst als Ausgangsbereich gewählt werden, und wenn wir dann die Abbildungen desselben mittelst aller Substitutionen der Gruppe ϑ construiren, so erhalten wir zufolge der Gruppeneigenschaft genau die-

selbe Gebietstheilung der Fläche F wie vorher. Man drüc Eigenschaft der Eintheilung von F dadurch aus, dass man Theilung sei eine **reguläre**.

Die Gebiete (7) sind in denjenigen Ecken, die Doppelpun hyperbolischer Substitutionen sind, wirklich geschlossen, um punkte hyperbolischer Substitutionen dagegen winden sich im Allgemeinen bandförmig herum, ohne dieselben jemals wi erreichen.

Wir können jetzt auch leicht die Beziehung übersel zwischen den verschiedenen Zerschneidungen der Fläche T ent den Bereichen F_0 besteht; nehmen wir z. B. die beiden Ber und F_0', die wir im Vorhergehenden untersucht hatten (vergl

Der Bereich F_0' geht aus F_0 hervor, indem man von F_0 d

$$(s_1' \bar{s}_1' s_2), \quad (s_2' \bar{s}_2' s_3), \cdots (s'_{\sigma-1} \bar{s}'_{\sigma-1} s_\sigma)$$

abzieht und dagegen den Bereich

(8) $$(s_1 \dot{s}_1 \bar{s}_2 \cdots \bar{s}_\sigma)$$

hinzufügt. Dieser letztere Bereich kann nun in folgender W getheilt werden. Ziehen wir die Linie

$$\dot{s}_2 = A_1^{-1} s_2,$$

die die Punkte $\bar{\bar{\lambda}}_2$, $\lambda_{\sigma+1}$ verbindet, ferner die Linie

$$\bar{\dot{s}}_3 = A_1^{-1} A_2^{-1} s_3,$$

die die Punkte $\bar{\lambda}_3$, $\lambda_{\sigma+1}$ verbindet, u. s. w. Dann geht der B

$$(s_1 \bar{s}_1 \dot{s}_2) \quad \text{aus} \quad (s_1' \bar{s}_1' s_2)$$

hervor durch die Substitution A_1^{-1}; der Bereich

$$(\dot{s}_2 \bar{s}_2 \dot{s}_3) \quad \text{aus} \quad (s_2' \bar{s}_2' s_3)$$

durch die Substitution $A_1^{-1} A_2^{-1}$, u. s. w.; endlich der Bereich

$$(\bar{\bar{s}}_{\sigma-1} \bar{s}_{\sigma-1} \bar{s}_\sigma) \quad \text{aus} \quad (s'_{\sigma-1} \bar{s}'_{\sigma-1} s_\sigma)$$

durch die Substitution

$$A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_{\sigma-1}^{-1}.$$

Die Bereiche

$$(s_1 \bar{s}_1 \bar{s}_2), \quad (\bar{\bar{s}}_2 \bar{s}_2 \bar{\bar{s}}_3), \cdots (\bar{\bar{s}}_{\sigma-1} \bar{s}_{\sigma-1} \bar{s}_\sigma)$$

zusammengenommen bilden aber den Bereich (8).

Der Bereich F_0' geht also aus F_0 dadurch hervor, dass F_0 gewisse Theile wegschneidet und dafür Ebenenstücke, die a weggeschnittenen Theilen durch Substitutionen der Gruppe gehen, hinzufügt.

Denken wir uns allgemein einen Theil φ_0 des Bereiches F_0; sei S ne beliebige Substitution der Gruppe ϑ und F_S der aus F_0 durch wendung von S hervorgehende Bereich; ebenso sei

$$\varphi_S = S\varphi_0.$$

deute ferner Σ eine bestimmte Substitution von ϑ, und sei

$$\Sigma S = S_1.$$

r wollen dann von jedem Bereiche F_S das Stück φ_S abziehen und t dessen das Stück φ_{S_1} hinzufügen; sei dann

$$F_S' = F_S - \varphi_S + \varphi_{S_1}.$$

Gesammtheit der Bereiche F_S' wird dann auch wieder die ganze he F schlicht und lückenlos bedecken, d. h. auch die so entstehende heilung der Fläche kann die Theilung durch die Bereiche F_S volldig ersetzen. Wenn der Bereich φ_0 an eine (oder mehrere) der n von F_0 stösst, und wenn der Bereich φ_Σ an eine (oder mehrere) Seiten von $F_0 - \varphi_0$ von aussen angrenzt, so ist offenbar jeder der iche F_S' ebenso wie F_0 selbst ein einfach zusammenhängender; Eigenschaft der Bereiche F_S' ist aber keine unumgänglich erorliche, wenn wir auch im Folgenden in der Regel nur so beffene Theilungen der Fläche F in's Auge fassen werden.

Mit den Bereichen F_S' kann man nun wieder genau ebenso vern und kann auf diese Weise von der ursprünglichen Theilung in Bereiche F_S zu jeder anderen Theilung der Fläche F, die der rentialgleichung oder der Gruppe ϑ entspricht, übergehen.

Wir sagen von einer auf die angegebene Art vorgenommenen Abrung des Bereiches F_0, es sei eine erlaubte Abänderung, und chen den Satz aus:

Jedem Bereiche, der aus F_0 durch erlaubte Abänderungen vorgeht, entspricht eine reguläre Theilung der Fläche F Bereiche, die aus dem abgeänderten Bereiche durch die stitutionen der Gruppe ϑ hervorgehen, und jede solche ilung leistet für das Studium der Gruppe ϑ und der erentialgleichung (A_2) dasselbe, wie die aus dem Bebe F_0 entspringende.

Der Bereich F_0' geht aus F_0 durch erlaubte Abänderungen hervor. Es ist nun von der grössten Wichtigkeit, dass wir uns darüber werden, dass der Bereich F_0 und die aus demselben entspringende ung der Fläche F, ja dass die Natur dieser Fläche selbst ganz von der projectiven Gruppe ϑ abhängt.

Was zunächst die Fläche F betrifft, so wissen wir nach Ergebnissen des zweiten und dritten Kapitels, dass sowohl die grenzung von F als auch ihre Windungspunkte durch die Gru ϑ bestimmt werden. Denn da wir das Auftreten scheinbar si lärer Stellen für die Differentialgleichung (A_2) ausgeschlossen ha so kann sich die Function x von η nur an solchen Stellen zweigen, die den singulären Punkten $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ entsprec d. h. nur in Doppelpunkten von Substitutionen der Gruppe, und diesen ist auch die Art der Verzweigung durch die betreffende S stitution vollkommen bestimmt. Für den Bereich F_0 sind die E als Doppelpunkte gewisser Substitutionen von ϑ, die Winkelsum der Cyklen, die diese Ecken bilden, durch die Multiplicatoren j Substitutionen bestimmt, endlich ist die Zuordnung der Seitenp von F_0 auch durch jene Substitutionen gegeben.

Wenn wir also eine zweite von (A_2) verschiedene Differen gleichung zweiter Ordnung

$$(A_2') \qquad \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \pi_2 z = 0$$

haben, die der Fuchs'schen Classe angehört, keine scheinbar si lären Stellen besitzt, und für welche ein Integralquotient ζ exis dessen Monodromiegruppe auch durch die Gruppe ϑ dargestellt w so würde für diese Differentialgleichung die Fläche F, der Bereich und die aus demselben entspringende Theilung dieser Fläche ge dieselbe Bedeutung haben wie für die Differentialgleichung (A_2).

Fassen wir nun die Eigenschaften von F und F_0 zusammen, können wir sagen:

Auf F ist die unabhängige Variable der Differentialgleichung (oder (A_2') eine eindeutige Function des Ortes. Innerhalb des reiches F_0, der die eindeutig conforme Abbildung der durch die Q schnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$ zerschnittenen x-Ebene darstellt, nimmt die Fu tion x von η und ebenso die Function ξ von ζ jeden Werth ein und nur einmal an und verhält sich wie eine rationale Function; der Begrenzung von F_0 hat sowohl die Function x von η als a die Function ξ von ζ in correspondirenden Punkten der Seiten und $s_\varkappa'$ gleiche Werthe.

Etwas einfacher lässt sich dies noch aussprechen, wenn wir von den Herren Klein und Poincaré eingeführte Vorstellungsw benutzen.

Denken wir uns nämlich den Bereich F_0 aus der Fläche F geschnitten und nehmen wir an, dass sich die Seiten $s_\varkappa, s_\varkappa'$ ($\varkappa = 1, 2$

von F_0 durch Biegung und Dehnung so deformiren lassen, dass sie einander völlig congruente Curvenstücke werden, und dass, wenn man nach der Deformation $s_\varkappa$ auf $s_\varkappa'$ legt, jeder Punkt von $s_\varkappa$ gerade auf den aus diesem Punkte durch die Substitution $A_\varkappa$ hervorgehenden Punkt von $s_\varkappa'$ fällt. Biegen wir dann den so deformirten Bereich F_0 derart zusammen, dass die Seiten $s_\varkappa, s_\varkappa'$ für $\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma$ zur Deckung kommen, so vereinigen sich diejenigen Ecken, die zu einem Cyklus gehören, zu einem Punkte, und F_0 wird eine geschlossene Fläche $\overline{F}_0$, die wir uns von denjenigen $(\sigma + 1)$ Punkten, die früher Ecken waren, begrenzt denken. Diese geschlossene Fläche ist im Sinne der Analysis situs (wie sich Riemann ausdrückt) der Fläche T, die aus der x-Ebene durch Aussonderung der Punkte $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ hervorgeht, völlig aequivalent.

Es ist dann x eine eindeutige Function des Ortes auf dieser geschlossenen Fläche $\overline{F}_0$ (darin liegt auch schon der Ausdruck dessen, dass x in correspondirenden Punkten der früheren Seiten $s_\varkappa, s_\varkappa'$ dieselben Werthe annimmt), die sich für jeden Punkt, der innerhalb $\overline{F}_0$ liegt, verhält wie eine rationale Function, und die auf dieser Fläche auch jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt. Genau dasselbe gilt auch von $\mathfrak{x}$.

Sei nun allgemein $\mathfrak{X}$ eine Function von η, die auf der geschlossenen Fläche $\overline{F}_0$ eindeutig ist und sich innerhalb von $\overline{F}_0$ wie eine rationale Function verhält. Dann ist $\mathfrak{X}$ eine eindeutige Function von x, die sich für jeden Werth von x wie eine rationale Function verhält, also ist $\mathfrak{X}$ eine rationale Function von x (vergl. für eine genauere Ausführung des Beweises die analoge Betrachtung in der Nr. 215).

Nehmen wir also in den beiden Differentialgleichungen (A_2), (A_2')

$$\eta = \zeta,$$

so ist $\mathfrak{x}$ rational in x und x rational in $\mathfrak{x}$; es besteht demnach zwischen x und $\mathfrak{x}$ eine Gleichung von der Form

$$(9) \qquad \mathfrak{a}x\mathfrak{x} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}\mathfrak{x} + \mathfrak{d} = 0,$$

wo die $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ Constanten bedeuten.

Wenn die Differentialgleichung (A_2') überdies so gewählt ist, dass für $\eta = \lambda_1$ $\mathfrak{x} = 0$, für $\eta = \lambda_2$ $\mathfrak{x} = 1$ und für $\eta = \lambda_{\sigma+1}$ $\mathfrak{x} = \infty$ ist, so folgt aus (9)

$$x = \mathfrak{x},$$

d. h. die Differentialgleichungen (A_2) und (A_2') sind identisch.

Wir haben also das Ergebniss:

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung (A_2), die der Fuchs'schen Classe angehört, keine scheinbar singulären

Stellen hat, und für welche drei der (wirklich) sing
Stellen in die Punkte $0, 1, \infty$ fallen, ist durch Ang
projectiven Monodromiegrupppe ϑ ihrer Integralquo
vollkommen und eindeutig bestimmt. Es sind also die
Coefficienten von (A_2) auftretenden constanten Par
eindeutige Functionen der Parameter

(10) $$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_N, \quad N = 3\sigma - 3,$$

von denen die Gruppe ϑ wesentlich abhängt.

211. Fall realer Wurzeln der determinirenden Fundame chungen. Geometrische Darstellung der Parameter der Bestimmung der Differentialgleichung, wenn die Gruppe gege Fundamentalbereich. Eigenschaften der die Gruppe zuls Functionen. Fortsetzung.

Der Bereich F_0 ist, wenn wir von erlaubten Abänderu sehen, durch die Gruppe ϑ und diese auch umgekehrt durch reich F_0 vollkommen bestimmt, da ja die Substitutionen, we Seitenpaare $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ von F_0 in einander überführen, eine B Gruppe ϑ ausmachen. Der Bereich F_0 hängt also wesentlich v ebenso vielen Parametern ab wie die Gruppe ϑ, d. h. von den Parametern (10). Diese Parameter treten in dem allgemein den wir bisher betrachtet haben, nicht deutlich in Evidenz, bietet bis jetzt noch nicht völlig überwundene Schwierigkeiten Abhängigkeit des Bereiches F_0 von den Parametern der G ganz allgemein festzustellen. In einem besonders wichtigen falle lässt sich jedoch diese Abhängigkeit in völlig befriedigend darlegen, in dem Falle nämlich:

wo die Grössen $\delta_\varkappa$ reale Zahlen sind.

Wir wollen diesen Fall jetzt genauer untersuchen, set voraus, dass in der Differentialgleichung (A_2) die Differen Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen real negative) Zahlen sind, oder, was dasselbe heisst, dass sich u Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1}$$

nur elliptische und parabolische, dagegen keine hyperbolisc loxodromischen befinden.

Wir behaupten dann: Durch Angabe der 2σ Ecken

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\sigma; \lambda_{\sigma+1}, \lambda'_{\sigma+1}, \cdots \lambda^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}$$

und der zu den $(\sigma + 1)$ Cyklen gehörigen Winkelsum

der Bereich F_0 und damit die Gruppe ϑ vollkommen und eindeutig bestimmt.

In der That kennen wir durch die $\sigma+1$ Winkelsummen für jede der Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1}$ den Multiplicator

(11) $$K_\varkappa = e^{2\pi i \delta_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma+1),$$

falls dieselbe elliptisch ist, oder wir wissen, falls die betreffende Winkelsumme Null beträgt, dass die zugehörige Substitution parabolisch ist. Ferner kennen wir von jeder jener $\sigma+1$ Substitutionen einen Doppelpunkt, und endlich wissen wir, dass

(12) $$\lambda'_{\sigma+1} = A_1 \lambda_{\sigma+1}, \quad \lambda''_{\sigma+1} = A_2 \lambda'_{\sigma+1}, \cdots, \lambda_{\sigma+1} = A_\sigma \lambda^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}$$

ist. Wenn also z. B. A_1 eine elliptische Substitution wäre, so hätten wir die Gleichungen

(13) $$\begin{cases} \dfrac{A_1\eta - \lambda_1}{A_1\eta - \mu_1} = K_1 \dfrac{\eta - \lambda_1}{\eta - \mu_1}, \\ \dfrac{A_1\eta - \lambda_1}{A_1\eta - \lambda'_{\sigma+1}} = L_1 \dfrac{\eta - \lambda_1}{\eta - \lambda_{\sigma+1}}, \end{cases}$$

in denen $\lambda_1, K_1, \lambda_{\sigma+1}, \lambda'_{\sigma+1}$ bekannt, dagegen μ_1, L_1 unbekannt sind. Berechnet man aus beiden Gleichungen $A_1\eta$, so müssen die beiden so gefundenen Ausdrücke für jeden Werth von η übereinstimmen; hieraus findet man durch einfache Rechnung

$$\mu_1 = \frac{\lambda'_{\sigma+1}(\lambda_1 - \lambda_{\sigma+1})K_1 - \lambda_{\sigma+1}(\lambda_1 - \lambda'_{\sigma+1})}{(\lambda_1 - \lambda_{\sigma+1})K_1 - (\lambda_1 - \lambda'_{\sigma+1})},$$

damit ist also A_1 bestimmt. Wäre A_1 eine parabolische Substitution

$$\frac{1}{A_1\eta - \lambda_1} = \frac{1}{\eta - \lambda_1} + \gamma_1,$$

so ergäbe sich, indem man $\eta = \lambda_{\sigma+1}$, also $A_1\eta = \lambda'_{\sigma+1}$ setzt,

$$\gamma_1 = \frac{1}{\lambda'_{\sigma+1} - \lambda_1} - \frac{1}{\lambda_{\sigma+1} - \lambda_1}.$$

Aehnlich bestimmen sich die $A_2, A_3, \cdots A_{\sigma+1}$.

Zufolge der Gleichung (1) besteht zwischen den $3\sigma+1$ Grössen

(14) $$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\sigma; \lambda_{\sigma+1}, \lambda'_{\sigma+1}, \cdots \lambda^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}; K_1, K_2, \cdots K_{\sigma+1}$$

noch eine Beziehung, so dass also nur 3σ derselben willkürlich sind. Diese 3σ Grössen können dann als die Parameter der Gruppe ϑ angesehen werden; durch die Willkürlichkeit des Integralquotienten η gehen dann noch drei dieser Grössen ab, man kann z. B. drei der $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\sigma$ in willkürlich gewählte feste Punkte legen, so dass in der That genau $3\sigma - 3$ wesentliche Parameter übrig bleiben.

Die in den Coefficienten der Differentialgleichung (A_2) auftreten Constanten sind also eindeutige Functionen der Grössen (14); di eindeutigen Functionen spielen für die Differentialgleichung (A_2) ei ähnliche Rolle, wie die in der Nr. 206 (S. 298) erwähnte Modulfun tion für ein elliptisches Integral erster Gattung.

Es entsteht nun die umgekehrte Frage, ob man auch stets ei Differentialgleichung zweiter Ordnung von der für (A_2) vorausgesetzte Beschaffenheit finden kann, falls man den Grössen (14) mit den B dingungen des Problems verträgliche, sonst aber willkürliche Werth beilegt, d. h. mit andern Worten, wenn man den Bereich F_0 oder d Gruppe ϑ irgendwie vorschreibt.

Denken wir uns also, es sei ein Bereich F_0 gegeben, der von 2 einen zusammenhängenden Curvenzug bildenden Seiten

$$s_1, s_1', s_2, s_2', \cdots s_\sigma, s_\sigma'$$

begrenzt wird. Diese σ Seitenpaare mögen durch gewisse gegebe Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\sigma$, die wir als elliptische oder parabolisc voraussetzen, in einander transformirt werden, und der Schnittpunkt der Seiten $s_\varkappa$ und

$$s_\varkappa' = A_\varkappa s_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

sei ein Doppelpunkt von $A_\varkappa$, und zwar wenn die Substitution $A_\varkappa$ ei elliptische ist, derjenige, der bei der canonischen Form (5) von . im Zähler auftritt, falls

$$0 < \delta_\varkappa < 1$$

ist. Ebenso sei der Schnittpunkt $\lambda_{\sigma+1}$ von s_1 und s_σ' ein Doppelpu der Substitution

$$A_{\sigma+1} = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_\sigma^{-1},$$

dann sind die Schnittpunkte $\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa)}$ von $s_\varkappa'$ und $s_\varkappa$ aus $\lambda_{\sigma+1}$ durch Substitutionen $A_1 A_2 \cdots A_\varkappa$ transformirt,

$$\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa)} = A_1 A_2 \cdots A_\varkappa \lambda_{\sigma+1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots (\sigma - 1)),$$

und die im Satze II (Nr. 210, S. 310) vorgesehenen Bedingungen die Winkelsummen der Cyklen

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\sigma, \lambda_{\sigma+1}, \lambda_{\sigma+1}', \cdots \lambda_{\sigma+1}^{(\sigma+1)}$$

sind erfüllt. Wir nennen einen solchen Bereich F_0 oder einen demselben durch erlaubte Abänderung hervorgehenden, (wobei wir Abänderungen stets so einrichten wollen, dass der abgeänderte Berei auch ein zusammenhängender ist), oder endlich einen aus diesem B reiche durch Anwendung einer beliebigen Substitution der aus den

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1}$$

als Basis gebildeten Gruppe ϑ entstehenden, nach Herrn Klein einen Fundamentalbereich, wohl auch ein Fundamentalpolygon der Gruppe ϑ (Polygon générateur bei Herrn Poincaré).

Wir fragen nach Functionen $\mathfrak{X}$ von η, die sich innerhalb des Bereiches F_0 wie rationale Functionen verhalten, d. h. für welche eine rationale Function von η so angegeben werden kann, dass die Differenz von $\mathfrak{X}$ und dieser rationalen Function innerhalb F_0 sich wie eine ganze Function verhält, und die in correspondirenden Punkten der Seiten $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ von F_0 für $\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma$ dieselben Werthe annehmen, oder, was dasselbe heisst, die auf der aus F_0 durch Zusammenbiegen gebildeten geschlossenen Fläche $\overline{F}_0$ eindeutig sind.[1]

Denken wir uns, die Existenz dieser Functionen sei bewiesen; sei $\mathfrak{X}$ eine solche Function. Dann kennen wir $\mathfrak{X}$ zunächst nur innerhalb des Bereiches F_0. Construiren wir die Abbildungen des Polygons F_0 mittelst aller Substitutionen der Gruppe ϑ, so werden dieselben eine gewisse, die η-Ebene oder einen Theil derselben einfach oder mehrfach überdeckende Fläche F schlicht und lückenlos erfüllen. Wir versuchen zunächst die innerhalb F_0 definirte Function $\mathfrak{X}$ in den mit F_0 längs der Seite $s_\varkappa'$ zusammenhängenden Bereich

$$F_\varkappa = A_\varkappa F_0$$

fortzusetzen.

Bedeutet η_0 eine Stelle der Seite $s_\varkappa'$, die keine Ecke ist, so entspricht derselben auf der geschlossenen Fläche $\overline{F}_0$ ein Punkt, der nicht zur Begrenzung von $\overline{F}_0$ gehört, in dessen Umgebung sich die Function $\mathfrak{X}$ folglich wie eine rationale Function verhält. Wir können offenbar ohne die Allgemeinheit zu beschränken annehmen, η_0 sei auch keine Unendlichkeitsstelle für unsere Function, dann liegen auch in einer gewissen Umgebung von η_0 keine Unendlichkeitsstellen von $\mathfrak{X}$; wenn wir also einen innerhalb von F_0 gelegenen Punkt η_1 in hinreichender Nähe von η_0 betrachten, in dessen Umgebung sich die Function $\mathfrak{X}$ regulär verhält, und wir entwickeln $\mathfrak{X}$ in der Umgebung von η_1

$$\mathfrak{X}(\eta) = \mathfrak{P}(\eta \mid \eta_1), \tag{15}$$

so reicht der Convergenzkreis dieser Entwickelung jedenfalls über den Bereich F_0 hinaus, d. h. es liegt ein durch ein endliches Stück $\overline{s}_\varkappa'$ der Seite $s_\varkappa'$ begrenzter Theil dieser Kreisfläche im Bereiche $F_\varkappa$. Construiren wir uns die Abbildung dieses Theiles des Convergenzbezirkes der Reihe (15) vermittelst der Substitution $A_\varkappa^{-1}\eta$, so liegt diese Abbildung φ innerhalb F_0 und hat mit der Seite $s_\varkappa$ das Stück

$$\overline{s}_\varkappa = A_\varkappa^{-1}\overline{s}_\varkappa'$$

gemein. Für alle Punkte ζ von φ verhält sich die Function $\mathfrak{X}$ wie eine rationale Function, das Gleiche gilt von der durch die Gleichung (15) definirten Function

$$\mathfrak{X}(A_\varkappa \zeta) = \mathfrak{P}(A_\varkappa \zeta \mid \eta_1).$$

Für alle Punkte ζ des endlichen Stückes $\bar{s}_\varkappa$ der Seite $s_\varkappa$ haben aber zufolge der über die Function $\mathfrak{X}$ gemachten Voraussetzung die beiden Ausdrücke

$$\mathfrak{X}(\zeta) \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}(A_\varkappa \zeta \mid \eta_1)$$

denselben Werth, sie müssen folglich für alle Punkte von φ übereinstimmen. D. h. die durch die Gleichung (15) definirte analytische Fortsetzung der Function $\mathfrak{X}$ hat für Punkte η innerhalb des dem Bereiche $F_\varkappa$ angehörigen Theiles des Convergrenzbezirkes der Reihe (15) dieselben Werthe, wie die Function $\mathfrak{X}$ in den durch die Substitution $A_\varkappa^{-1}$ aus diesen Punkten hervorgehenden Punkten ζ des Bereiches F_0.

Durch weitere analytische Fortsetzung zeigt man ebenso, dass die Function $\mathfrak{X}$ für alle Punkte von $F_\varkappa$ dieselben Werthe annimmt, wie in den durch die Substitution $A_\varkappa^{-1}$ correspondirenden Punkten von F_0; allgemein kann man sagen:

Die Function $\mathfrak{X}$ lässt sich über die ganze Fläche F hin analytisch fortsetzen und sie nimmt in einem Punkte η von F, der dem Bereiche

$$F_S = SF_0,$$

wo S eine Substitution von ϑ bedeutet, angehört, denselben Werth an wie in dem correspondirenden Punkte

$$S^{-1}\eta$$

des Bereiches F_0.

Die Function $\mathfrak{X}$ verhält sich also auf der ganzen Fläche F wie eine rationale Function und bleibt bei den Substitutionen der Gruppe ϑ ungeändert; dagegen wird sich dieselbe über die Begrenzung der Fläche F hinweg nicht analytisch fortsetzen lassen, so dass also, wenn F z. B. nicht die ganze η-Ebene überdeckt, der Existenzbereich der Function $\mathfrak{X}$ ein beschränkter ist.

Sechstes Kapitel.

212. Methode von Schwarz und Carl Neumann. Poisson'sches Integral und alternirendes Verfahren.

Die in der vorigen Nummer betrachtete Function $\mathfrak{X}$ kann im Allgemeinen innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 jeden Werth öfter als einmal annehmen; wir wollen uns zunächst die Aufgabe stellen, die Existenz einer auf $\overline{F}_0$ eindeutigen Function z von η nachzuweisen, die innerhalb F_0 jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt, also innerhalb F_0 auch nur einmal (von erster Ordnung) unendlich wird. Sei $\eta = \eta_\infty$ diese Unendlichkeitsstelle.

Nach dem Vorgange des Herrn Klein liefern wir diesen Existenzbeweis nach denselben Principien, mit Hülfe deren die Herren Carl Neumann und H. A. Schwarz den Beweis für die Riemann'schen Existenztheoreme, welche die Grundlage von Riemann's Theorie der Abel'schen Functionen bilden, geliefert haben.

Wir skizziren zunächst kurz das Wesen dieser Principien.

Wenn man in der Function

$$z = f(\eta)$$

der complexen Variabeln

$$\eta = u + vi$$

den realen Theil und Coefficienten von i gesondert als Functionen der realen Veränderlichen u, v betrachtet,

$$z = \varphi(u, v) + i\psi(u, v),$$

so genügen bekanntlich φ und ψ der partiellen Differentialgleichung

$$\text{(I)} \qquad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0,$$

und man hat

$$\text{(II)} \qquad \psi(u, v) = \int \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial v} du + \frac{\partial \varphi}{\partial u} dv \right),$$

so dass also $\psi(u, v)$, abgesehen von einer Constanten, bestimmt ist, wenn man $\varphi(u, v)$ kennt. Man nennt φ und ψ complementäre Lösungen der Differentialgleichung (I).

Sei in der Ebene der complexen Variabeln η oder in einer über dieser Ebene ausgebreiteten Riemann'schen Fläche ein von einer Curve $\bar{\mathfrak{C}}$ begrenzter Bereich $\mathfrak{C}$ gegeben, so lautet das Riemann'sche Existenztheorem, soweit wir hier von demselben Gebrauch zu machen haben, wie folgt:

Man kann eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (I) finden, die auf der Begrenzung $\bar{\mathfrak{C}}$ eine vorgeschriebene stetige Folge von Werthen annimmt, innerhalb $\mathfrak{C}$ in vorgeschriebener Weise unstetig oder unendlich wird, sonst aber allenthalben im Innern von $\mathfrak{C}$ eindeutig, endlich und stetig ist.

An Stelle des von Riemann versuchten, auf das sogenannte Dirichlet'sche Princip gegründeten Beweises, haben die Herren Schwarz und Neumann einen Beweis dieses Theorems gegeben, der auf zwei Sätzen beruht.

Der erste dieser Sätze rührt von Poisson her und lehrt, dass das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R,\,\Theta)\,\frac{R^2-\varrho^2}{R^2-2R\varrho\cos\gamma+\varrho^2}\,Rd\Theta,$$

worin

$$\cos\gamma=\cos(\varphi-\Theta),\quad u=\varrho\cos\varphi,\quad v=\varrho\sin\varphi$$

zu nehmen ist, eine Function

$$F(u,\,v)=f(\varrho,\,\varphi)$$

der beiden realen Variabeln $u,\,v$ darstellt, die innerhalb des Kreises

$$u^2+v^2=R^2$$

eindeutig, endlich und stetig ist, die partielle Differentialgleichung (I) befriedigt, und die auf der Peripherie dieses Kreises die vorgeschriebenen stetigen Werthe

$$f(R,\,\varphi),\qquad (0<\varphi<2\pi)$$

annimmt.

Der zweite Satz lehrt, dass, wenn die Aufgabe, eine Function zu bestimmen, die innerhalb eines gewissen Bereiches eindeutig, endlich und stetig ist, die Differentialgleichung (I) befriedigt und auf der Begrenzung stetig vorgeschriebene Werthe annimmt, für zwei Bereiche B_1, B_2 gelöst ist, welche ein gewisses Flächenstück b gemein haben, dieselbe Aufgabe auch stets gelöst werden kann für den Bereich

$$B=B_1+B_2-b,$$

der, wie sich Herr Neumann ausdrückt, durch Verschmelzung der beiden Bereiche B_1, B_2 entsteht.

Den Beweis dieses zweiten Satzes liefern die Herren Schwarz und Neumann durch das sogenannte alternirende Verfahren, welches im Folgenden besteht.

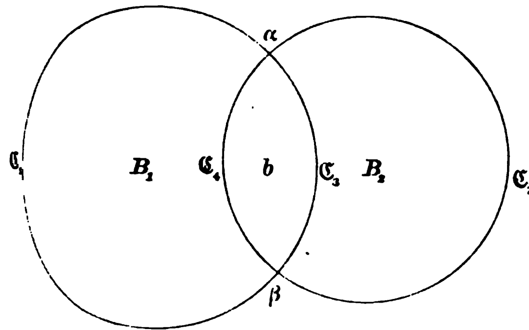


Fig. 6.

Bezeichnen wir die Begrenzung des Bereiches B_1 durch $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_3$, die des Bereiches B_2 durch $\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_4$, so dass die Begrenzung des B_1, B_2 gemeinsamen Stückes b durch $\mathfrak{C}_3 + \mathfrak{C}_4$ gegeben wird (vergl. Fig. 6), so handelt es sich darum, eine Function $F(u, v)$ zu finden, die der partiellen Differentialgleichung genügt, innerhalb des Bereiches

$$B_1 + B_2 - b = B$$

eindeutig, endlich, stetig ist und auf der Begrenzung von B, d. h. auf $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, die vorgeschriebene stetige Werthenfolge

$$F(\mathfrak{C}_1), \text{ beziehungsweise } F(\mathfrak{C}_2)$$

annimmt. Wir sagen kurz von einer Function, die innerhalb eines Bereiches die Gleichung (I) befriedigt und eindeutig, endlich, stetig ist, sie sei eine Potentialfunction für diesen Bereich.

Wir denken uns dann zunächst für den Bereich B_1 eine Potentialfunction F_1 construirt, die längs $\mathfrak{C}_1$ die Werthe $F(\mathfrak{C}_1)$ und längs $\mathfrak{C}_3$ die sich in den Punkten α und β, wo $\mathfrak{C}_3$ mit $\mathfrak{C}_1$ zusammenstösst, an die Werthe $F(\mathfrak{C}_1)$ stetig anschliessende, aber sonst willkürlich vorgeschriebene stetige Werthenfolge

$$F_1(\mathfrak{C}_3)$$

annimmt. Es muss also nur

$$\lim_{\alpha} F_1(\mathfrak{C}_3) = \lim_{\alpha} F(\mathfrak{C}_1),$$
$$\lim_{\beta} F_1(\mathfrak{C}_3) = \lim_{\beta} F(\mathfrak{C}_1)$$

sein, im Uebrigen ist die stetige Werthenfolge $F_1(\mathfrak{C}_3)$ ganz beliebig. Die Auffindung der Function F_1 ist zufolge der Voraussetzung, dass die Aufgabe für den Bereich B_1 lösbar sei, möglich. Die Werthe dieser Function F_1 längs $\mathfrak{C}_4$ seien $F_1(\mathfrak{C}_4)$, dann ist

$$\lim_{\alpha} F_1(\mathfrak{C}_4) = \lim_{\alpha} F_1(\mathfrak{C}_3) = \lim_{\alpha} F(\mathfrak{C}_1),$$

also, da die Randwerthe $F(\mathfrak{C}_1)$, $F(\mathfrak{C}_2)$ auch eine stetige Folge bilden sollen, d. h.

$$\lim_{\alpha} F(\mathfrak{C}_1) = \lim_{\alpha} F(\mathfrak{C}_2)$$

ist, auch

$$\lim_{\alpha} F_1(\mathfrak{C}_4) = \lim_{\alpha} F(\mathfrak{C}_2)$$

und ebenso

$$\lim_{\beta} F_1(\mathfrak{C}_4) = \lim_{\beta} F(\mathfrak{C}_2).$$

Wir können also für B_2 eine Potentialfunction F_2 construiren, die auf $\mathfrak{C}_2$ die Werthe $F(\mathfrak{C}_2)$, auf $\mathfrak{C}_4$ die Werthe $F_1(\mathfrak{C}_4)$ annimmt. Dann ist wieder

$$\lim_{\alpha} F_2(\mathfrak{C}_3) = \lim_{\alpha} F(\mathfrak{C}_1),$$

$$\lim_{\beta} F_2(\mathfrak{C}_3) = \lim_{\beta} F(\mathfrak{C}_1),$$

es lässt sich folglich für den Bereich B_1 eine Potentialfunction F_3 finden, die längs $\mathfrak{C}_1$ die Werthe $F(\mathfrak{C}_1)$ und längs $\mathfrak{C}_3$ die Werthe $F_2(\mathfrak{C}_3)$ annimmt. Wir bilden dann wieder eine Potentialfunction F_4 für B_2, die längs $\mathfrak{C}_2$ die Werthe $F(\mathfrak{C}_2)$ und längs $\mathfrak{C}_4$ die sich an dieselben stetig anschliessenden Werthe $F_3(\mathfrak{C}_4)$ annimmt, und fahren so fort.

Es ergiebt sich auf diese Weise eine Folge von Potentialfunctionen

$$F_1, F_3, F_5, \ldots$$

für B_1 und eine Reihe ebensolcher Functionen

$$F_2, F_4, F_6, \ldots$$

für B_2, und man beweist nun, dass sich jede dieser beiden Folgen einer bestimmten Grenzfunction annähert; sei

$$\lim_{\varkappa=\infty} F_{2\varkappa+1} = F',$$

$$\lim_{\varkappa=\infty} F_{2\varkappa} = F''.$$

Dann ist F' innerhalb B_1, F'' innerhalb B_2 definirt, beide Functionen existiren folglich innerhalb b; man zeigt, dass dieselben für jeden Punkt von b übereinstimmen und dass sie innerhalb der Bereiche, wo sie definirt sind, Potentialfunctionen darstellen. Es ist folglich F' die Fortsetzung von F'' und diese beiden Functionen zusammen genommen stellen das gesuchte Potential F innerhalb B dar.

Dasselbe Verfahren führt auch zum Ziele, wenn die beiden Bereiche B_1, B_2 eine gürtelförmige Zone mit einander gemein haben; Herr Carl Neumann spricht dann von einer gürtelförmigen Verschmelzung.

Auf Grund dieser beiden Sätze lässt sich die Aufgabe, ein Potential **zu finden**, welches auf der Begrenzung vorgeschriebene Werthe an**nimmt**, **für** jeden durch Verschmelzung einer endlichen Anzahl von **Kreisflächen** entstandenen Bereich lösen.

213. Construction kreisförmiger Bereiche um die Ecken des gegebenen Fundamentalbereiches.

Wir wenden uns nun zu unserem Bereiche F_0.

Wenn wir uns denselben durch Zusammenbiegen in die ge**schlossene** Fläche $\bar{F}_0$ verwandelt denken, die durch die $\sigma + 1$ Punkte

$$\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots \bar{\lambda}_\sigma, \bar{\lambda}_{\sigma+1}$$

begrenzt wird, die den Punkten

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\sigma \text{ und } \lambda_{\sigma+1}, \lambda'_{\sigma+1}, \ldots \lambda^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}$$

entsprechen, so muss eine Function

$$\varphi(u, v)$$

gefunden werden, die auf dieser Fläche allenthalben eindeutig ist, der **partiellen** Differentialgleichung (I) genügt und nur an einer Stelle in **bestimmter** Weise unendlich wird. Setzen wir nämlich

$$\eta - \eta_\infty = re^{\Theta i},$$

so soll die Function

$$z = \varphi + i\psi$$

für $\eta = \eta_\infty$ z. B. so unendlich werden, wie

$$\frac{1}{\eta - \eta_\infty} = \frac{1}{r}(\cos\Theta - i\sin\Theta),$$

also $\varphi(u, v)$ so, wie

$$\frac{\cos\Theta}{r}. \tag{16}$$

Für den Bereich F_0 selbst handelt es sich also darum, eine Lösung $\varphi(u,v)$ der partiellen Differentialgleichung (I) zu finden, die in correspondirenden Punkten der Seitenpaare $s_\varkappa$, $s'_\varkappa$ denselben Werth annimmt, an der vorgeschriebenen Stelle η_∞ wie der Ausdruck (16) unendlich wird, sonst innerhalb F_0 allenthalben eindeutig, endlich, stetig ist, und für welche die complementäre Function

$$\psi(u, v) = \int\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial v}du + \frac{\partial\varphi}{\partial u}dv\right)$$

ebenfalls in correspondirenden Punkten von $s_\varkappa$ und $s'_\varkappa$ gleiche Werthe besitzt.

Sei zunächst $\lambda_\varkappa$ der Doppelpunkt einer elliptischen Substitution $A_\varkappa$, d. h.

$$\frac{A_\varkappa\eta-\lambda_\varkappa}{A_\varkappa\eta-\mu_\varkappa}=e^{2\pi i\delta_\varkappa}\frac{\eta-\lambda_\varkappa}{\eta-\mu_\varkappa},$$

dann wissen wir, dass die Bahncurven, d. h. die Kreise

$$\left|\frac{\eta-\lambda_\varkappa}{\eta-\mu_\varkappa}\right|=\text{const.},$$

durch die Substitution $A_\varkappa$ in sich selbst transformirt werden (Nr. 200, S. 271). Ist λ_ι der Doppelpunkt einer parabolischen Substitution A_ι, also

$$\frac{1}{A_\iota\eta-\lambda_\iota}=\frac{1}{\eta-\lambda_\iota}+\gamma_\iota,$$

und setzen wir

$$\frac{1}{\eta-\lambda_\iota}=\zeta=u'+v'i,$$

so werden die geraden Linien der ζ-Ebene

$$v'-v_0'=(u'-u_0')\operatorname{tang}\operatorname{Arg}\gamma_\iota,$$

wo v_0, u_0' irgend ein reales Werthepaar bedeutet, durch die Substitution A_ι in sich selbst transformirt. Diesen geraden Linien entsprechen in der η-Ebene Kreise, die einander im Punkte $\eta=\lambda_\iota$ berühren; diese Kreise stellen die Bahncurven der parabolischen Substitution A_ι dar, d. h. jeder Punkt eines solchen Kreises wird durch die Substitution A_ι in einen Punkt eben desselben Kreises transformirt.

Wir denken uns nun um jeden der Punkte

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots\ \lambda_\sigma$$

eine Bahncurve der entsprechenden Substitution gelegt; für diejenigen Punkte, die Doppelpunkte parabolischer Substitutionen sind, geht die betreffende Bahncurve durch den Punkt selbst hindurch. Diese Bahncurven richten wir so ein, dass sie einander nicht schneiden und bezeichnen sie durch k_1, k_2, ... k_σ.

Nehmen wir den Sector des Kreises $k_\varkappa$, der ganz innerhalb F_0 liegt, also von $k_\varkappa$, $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ begrenzt wird, und bilden denselben durch die Function

$$\zeta=\left(\frac{\eta-\lambda_\varkappa}{\eta-\mu_\varkappa}\right)^{\frac{1}{\delta_\varkappa}},$$

beziehungsweise

$$\zeta=e^{\frac{2\pi i}{\gamma_\varkappa}\cdot\frac{1}{\eta-\lambda_\varkappa}},$$

je nachdem $A_\varkappa$ eine elliptische oder parabolische Substitution ist, auf

eine ζ-Ebene ab, so erhalten wir in der ζ-Ebene einen Kreis K mit dem Mittelpunkte $\zeta = 0$, dessen ganze Peripherie dem zwischen $s_\varkappa$ und $s'_\varkappa$ innerhalb F_0 gelegenen Bogen des Kreises $k_\varkappa$ entspricht; ferner entspricht den Schnittpunkten $(k_\varkappa, s_\varkappa)$ und $(k_\varkappa, s'_\varkappa)$ ein und derselbe Punkt s der Peripherie von K, und endlich den beiden innerhalb $k_\varkappa$ gelegenen Stücken von $s_\varkappa$ und $s'_\varkappa$ (die ja, weil $k_\varkappa$ Bahncurve von $A_\varkappa$ ist, durch die Substitution $A_\varkappa$ aus einander hervorgehen) eine vom Punkte $\zeta = 0$ nach $\zeta = s$ hin gelegte, ganz innerhalb $k_\varkappa$ verlaufende Curve. Wir können also eine Potentialfunction finden, die auf der Peripherie von $k_\varkappa$ vorgeschriebene Werthe annimmt und innerhalb $k_\varkappa$ eindeutig, endlich und stetig ist (stetig auch bei Ueberschreitung der Curve $(0, s)$). Diese Potentialfunction hat dann als Function von u, v die Eigenschaft, eine innerhalb des Sectors $(k_\varkappa, s_\varkappa, s'_\varkappa)$ definirte Potentialfunction zu sein, die in correspondirenden Punkten der beiden den Seiten $s_\varkappa$, $s'_\varkappa$ an-

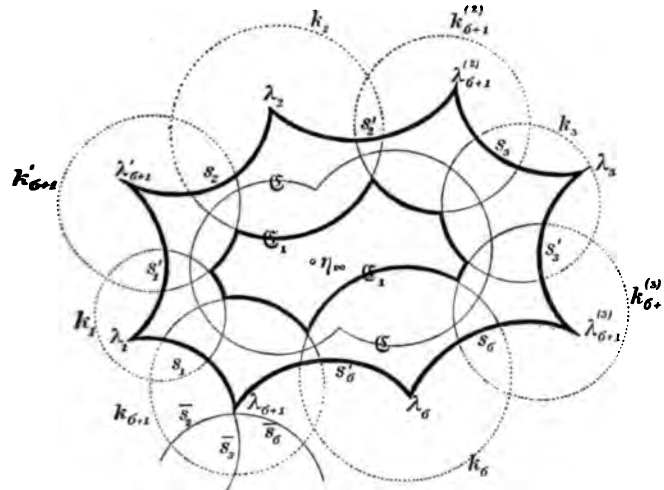


Fig. 7.

gehörigen Begrenzungsstücke gleiche Werthe annimmt, und deren Werthe auf dem $k_\varkappa$ angehörigen Begrenzungsstücke willkürlich vorgeschrieben werden können (in den Punkten $(k_\varkappa, s_\varkappa)$ und $(k_\varkappa, s'_\varkappa)$ müssen diese vorgeschriebenen Werthe jedoch übereinstimmen). Die zu dieser Potentialfunction complementäre (durch eine Gleichung von der Form (II) definirte) Function kann dann so eingerichtet werden, dass auch sie in correspondirenden Punkten der den Seiten $s_\varkappa$, $s'_\varkappa$ angehörigen Begrenzungsstücke gleiche Werthe annimmt.

Wir beschreiben nun um $\lambda_{\sigma+1}$ herum (beziehungsweise durch $\lambda_{\sigma+1}$, wenn $A_{\sigma+1}$ eine parabolische Substitution ist) eine Bahncurve $k_{\sigma+1}$ von $A_{\sigma+1}$ und construiren deren Abbildungen

$$k_{\sigma+1}^{(\nu)} = A_\nu \cdots A_2 A_1 k_{\sigma+1} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots (\sigma-1)),$$

die dann Bahncurven der Substitutionen

$$A_\nu \cdots A_1 A_{\sigma+1} A_1^{-1} \cdots A_\nu^{-1}$$

sind, also die Punkte $\lambda_{\sigma+1}^{(\nu)}$ in derselben Weise umgeben, wie k
Punkt $\lambda_{\sigma+1}$. Sei dann

$$\bar{s}_2 = A_1^{-1} s_2 = A_1^{-1} A_2^{-1} s_2',$$

$$\bar{s}_3 = A_1^{-1} A_2^{-1} s_3 = A_1^{-1} A_2^{-1} A_3^{-1} s_3',$$

. . . .

$$\bar{s}_\sigma = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_{\sigma-1}^{-1} s_\sigma = A_{\sigma+1} s_\sigma',$$

so gehen die Curvenstücke $\bar{s}_2, \bar{s}_3, \cdots \bar{s}_\sigma$ von $\lambda_{\sigma+1}$ aus und v
ausserhalb des Bereiches F_0. Der Kreis $k_{\sigma+1}$ zerfällt dann in
Sectoren, die wir durch ihre in Parenthesen geschriebenen Begr
stücke bezeichnen; von diesen Sectoren liegt $(k_{\sigma+1}, s_1, s_\sigma')$ i
F_0; ferner ist

$$(k_{\sigma+1}, s_1, \bar{s}_2) = A_1^{-1} (k_{\sigma+1}', s_1', s_2),$$

$$(k_{\sigma+1}, \bar{s}_2, \bar{s}_3) = A_1^{-1} A_2^{-1} (k_{\sigma+1}'', s_2', s_3),$$

. . . .

$$(k_{\sigma+1}, \bar{s}_{\sigma-1}, \bar{s}_\sigma) = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_{\sigma-1}^{-1} (k_{\sigma+1}^{(\sigma-1)}, s_{\sigma-1}', s_\sigma)$$

und die Winkelsumme

$$\sphericalangle (s_\sigma', s_1) + \sphericalangle (s_1, \bar{s}_2) + \sphericalangle (\bar{s}_2, \bar{s}_3) + \cdots + \sphericalangle (\bar{s}_{\sigma-1}, \bar{s}_\sigma) = \sphericalangle$$

beträgt (vergl. Nr. 209, S. 309) absolut genommen $2\pi\delta_{\sigma+1}$ od
je nachdem $A_{\sigma+1}$ eine elliptische oder parabolische Substitu
Im ersteren Falle bilden wir den Sector

$$(k_{\sigma+1}, \bar{s}_\sigma, s_\sigma')$$

durch die Function

$$\zeta = \left(\frac{\eta - \lambda_{\sigma+1}}{\eta - \mu_{\sigma+1}}\right)^{-\frac{1}{\delta_{\sigma+1}}},$$

im letzteren Falle durch die Function

$$\zeta = e^{-\frac{2\pi i}{\gamma_{\sigma+1}} \cdot \frac{1}{\eta - \lambda_{\sigma+1}}}$$

auf eine ζ-Ebene ab; dann entspricht diesem Sector ein um ζ
Mittelpunkt beschriebener Vollkreis K, und zwar dem zur Beg
gehörigen Bogen von $k_{\sigma+1}$, die Peripherie von K, den zur Beg
gehörigen Stücken von $\bar{s}_\sigma$, s_σ' ein von $\zeta = 0$ nach einem bes

Punkte der Kreisperipherie K hin gezogener Schnitt. Construiren wir eine Potentialfunction für K, die auf der Peripherie dieses Kreises eine vorgeschriebene stetige Werthenfolge besitzt, so ist diese Function, als Function der Coordinaten u, v eines innerhalb F_0 gelegenen Punktes aufgefasst, eine Potentialfunction, die innerhalb der σ Sectoren

(17) $$(k_{\sigma+1}, s_1, s_\sigma'), \quad (k'_{\sigma+1}, s_2, s_1'), \cdots (k^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}, s_\sigma, s'_{\sigma-1})$$

eindeutig, endlich und stetig ist, in correspondirenden Punkten der den Seitenpaaren

(18) $$s_1, s_1'; \; s_2, s_2'; \cdots s_\sigma, s_\sigma'$$

angehörigen Begrenzungsstücke gleiche Werthe annimmt und auf den den Kreisen

$$k_{\sigma+1}, k'_{\sigma+1}, \cdots k^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}$$

angehörigen Begrenzungsstücken in eine willkürlich vorgeschriebene stetige Werthenfolge übergeht. Diese Stetigkeit ist dann auch wieder so zu verstehen, dass in den Punkten $(k_{\sigma+1}, s_1)$ und $(k'_{\sigma+1}, s_1')$, $(k'_{\sigma+1}, s_2)$ und $(k''_{\sigma+1}, s_2')$, $\cdots$ $(k^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}, s_\sigma)$ und $(k_{\sigma+1}, s_\sigma')$ die vorgeschriebenen Werthe übereinstimmen. Die complementäre Potentialfunction kann dann auch so eingerichtet werden, dass ihre Werthe in correspondirenden Punkten der Seitenpaare (18) übereinstimmen.

Wir können uns die Kreise

(19) $$k_1, k_2, \cdots k_\sigma, \quad k_{\sigma+1}, k'_{\sigma+1}, \cdots k^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}$$

so eingerichtet denken, dass nicht nur die k_1, k_2, $\cdots$ k_σ, sondern auch die $k_{\sigma+1}$, $k'_{\sigma+1}$, $\cdots$ $k^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}$ einander nicht schneiden; die letztere Voraussetzung hat der Betrachtung, die auf die Herstellung einer Potentialfunction für die Sectoren (17) hinzielte, schon stillschweigend zu Grunde gelegen. Dagegen können die Kreise

$$k^{(\varkappa-1)}_{\sigma+1}, k_\varkappa, k^{(\varkappa)}_{\sigma+1}$$

einander durchsetzen, wir wollen sogar geradezu annehmen, dass dies für $\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma$ der Fall sei, so dass also (vergl. die Figur 7) die ausserhalb aller übrigen Kreise, aber innerhalb F_0 gelegenen Stücke der Kreisperipherien (19) einen ununterbrochenen Linienzug $\mathfrak{C}_1$ bilden, der mit der Begrenzung von F_0 zusammengenommen einen gürtelförmigen Theil Φ von F_0 vollständig begrenzt. Sollten die Kreise (19) allein das noch nicht leisten, so müssen wir einen Cyklus von scheinbaren Ecken des Bereiches einführen, d. h. einen ausserhalb aller Kreise (19) gelegenen Punkt einer Seite von F_0 als Ecke auffassen, demselben die identische Substitution 1 zuordnen und z. B.

einen durch diesen Punkt hindurch gehenden, ganz im Innern von F_0 verlaufenden Kreis den Kreisen (19) hinzufügen. Sollte die Einführung einer solchen scheinbaren Ecke nicht ausreichen, so wären deren mehrere einzuführen.

Wir halten der Einfachheit wegen die erwähnte Annahme fest und stellen uns zunächst die Aufgabe, für den gürtelförmigen Bereich Φ eine Potentialfunction zu finden, die zugleich mit ihrer complementären in correspondirenden Punkten der Seitenpaare (18) gleiche Werthe annimmt und auf $\mathfrak{C}_1$ eine stetige, aber willkürlich vorgeschriebene Werthenfolge besitzt.

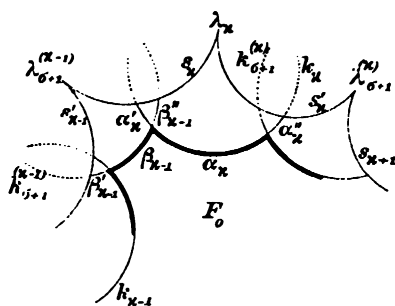


Fig. 8.

Wir bezeichnen die innerhalb F_0 befindlichen Theile der Kreise (19) wie in der nebenstehenden Figur angedeutet ist, so dass also der innerhalb F_0 gelegene Theil von $k_\varkappa$ sich aus $\alpha'_\varkappa$, $\alpha_\varkappa$, $\alpha''_\varkappa$, der von $k_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}$ aus $\beta'_{\varkappa-1}$, $\beta_{\varkappa-1}$, $\beta''_{\varkappa-1}$ zusammensetzt; die Stücke

$$\alpha_\varkappa, \ \beta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

bilden zusammengenommen den Linienzug $\mathfrak{C}_1$.

Wir betrachten nun die Gesammtheit der Sectoren

$$(20) \qquad (k_\varkappa, \ s_\varkappa, \ s'_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

einerseits, die Gesammtheit der Sectoren (17) andererseits als je einen Bereich und wenden auf diese Bereiche das in der Nr. 212 (S. 325) beschriebene alternirende Verfahren an.

214. Existenzbeweis durch zweimalige Anwendung des alternirenden Verfahrens.

Zunächst construiren wir für jeden der Sectoren $(k_\varkappa, s_\varkappa, s'_\varkappa)$ eine Potentialfunction, die zugleich mit ihrer complementären in correspondirenden Punkten der zur Begrenzung gehörigen Stücke von $s_\varkappa$, $s'_\varkappa$ gleiche Werthe annimmt und die auf $\alpha_\varkappa$ die Werthe der für $\mathfrak{C}_1$ vorgeschriebenen stetigen Folge besitzt; die Werthe auf $\alpha'_\varkappa$ und $\alpha''_\varkappa$ mögen beliebig vorgeschrieben sein, sie müssen sich nur in den Punkten, wo $\alpha'_\varkappa$ und $\alpha''_\varkappa$ an $\alpha_\varkappa$ stossen, den daselbst vorgeschriebenen Werthen stetig anschliessen. Wir können z. B. fordern, dass die zu bestimmende

Potentialfunction längs α_x' constant gleich dem in dem Grenzpunkte von α_x und α_x' vorgeschriebenen Werthe, und längs α_x'' ebenfalls constant, gleich dem im Grenzpunkte von α_x'' und α_x vorgeschriebenen Werthe sei.

Die Gesammtheit der so construirten Potentialfunctionen bezeichnen wir durch $\chi_0(u, v)$, d. h. wir verstehen unter $\chi_0(u, v)$ etwa einen analytischen Ausdruck, der innerhalb jedes einzelnen der Sectoren (20) die daselbst construirte Potentialfunction darstellt.

Dieses $\chi_0(u, v)$ nimmt dann längs der Stücke β_x', β_x'' gewisse wohl bestimmte Werthe an, die sich an die für die Stücke β_x stattfindenden Werthe der für $\mathfrak{C}_1$ vorgeschriebenen Folge stetig anschliessen. Wir construiren nun eine Potentialfunction $\chi_1(u, v)$ für die Sectoren (17), die längs der Stücke

$$\beta_1', \beta_1'', \beta_2', \beta_2'', \cdots \beta_\sigma', \beta_\sigma''$$

die daselbst stattfindenden Werthe von $\chi_0(u, v)$, längs der Stücke

$$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_\sigma$$

die für $\mathfrak{C}_1$ vorgeschriebenen Werthe annimmt und überdies zugleich mit ihrer complementären in correspondirenden Punkten der Seiten s_x, s_x' $(x = 1, 2, \cdots \sigma)$ die gleichen Werthe besitzt.

Dann construiren wir wieder ein System $\chi_2(u, v)$ von Potentialfunctionen für die Sectoren (20), die auf den Stücken

$$\alpha_1', \alpha_1'', \alpha_2', \alpha_2'', \cdots \alpha_\sigma', \alpha_\sigma''$$

die daselbst stattfindenden Werthe von $\chi_1(u, v)$, auf den Stücken

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\sigma$$

die für $\mathfrak{C}_1$ vorgeschriebenen Werthe annehmen und zugleich mit ihren complementären in correspondirenden Punkten der Seiten

$$s_x, s_x' \qquad (x = 1, 2, \cdots \sigma)$$

gleiche Werthe erhalten. Darauf wieder eine Potentialfunction $\chi_3(u, v)$ für die Sectoren (17), die längs der Stücke

$$\beta_x, \beta_x' \qquad (x = 1, 2, \cdots \sigma)$$

die Werthe von $\chi_2(u, v)$, längs der β_x die für $\mathfrak{C}_1$ vorgeschriebenen Werthe annimmt u. s. w. —

Nach den Principien der Herren Neumann und Schwarz ist dann

$$\lim_{\nu} \chi_{2\nu}(u, v) = \lim_{\nu} \chi_{2\nu+1}(u, v) = \chi(u, v)$$

die gesuchte Potentialfunction für Φ.

Sei nun η_∞ eine Stelle des nicht zu Φ gehörigen Theiles von F_0; wir können dann stets einen Bereich Ψ abgrenzen, der ganz innerhalb F_0 liegt, η_∞ in sich schliesst, innerhalb dessen die ganze innere Begrenzung $\mathfrak{C}_1$ von Φ gelegen ist und der durch Verschmelzung einer endlichen Anzahl von Kreisflächen entstanden gedacht werden kann (vergl. die Figur 7, wo Ψ durch Verschmelzung zweier Kreisflächen gebildet wird). Dann lässt sich für diesen Bereich Ψ eine Potentialfunction $\overline{\psi}(u, v)$ herstellen, die auf der (durch Kreisbogen gebildeten) Begrenzung $\mathfrak{C}$ eine willkürlich vorgeschriebene stetige Werthenfolge $\overline{\psi}(\mathfrak{C})$ annimmt.

Man kann dann aber auch leicht eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (I) finden, die im Punkte η_∞ wie (16)

$$\frac{\cos\Theta}{r}$$

unendlich wird, sonst innerhalb Φ allenthalben eindeutig, endlich, stetig ist und auf $\mathfrak{C}$ mit $\overline{\psi}(\mathfrak{C})$ übereinstimmt. Zu dem Ende bilden wir die Differenz

$$\overline{\psi}(\mathfrak{C}) - \left(\frac{\cos\Theta}{r}\right)_{\mathfrak{C}} = \overline{\overline{\psi}}(\mathfrak{C})$$

der vorgeschriebenen Begrenzungswerthe und der Werthe von $\frac{\cos\Theta}{r}$ auf $\mathfrak{C}$, construiren eine Potentialfunction $\overline{\overline{\psi}}(u, v)$ für Φ, die auf $\mathfrak{C}$ die Werthe $\overline{\overline{\psi}}(\mathfrak{C})$ annimmt, dann ist offenbar

$$\frac{\cos\Theta}{r} + \overline{\overline{\psi}}(u, v)$$

die zu findende Lösung von (I). Wir wollen auch eine solche Lösung als Potentialfunction für Φ bezeichnen, fügen aber zum Unterschiede von einer allenthalben endlichen Potentialfunction hinzu, dass dieselbe für $\eta = \eta_\infty$ unendlich wird wie (16).

Um nun an das Ziel der gegenwärtigen Untersuchung zu gelangen, haben wir jetzt nur noch auf die beiden Bereiche Φ und Ψ das alternirende Verfahren (gürtelförmige Verschmelzung) anzuwenden.

Wir bilden für Φ eine wie $\chi(u, v)$ beschaffene Potentialfunction (d. h. eine Potentialfunction, die sowohl wie ihre complementäre in correspondirenden Punkten der Seiten $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ gleiche Werthe annimmt) $\varphi_0(u, v)$, welche längs $\mathfrak{C}_1$ dieselben Werthe annimmt wie $\frac{\cos\Theta}{r}$; dann für Ψ eine Potentialfunction $\varphi_1(u, v)$, die in $\eta = \eta_\infty$ wie (16) unendlich wird und auf der Begrenzung $\mathfrak{C}$ dieselben Werthe hat, wie φ_0. Dann wieder für Φ eine wie $\chi(u, v)$ beschaffene Potentialfunction $\varphi_2(u, v)$, die längs $\mathfrak{C}_1$ die Werthe von $\varphi_1(u, v)$ annimmt, darauf für Ψ eine Potentialfunction $\varphi_3(u, v)$, die in $\eta = \eta_\infty$ wie (16) unendlich wird und auf $\mathfrak{C}$ mit $\varphi_2(u, v)$ übereinstimmt, u. s. w. —

Dann ist innerhalb des Φ und Ψ gemeinsamen Bereiches

$$\lim_{\nu} \varphi_{2\nu}(u, v) = \lim_{\nu} \varphi_{2\nu+1}(u, v),$$

d die beiden Grenzwerthe stellen innerhalb des aus Φ und Ψ durch rschmelzung hervorgehenden Bereiches F_0 eine Potentialfunction $u, v)$ dar, welche die in der Nr. 213 (S. 327) geforderten Eigen-aften besitzt. Diese Function ist, wie man leicht einsieht, durch e Eigenschaften auch eindeutig determinirt.

Fügen wir dieses $\varphi(u, v)$ mit dem durch die Gleichung (II) be-nmten $\psi(u, v)$ zu der Function

$$z = \varphi(u, v) + i\psi(u, v) = f(\eta)$$

complexen Variabeln η zusammen, so haben wir eine Function, die 1 innerhalb F_0 wie eine rationale Function verhält, nur an der Stelle $= \eta_\infty$ wie der Ausdruck

$$\frac{1}{\eta - \eta_\infty}$$

ndlich wird und in correspondirenden Punkten der Seitenpaare $s_\varkappa'$ gleiche Werthe annimmt. Diese Function ist, abgesehen von er additiven Constanten, auch eindeutig bestimmt.

5. Allgemeine Sätze über Functionen, die bei den Substitutionen r Gruppe ungeändert bleiben. Aufstellung der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Bedeute $g(\eta)$ eine rationale Function von η, deren sämmtliche nendlichkeitsstellen innerhalb des Bereiches F_0 gelegen sind, dann önnten wir nach genau derselben Methode, nach welcher wir die xistenz der Function $\varphi(u, v)$ beziehungsweise z nachgewiesen haben, eigen, dass es eine Function $\mathfrak{X}$ der complexen Variabeln η giebt, die ich innerhalb F_0' verhält wie die rationale Function $g(\eta)$, d. h. also o, dass die Differenz

$$\mathfrak{X} - g(\eta)$$

innerhalb F_0 allenthalben eindeutig endlich und stetig ist, und die in correspondirenden Punkten der Seitenpaare $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ gleiche Werthe annimmt. Diese Function wäre dann ebenfalls, abgesehen von einer additiven Constanten, eindeutig determinirt. Nimmt man für $g(\eta)$ die allgemeinste rationale Function, die nur innerhalb von F_0 unendlich wird, so ist die entsprechende Function $\mathfrak{X}$ die allgemeinste Function, die sich innerhalb F_0 wie eine rationale Function verhält und in correspondirenden Punkten der Seitenpaare $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ gleiche Werthe annimmt. Von dieser Function kann man nun nach einem von Herrn Schottky

angewandten Verfahren zeigen, dass sie sich **rational** durch die Function z darstellen lässt.

Dieses Verfahren besteht in Folgendem. Bezeichnen wir durch

$$z_\alpha = f(\eta \mid \alpha)$$

diejenige z-Function, die der Wahl $\eta_\infty = \alpha$ entspricht, die also an der Stelle $\eta = \alpha$ unendlich wird wie

$$\frac{1}{\eta - \alpha},$$

und allgemeiner durch

$$\overset{\nu}{z}_\alpha$$

eine Function vom Charakter der $\mathfrak{X}$-Functionen, die der Wahl

(21) $$g(\eta) = \frac{1}{(\eta - \alpha)^\nu},$$

ν eine positive ganze Zahl, entspricht, d. h. innerhalb F_0 nur an der Stelle $\eta = \alpha$ und daselbst so wie der Ausdruck (21) unendlich wird. Sei ferner $\mathfrak{X}_\alpha$ eine Function vom Charakter der $\mathfrak{X}$, die zu der rationalen Function

(22) $$g(\eta) = c_0 + \frac{c_1}{\eta - \alpha} + \frac{c_2}{(\eta - \alpha)^2} + \cdots + \frac{c_m}{(\eta - \alpha)^m}$$

gehört, wo $c_0, c_1, \cdots c_m$ Constanten bedeuten, dann ist zunächst leicht einzusehen, dass der Ausdruck

$$c_0 + c_1 z_\alpha + c_2 \overset{2}{z}_\alpha + \cdots + c_m \overset{m}{z}_\alpha \qquad (c = \text{const.})$$

auch eine $\mathfrak{X}$-Function darstellt, die sich innerhalb F_0 verhält, wie die rationale Function (22), so dass sich also dieser Ausdruck von $\mathfrak{X}_\alpha$ nur durch eine additive Constante unterscheiden kann. Also ist:

$$\mathfrak{X}_\alpha = c' + c_1 z_\alpha + c_2 \overset{2}{z}_\alpha + \cdots + c_m \overset{m}{z}_\alpha,$$

wo c' eine Constante bedeutet.

Man beweist dann sofort den Satz:

Das Product zweier Functionen vom Charakter der $\mathfrak{X}$ ist wieder eine Function von demselben Charakter.

Daraus folgt, dass das Product:

$$\overset{\varkappa}{z}_\alpha \overset{l}{z}_\alpha = C_0 + C_1 z_\alpha + C_2 \overset{2}{z}_\alpha + \cdots + C_{\varkappa+l} \overset{\varkappa+l}{z}_\alpha$$

sein muss, wo die $C_0, C_1, \cdots C_{\varkappa+l}$ Constanten bedeuten.

Hieraus schliessen wir aber, dass sich $\mathfrak{X}_\alpha$ als ganze rationale Function m-ten Grades mit constanten Coefficienten von z_α darstellen lässt.

Bedeuten endlich α, β zwei von einander verschiedene Stellen

innerhalb F_0, so ist die Function z_α in der Umgebung von $\eta = \beta$ regulär, also

$$z_\alpha = b + b_1(\eta - \beta) + \cdots,$$

wir haben demnach

$$(23) \qquad \frac{b_1}{z_\alpha - b} = \frac{1}{\eta - \beta}\{1 + b_1'(\eta - \beta) + \cdots\},$$

d. h. die Function z_β kann sich von dem Ausdrucke (23) nur durch eine additive Constante unterscheiden.

Die Functionen z_α, z_β sind demnach linear gebrochene Functionen von einander.

Aus diesen Sätzen folgt aber unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung, dass jede Function vom Charakter $\mathfrak{X}$ rational durch z ausgedrückt werden kann.

Betrachten wir eine Function $\mathfrak{X}$, die zu einer rationalen Function $g(\eta)$ gehört, die innerhalb F_0 an genau m Stellen von der ersten Ordnung unendlich wird (wie gewöhnlich in der Functionentheorie zählen wir eine $\varkappa$-fache Unendlichkeitsstelle als $\varkappa$ einfache). Bilden wir dann

$$\mathfrak{X} - a = \mathfrak{X}',$$

wo a irgend eine complexe Grösse bedeutet, so wird die Function $\mathfrak{X}'$ innerhalb F_0 auch an genau m Stellen von erster Ordnung unendlich werden.

Wir integriren $d \log \mathfrak{X}'$ über den innern Rand der Begrenzungscurve von F_0 im positiven Sinne, dann ist bekanntlich

$$\int\limits_{(F_0)} d \log \mathfrak{X}' = m' - m,$$

wo m' die Anzahl der Stellen bedeutet, an denen die Function $\mathfrak{X}'$ von der ersten Ordnung verschwindet. Nun ist aber

$$\int\limits_{(F_0)}^{\bullet} d \log \mathfrak{X}' = \sum_{\varkappa=1}^{\sigma} \left\{ \int\limits_{(\sigma_\varkappa)}^{\bullet} \frac{d \log \mathfrak{X}'}{d\eta} d\eta - \int\limits_{(\sigma_\varkappa')}^{\bullet} \frac{d \log \mathfrak{X}'}{d\eta} d\eta \right\};$$

ferner hat man, wenn

$$\eta = A_\varkappa \zeta$$

gesetzt wird,

$$\int\limits_{(s_\varkappa')}^{\bullet} \frac{d \log \mathfrak{X}'(\eta)}{d\eta} d\eta = \int\limits_{(s_\varkappa)}^{\bullet} \frac{d \log \mathfrak{X}'(A_\varkappa \zeta)}{d A_\varkappa \zeta} \frac{d A_\varkappa \zeta}{d\zeta} d\zeta,$$

also, da die Function $\mathfrak{X}'(\eta)$ in correspondirenden Punkten von $s_\varkappa$ und $s_\varkappa'$ gleiche Werthe annimmt,

$$\int\limits_{(s_\varkappa')}^{\bullet} \frac{d \log \mathfrak{X}'(\eta)}{d\eta} d\eta = \int\limits_{(s_\varkappa)}^{\bullet} \frac{d \log \mathfrak{X}'(\zeta)}{d\zeta} d\zeta;$$

d. h. es ist

$$\int_{(F_0)} d \log \mathfrak{X}' = 0,$$

also $m' = m$. Wir haben somit den Satz:

Eine Function $\mathfrak{X}$, die sich innerhalb des Bereiches F_0 wie eine rationale Function verhält und in correspondirenden Punkten der Seitenpaare $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$ gleiche Werthe besitzt, nimmt innerhalb F_0 jeden complexen Werth ebenso oft an, als sie von erster Ordnung unendlich wird.

Die Function z, die nur an einer Stelle von erster Ordnung unendlich wird, nimmt folglich innerhalb F_0 jeden Werth nur ein einziges Mal an.

Wir denken uns nun diese Function z von η nach allen Punkten der Fläche F hin fortgesetzt, so wie wir dies in der Nr. 211 (S. 321 ff.) erörtert haben, und wollen uns nun umgekehrt die Aufgabe stellen, die Natur der functionalen Abhängigkeit des η von z zu ergründen. Dies geschieht nach einem in einem besonderen Falle bereits von Riemann angewandten Verfahren, welches wir jetzt darlegen wollen.

Die Function η von z ist im Allgemeinen eine unendlich vielwerthige. Bedeutet η einen Werth innerhalb F_0, so ist die Gesammtheit der η-Werthe, die zu demselben z gehören, durch die Formel

$$S\eta$$

dargestellt, wo S eine Substitution der Gruppe ϑ bedeutet. Bilden wir also die Differentialinvariante der allgemeinen projectiven Gruppe, die Schwarz'sche Ableitung (Nr. 180, S. 184)

$$\varDelta\binom{\eta}{z} = \frac{\frac{3}{4}\left(\frac{d^2\eta}{dz^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d\eta}{dz}\frac{d^3\eta}{dz^3}}{\left(\frac{d\eta}{dz}\right)^3},$$

so ist (a. a. O. S. 185)

$$\varDelta\binom{S\eta}{z} = \varDelta\binom{\eta}{z},$$

d. h. dieser Differentialausdruck ist eine eindeutige Function von z. Betrachten wir denselben aber als Function von η, so erkennen wir, dass er sich innerhalb F_0 wie eine rationale Function verhält und in correspondirenden Punkten der Seitenpaare $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ gleiche Werthe annimmt. Es ist folglich

$$\varDelta\binom{\eta}{z}$$

eine Function vom Charakter der $\mathfrak{X}$, also eine rationale Function von z,

$$\Delta\binom{\eta}{z} = q(z). \tag{24}$$

Setzen wir nun noch

$$y_1 = \sqrt{\frac{dz}{d\eta}}, \quad y_2 = \eta\sqrt{\frac{dz}{d\eta}}, \tag{25}$$

so genügen diese beiden Ausdrücke nach den Ergebnissen der Nr. 180 (S. 184) der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dz^2} = q(z)y. \tag{26}$$

Bedeutet $\eta = \eta_0$ einen Werth, der innerhalb F_0 liegt, $z = z_0$ den entsprechenden Werth von z, so ist in der Umgebung von η_0

$$z - z_0 = \alpha_1(\eta - \eta_0) + \alpha_2(\eta - \eta_0)^2 + \cdots,$$

und es muss α_1 von Null verschieden sein, da z den Werth z_0 innerhalb F_0 nur einmal annehmen, d. h. $z - z_0$ innerhalb F_0 nur einmal und zwar von erster Ordnung verschwinden kann. Also ist in der Umgebung von $z = z_0$

$$\eta - \eta_0 = \mathfrak{P}(z|z_0),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine gewöhnliche Potenzreihe bedeutet. Diejenigen z-Werthe, die Punkten innerhalb F_0, oder genauer Punkten innerhalb der geschlossenen Fläche F_0 entsprechen, sind demnach reguläre Stellen der Differentialgleichung (26).

Die singulären Stellen der Differentialgleichung (26) können also nur den Grenzpunkten der Fläche $\overline{F}_0$, d. h. den Ecken des Fundamentalbereiches F_0 entsprechen. Machen wir uns darum zunächst klar, wie sich z in diesen Eckpunkten verhält.

Wenn wir η etwa im positiven Sinne die Begrenzung von F_0 durchlaufen lassen, so entsprechen denjenigen Punkten der Seiten $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$, die keine Ecken sind, reguläre z-Werthe; wenn η längs einer Seite in eine Ecke einrückt, so nähert sich z einem bestimmten Werthe. Sei

$$\lim_{\eta=\lambda_\varkappa} f(\eta) = a_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma),$$

$$\lim_{\eta=\lambda_{\sigma+1}} f(\eta) = \lim_{\eta=\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa)}} f(\eta) = a_{\sigma+1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma - 1),$$

dann sind also die Punkte

$$a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_\sigma,\ a_{\sigma+1}$$

die singulären Stellen der Differentialgleichung (26). Wenn η die Be-

grenzung von F_0 durchläuft, so beschreibt folglich z ein Liniensystem, welches den Punkt $a_{\sigma+1}$ mit den Punkten $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ verbindet (vergl. Fig. 9), und zwar, wenn η z. B. von λ_1 längs s_1 nach $\lambda_{\sigma+1}$, dann über s_σ' weiter nach λ_σ und so fort bis nach λ_1 zurück wandert, so geht z auf dem negativen Ufer der Linie $(a_1, a_{\sigma+1})$ von a_1 nach $a_{\sigma+1}$, dann auf dem positiven Ufer von $(a_{\sigma+1}, a_\sigma)$ nach a_σ u. s. f., endlich auf dem positiven Ufer von $(a_{\sigma+1}, a_1)$ nach a_1 zurück. Allemal entsprechen den beiden Seiten $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ die beiden Ufer der Linie

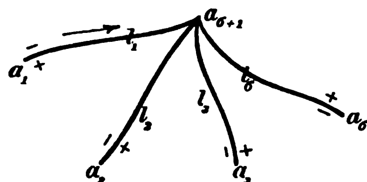


Fig. 9.

$$(a_\varkappa, a_{\sigma+1}) = l_\varkappa,$$

und die durch das Liniensystem

$$l_1, l_2, \cdots l_\sigma$$

zerschnittene z-Ebene $\overline{T}$ ist die eindeutig conforme Abbildung des Bereiches F_0.

Geht η längs der Seite $s_\varkappa'$ in den Bereich $F_\varkappa$, so überschreitet z den Schnitt $l_\varkappa$, indem es vom positiven Ufer nach dem negativen geht, oder wenn wir uns dem Bereiche $F_\varkappa$ entsprechend ein neues Blatt über der z-Ebene ausgebreitet denken, so gelangt z in dieses neue Blatt, welches längs des negativen Ufers des in ihm gezogenen Schnittes $l_\varkappa$ mit dem positiven Ufer des Schnittes $l_\varkappa$ im Ausgangsblatte zusammenhängt. Kurz, wir haben hier dieselben Verhältnisse, wie sie in der Nr. 210 (S. 312) für die daselbst untersuchte Differentialgleichung (A_2) erörtert worden sind.

Nun können wir auch das Verhalten von η, beziehungsweise y_1, y_2, in der Umgebung der Punkte $a_\varkappa$ vollständig beschreiben.

Wenn z einen Umlauf im positiven Sinne um $a_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$ vollzieht, d. h. von dem negativen Ufer von $l_\varkappa$ innerhalb $\overline{T}$ nach dem gegenüberliegenden Punkte des positiven Ufers geht, so hat η die Substitution

$$A_\varkappa \eta$$

erfahren. Sei

$$A_\varkappa \eta = \frac{\alpha_{22}\eta + \alpha_{21}}{\alpha_{12}\eta + \alpha_{11}}, \qquad \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} = 1,$$

dann erleidet also das Fundamentalsystem y_1, y_2 von (26) bei einem positiven Umlaufe von z um $a_\varkappa$ die Substitution

$$\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2,$$
$$\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2,$$

oder aber

$$-\alpha_{11}y_1-\alpha_{12}y_2,$$
$$-\alpha_{21}y_1-\alpha_{22}y_2,$$

da, wenn η ungeändert bleibt, nach den Ergebnissen der Nr. 180 (S. 179), die y_1, y_2 entweder selbst ungeändert bleiben oder sich mit -1 multipliciren müssen.

Die Wurzeln der zum Punkte $a_\varkappa$ gehörigen Fundamentalgleichung sind demnach

$$\omega_1=e^{2\pi i\frac{\delta_\varkappa+1}{2}},\quad \omega_2=e^{2\pi i\frac{1-\delta_\varkappa}{2}},$$

wenn $A_\varkappa$ eine elliptische, und

$$\omega_1=\omega_2=e^{\frac{2\pi i}{2}},$$

wenn $\delta_\varkappa=0$, d. h. $A_\varkappa$ eine parabolische Substitution ist. Im ersteren Falle haben wir also für das zu $z=a_\varkappa$ gehörige canonische Fundamentalsystem $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ die Entwickelungen

$$\mathfrak{y}_1=(z-a_\varkappa)^{r_{\varkappa 1}}\mathfrak{P}_1(z|a_\varkappa),$$
$$\mathfrak{y}_2=(z-a_\varkappa)^{r_{\varkappa 2}}\mathfrak{P}_2(z|a_\varkappa),$$

im letzteren die Entwickelungen

$$\mathfrak{y}_1=(z-a_\varkappa)^{r_{\varkappa 1}}\mathfrak{P}_1(z|a_\varkappa),$$
$$\mathfrak{y}_2=(z-a_\varkappa)^{r_{\varkappa 2}}(\mathfrak{P}_2(z|a_\varkappa)+c(z-a_\varkappa)^{r_{\varkappa 1}-r_{\varkappa 2}}\mathfrak{P}_1(z|a_\varkappa)\log(z-a_\varkappa)),$$

wo $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ nach ganzen Potenzen von $z-a_\varkappa$ fortschreitende Reihen sind, c eine Constante bedeutet und

$$r_{\varkappa 1}=\frac{\log\omega_1}{2\pi i},\quad r_{\varkappa 2}=\frac{\log\omega_2}{2\pi i}$$

gesetzt wurde.

Nun haben aber η sowohl wie $\frac{d\eta}{dz}$ im Punkte $z=a_\varkappa$ bestimmte Werthe, es ist nämlich

$$\eta=\lambda_\varkappa,$$

also können die Reihen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ nicht unendlich viele negative Potenzen enthalten; d. h. die Stelle $a_\varkappa$ ist keine Unbestimmtheitsstelle. Nehmen wir also gleich an, dass $r_{\varkappa 1}$, $r_{\varkappa 2}$ die Wurzeln der zu $z=a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung sind, so ist, da in der Differentialgleichung (26) der Coefficient der ersten Ableitung verschwindet,

$$r_{\varkappa 1}+r_{\varkappa 2}=1,$$
$$r_{\varkappa 1}-r_{\varkappa 2}=\delta_\varkappa+g,$$

wo g eine ganze Zahl bedeutet. Wir hätten also, wenn $A_\varkappa$ eine elliptische Substitution, d. h. $\delta_\varkappa$ von Null verschieden ist,

$$\frac{\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{y}_2} = \frac{\eta - \lambda_\varkappa}{\eta - \mu_\varkappa} = (z - a_\varkappa)^{\delta_\varkappa + g}\,\mathfrak{P}(z|a_\varkappa),$$

und wenn $A_\varkappa$ eine parabolische Substitution wäre,

$$\frac{\mathfrak{y}_2}{\mathfrak{y}_1} = \frac{1}{\eta - \lambda_\varkappa} = (z - a_\varkappa)^{-g}\,\mathfrak{P}(z|a_\varkappa) + c\log(z - a_\varkappa),$$

wo c eine Constante, $\mathfrak{P}$ beide Mal eine gewöhnliche Potenzreihe bedeutet, die für $z = a_\varkappa$ nicht verschwindet.

Es ist aber z eine eindeutige Function des Ortes in der Fläche F; die Umgebung der Stelle $\eta = \lambda_\varkappa$ wird im Falle einer elliptischen Substitution durch

$$\zeta = \left(\frac{\eta - \lambda_\varkappa}{\eta - \mu_\varkappa}\right)^{\frac{1}{\delta_\varkappa}},$$

im Falle einer parabolischen Substitution durch

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{\delta_\varkappa}\frac{1}{\eta - \lambda_\varkappa}}$$

auf eine schlichte Fläche der ζ-Ebene abgebildet (vergl. Nr. 213, S. 329); es muss also z in der Umgebung von $z = a_\varkappa$ eindeutig durch ζ darstellbar sein. Daraus folgt aber (vergl. Nr. 197, S. 254), dass

$$g = 0$$

sein muss.

Also haben wir

(27) $$r_{\varkappa 1} = \frac{1 + \delta_\varkappa}{2}, \quad r_{\varkappa 2} = \frac{1 - \delta_\varkappa}{2} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma),$$

und ebenso ergiebt sich für $z = a_{\sigma+1}$, dass die zu diesem Punkte gehörige determinirende Fundamentalgleichung, wenn $a_{\sigma+1}$ ein endlicher Werth ist, die Wurzeln

(28a) $$r_{\sigma+1,1} = \frac{1 + \delta_{\sigma+1}}{2}, \quad r_{\sigma+1,2} = \frac{1 - \delta_{\sigma+1}}{2},$$

dagegen, wenn $a_{\sigma+1} = \infty$ ist, die Wurzeln

(28b) $$r_{\sigma+1,1} = \frac{-1 + \delta_{\sigma+1}}{2}, \quad r_{\sigma+1,2} = \frac{-1 - \delta_{\sigma+1}}{2}$$

besitzt.

216. Form der Differentialgleichung. Fall zweier singulärer Punkte im Endlichen. Discontinuirliche Gruppen. Weitere Probleme.

Wir wissen nach den Ergebnissen der vorigen Nummer, dass die Differentialgleichung (26) zur Fuchs'schen Classe gehört, dass ihre singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$ sind und dass die Wurzeln der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen durch die Gleichungen (27), (28) gegeben werden. Auf Grund der in der Nr. 68 (Bd. I, S. 242) entwickelten Formeln können wir dadurch die Gestalt der Differentialgleichung (26) bestimmen. Wir finden, wenn alle Werthe $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$ endliche, also $z=\infty$ kein singulärer Punkt ist,

$$(29a)\quad q=\frac{1}{\prod\limits_{\lambda=1}^{\sigma+1}(z-a_\lambda)}\left\{E_{\sigma-3}(z)-\sum_{\lambda=1}^{\sigma+1}\frac{(a_\lambda-a_1)\cdots(a_\lambda-a_{\sigma+1})}{z-a_\lambda}\,\frac{1}{4}(1-\delta_\lambda^2)\right\},$$

und wenn $a_{\sigma+1}=\infty$ ist,

$$(29b)\quad q=\frac{1}{\prod\limits_{\lambda=1}^{\sigma}(z-a_\lambda)}\left\{-\frac{1}{4}(1-\delta_{\sigma+1}^2)E_{\sigma-2}(z)\right.$$

$$\left.-\sum_{\lambda=1}^{\sigma}\frac{(a_\lambda-a_1)\cdots(a_\lambda-a_\sigma)}{z-a_\lambda}\,\frac{1}{4}(1-\delta_\lambda^2)\right\},$$

wo im ersteren Falle $E_{\sigma-3}(z)$ eine ganze rationale Function $(\sigma-3)^{\text{ten}}$ Grades, im letzteren Falle $E_{\sigma-2}(z)$ eine ganze rationale Function $(\sigma-2)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet; in $E_{\sigma-2}(z)$ ist der Coefficient von $z^{\sigma-2}$ gleich Eins.

Die Function z war dadurch charakterisirt, dass sie eine $\mathfrak{X}$-Function ist, die innerhalb F_0 jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt; dadurch ist z nicht vollkommen bestimmt, sondern auch

$$\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1,$$

besitzt dieselbe Eigenschaft. Es ist folglich noch über drei Constanten zu disponiren, wir können z. B.

$$(30)\qquad a_1=0,\quad a_2=1,\quad a_{\sigma+1}=\infty$$

wählen. Es ist dann η ein bestimmter Integralquotient der Differentialgleichung (26); einem beliebigen anderen Integralquotienten entspricht eine der Gruppe ϑ ähnliche Gruppe und ein Fundamentalbereich, der aus F_0 durch Anwendung einer willkürlichen projectiven Substitution hervorgeht.

Wenn die Anzahl der singulären Punkte σ grösser als zwei ist, so ist die gefundene Form von q zur vollständigen Bestimmung der Differentialgleichung (26) selbst bei Festhaltung der Convention (30) nicht ausreichend; nur für $\sigma = 2$ haben wir

$$(31) \qquad q = \frac{1}{4}\left\{\frac{\delta_1^2 - \delta_3^2 + \delta_2^2 - 1}{z(1-z)} - \frac{1-\delta_1^2}{z^2} - \frac{1-\delta_1^2}{(1-z)^2}\right\},$$

d. h. in diesem Falle ist der Coefficient der Differentialgleichung (26) in expliciter Form gefunden.

Für $\sigma = 2$ ist die Differentialgleichung (26) im Wesentlichen die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe, und wir sehen durch diese Bemerkung, woher es kommt, dass sich in diesem Falle die Differentialgleichung in expliciter Form bestimmt; es rührt dies nämlich daher, dass (vergl. Nr. 69, Bd. I, S. 243) die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe durch Angabe der Wurzeln ihrer determinirenden Fundamentalgleichungen vollkommen bestimmt ist.

Die Annahme, dass die Substitutionen

$$A_1,\ A_2,\ \cdots\ A_\sigma,\ A_{\sigma+1}$$

elliptische oder parabolische seien, war für den geführten Existenzbeweis wesentlich; der Fall, wo einige dieser Substitutionen hyperbolisch oder loxodromisch sind, bietet wesentlich grössere Schwierigkeiten dar, die bisher noch nicht ganz überwunden sind.

Die besondere Wichtigkeit des behandelten Falles, den wir kurz auch so charakterisiren können, dass die Differentialgleichung (26) reale Wurzeln für alle determinirenden Fundamentalgleichungen besitzt, erhellt daraus, dass, wenn

η eine eindeutige Function von z ist,

dieser Fall nothwendig eintreten muss.

In der That wissen wir nach den Erörterungen der Nummern 196, 197 (S. 256), dass, wenn in der Differentialgleichung (26) die unabhängige Variable eine eindeutige Function des Integralquotienten η ist, die

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \ldots\ \delta_\sigma,\ \delta_{\sigma+1}$$

entweder reciproke ganze Zahlen oder Null sein müssen. Die Gruppe ϑ ist dann eine (in der complexen η-Ebene) discontinuirliche; sie besitzt überdies die folgenden Eigenschaften:

1) In dem Fundamentalbereiche F_0 ist die Winkelsumme für jeden Cyklus von Ecken entweder ein aliquoter Theil von 2π oder Null.
2) Der Bereich F_0 überdeckt keinen Theil der η-Ebene mehrfach.

3) Auch die Gesammtheit aller Bereiche F_s, d. h. die ganze Fläche F bedeckt die η-Ebene oder einen Theil derselben einfach und lückenlos.

Die Eigenschaften 2), 3) sind eine unmittelbare Folge der Thatsache, dass zu jedem Werthe von η nur ein Werth von z gehört.

Herr Poincaré hat nachgewiesen, dass diese drei Eigenschaften jeder discontinuirlichen projectiven Gruppe ϑ zukommen. Wir gehen auf diesen Nachweis nicht ein, sondern wollen die Eigenschaft 3), die offenbar die Eigenschaften 1) und 2) unmittelbar nach sich zieht, geradezu als Definition einer discontinuirlichen Gruppe ansehen. Diese neue Definition ist dann anscheinend enger als die in der Nr. 202 (S. 279) aufgestellte, sie reicht aber für die Zwecke, die wir im Auge haben, vollständig aus.

Wir wissen dann auf Grund der vorhergehenden Untersuchungen, dass, wenn irgend eine discontinuirliche projective Gruppe ϑ durch ihren Fundamentalbereich F_0 gegeben ist, stets Functionen $\mathfrak{X}$ gebildet werden können, die sich innerhalb F_0 wie rationale Functionen verhalten und bei den Substitutionen der Gruppe ϑ ungeändert bleiben. Diese Functionen sind aber dann eindeutige Functionen von η schlechthin, da die Fläche F jetzt die η-Ebene nirgends mehrfach überdeckt. Sie lassen sich durch eine Function z von η, die innerhalb F_0 jeden Werth nur einmal annimmt, rational ausdrücken, und η ist als Function dieser Grösse z betrachtet, der Integralquotient einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchsschen Classe von der Form (26). Nach Festlegung der der Function z noch anhaftenden drei willkürlichen Constanten (z. B. durch die Gleichungen (30)) sind die in den Coefficienten der Differentialgleichung (26) auftretenden Parameter durch die Parameter der Gruppe ϑ eindeutig bestimmt (Nr. 210, S. 318).

Wenn für die Gruppe ϑ insbesondere

$$\sigma = 2$$

ist, so ist dieselbe (wenn wir ähnliche Gruppen als nicht wesentlich von einander verschieden ansehen) durch Angabe der

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3$$

allein schon vollkommen bestimmt (vergl. Nr. 128, Bd. I, S. 472, 476); der Coefficient q der zugehörigen Differentialgleichung (26) ist durch die Gleichung (31) gegeben. Wenn es discontinuirliche Gruppen ϑ für $\sigma = 2$ giebt, oder was dasselbe besagt, wenn es Differentialgleichungen der Gauss'schen Reihe giebt, in denen der Integralquotient eindeutig

umkehrbar ist, so müssen dieselben unter den Fällen enthalten sein, die wir erhalten, wenn wir für

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3$$

irgend welche reciproke ganze Zahlen oder Null nehmen. Es wird sich zeigen, dass alle diese Fälle zu discontinuirlichen Gruppen und somit zu Gauss'schen Differentialgleichungen mit eindeutig umkehrbaren Integralquotienten führen.

Wenn $\sigma > 2$ ist, und wir wählen für die

$$\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_{\sigma+1}$$

in dem Ausdrucke (29b) reciproke ganze Zahlen oder Null, so wissen wir, dass jede lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den singulären Punkten

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3,\ a_4, \cdots a_\sigma,\ a_{\sigma+1} = \infty,$$

deren unabhängige Variable z eine eindeutige Function des Integralquotienten ist, unter der Form (26), wo q durch (29b) bestimmt wird, enthalten sein muss. Es entsteht also die Frage:

Lassen sich die Coefficienten der ganzen Function $E_{\sigma-2}(z)$ so bestimmen, dass die Differentialgleichung (26) einen eindeutig umkehrbaren Differentialquotienten besitzt?

Auf die Beantwortung dieser Frage wird ein wesentlicher Theil der nun folgenden Untersuchungen hinzielen; wir werden sehen, dass die Frage zu bejahen ist.

Siebentes Kapitel.

217. Formulirung eines neuen Problems. Differentialgleichungen, die zur selben Familie gehören.

Durch die am Schlusse der vorigen Nummer aufgeworfene Frage sind wir wieder in den Gedankenkreis zurückgekehrt, in welchem sich die Untersuchungen des ersten Kapitels des zehnten Abschnittes bewegen; wir wollen noch durch eine andere Problemstellung den Anschluss an die Betrachtungen, die sich auf Differentialgleichungen derselben Art beziehen, zu gewinnen suchen.

Es war gezeigt worden, dass eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchs'schen Classe, die keinen scheinbar singulären Punkt besitzt, eindeutig bestimmt ist durch Angabe ihrer projectiven Monodromiegruppe ϑ. Wenn die Differentialgleichung

$$(A_2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = py$$

aber nebst den wirklichen singulären Punkten

$$a_1, \ a_2, \ \cdots a_\sigma, \ a_{\sigma+1} = \infty$$

noch die scheinbar singulären Stellen

$$b_1, \ b_2, \ \cdots b_\varrho$$

besitzt, so enthält der Coefficient p mehr Parameter als die projective Monodromiegruppe ϑ. Dies ergiebt sich schon aus den allgemeinen Untersuchungen der Nr. 207 (S. 301 ff.), wir können aber die Form des Coefficienten p genau angeben und an derselben die in der genannten Nummer vorgenommene Constantenzählung controlliren.

Der Einfachheit wegen setzen wir voraus, dass die scheinbar singulären Stellen $b_1, \cdots b_\varrho$ einfache seien, d. h. dass für $b_\varkappa$ die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung die Werthe

$$\frac{3}{2}, \quad -\frac{1}{2} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho)$$

besitzen; die Wurzeln der zu $a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung seien

$$r_{\varkappa 1}, \ r_{\varkappa 2}; \ r_{\varkappa 1} - r_{\varkappa 2} = \delta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1)$$

Dann hat p in der Differentialgleichung (A_2) die Gestalt

$$(1)\qquad p=\sum_{i=1}^{\sigma}\frac{\alpha_i}{(x-a_i)^2}+\sum_{i=1}^{\sigma}\frac{\beta_i}{(x-a_i)}+\sum_{i=1}^{\varrho}\frac{\bar{\alpha}_i}{(x-b_i)^2}+\sum_{i=1}^{\varrho}\frac{\bar{\beta}_i}{x-b_i}$$

und es ist

$$(2)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\sigma}\beta_i+\sum\limits_{i=1}^{\varrho}\bar{\beta}_i=0, \\ \alpha_i=-\frac{1}{4}\left(1-\delta_i^2\right), \quad \bar{\alpha}_i=\frac{3}{4}, \\ \sum\limits_{i=1}^{\sigma}\alpha_i+\sum\limits_{i=1}^{\sigma}a_i\beta_i+\sum\limits_{i=1}^{\varrho}b_i\bar{\beta}_i=-\frac{1}{4}\left(1-\delta_{\sigma+1}^2\right); \end{cases}$$

die Bedingung, dass b_i scheinbar singuläre Stelle sei, lautet

$$(3)\qquad \bar{\beta}_i^2=\varepsilon_i,$$

wo ε_i das Resultat der Substitution von b_i in den Ausdruck

$$p-\frac{\bar{\alpha}_i}{(x-b_i)^2}-\frac{\bar{\beta}_i}{x-b_i}\qquad (i=1,2,\cdots\varrho)$$

bedeutet. Wenn wir also noch z. B.

$$a_1=0,\quad a_2=1$$

wählen, so hängt p in der That von

$$3\sigma-3+\varrho$$

Parametern ab.

Wenn also die $3\sigma-3$ Parameter, von denen die Gruppe ϑ abhängt, gegeben sind, so kann man noch über ϱ von den Parametern, die in p auftreten, willkürlich disponiren, z. B. könnte man die scheinbar singulären Stellen in ϱ beliebig vorgeschriebene Punkte der Ebene verlegen.

Man kann aber auch die wirklich singulären Stellen

$$(4)\qquad a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_\sigma,\ a_{\sigma+1}$$

festhalten und die übrigen Parameter von p so zu bestimmen suchen, dass die projective Monodromiegruppe ϑ eine vorgeschriebene ist; dann muss aber jedenfalls

$$\varrho>\sigma-2$$

angenommen werden. Wenn ϱ genau gleich $\sigma-2$ ist, so stimmt die Anzahl der noch verfügbaren Parameter von p mit der Anzahl der Parameter der Gruppe überein; es steht also zu erwarten, dass sich stets eine und im Allgemeinen auch nur eine Differentialgleichung (A_2) bestimmen lässt, welche die $\sigma+1$ vorgeschriebenen wirklichen singu-

lären Stellen (4) und genau $\sigma - 2$ scheinbar singuläre Stellen besitzt, und deren projective Monodromiegruppe mit ϑ übereinstimmt. Wir werden diese Frage in einer specielleren Fassung behandeln und führen zunächst einige neue Begriffe ein.

Wir wollen Differentialgleichungen betrachten, die der Fuchsschen Classe angehören, dieselben wirklichen singulären Punkte haben, und für welche Systeme von Integralquotienten existiren, die bei jedem Umlaufe von x dieselbe projective Substitution erfahren. Seien

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0,$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^n z}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \cdots + q_n z = 0$$

zwei Differentialgleichungen von der angegebenen Beschaffenheit,

$$y_1, \; y_2, \; \cdots \; y_n,$$
$$z_1, \; z_2, \; \cdots \; z_n$$

Fundamentalsysteme derselben, deren Quotienten bei jedem Umlaufe von x dieselbe projective Substitution erfahren. Dann wissen wir nach den Ergebnissen der Nr. 180 (S. 179), dass wir die Werthe der $z_1, z_2, \cdots z_n$ nach einem Umlaufe von x erhalten, indem wir auf $z_1, z_2, \cdots z_n$ die Substitution anwenden, welche die $y_1, y_2, \cdots y_n$ bei diesem Umlaufe erfahren haben, und dann die so entstandenen Ausdrücke noch mit einem und demselben constanten Factor multipliciren. Daraus folgt, dass die Gleichungen

$$z_\varkappa = r_0 y_\varkappa + r_1 y_\varkappa' + \cdots + r_{n-1} y_\varkappa^{(n-1)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

für die $r_0, r_1, \cdots r_{n-1}$ Ausdrücke ergeben müssen, die sich von rationalen Functionen von x nur durch einen allen gemeinsamen Factor

$$A$$

unterscheiden, der selbst so beschaffen ist, dass seine logarithmische Ableitung sich rational durch x ausdrücken lässt. Wir haben also zwischen den abhängigen Variabeln y, z der Differentialgleichungen (A), (B) eine Beziehung von der Form

$$\text{(5)} \qquad z = A(\varphi_0 y + \varphi_1 y' + \cdots + \varphi_{n-1} y^{(n-1)}),$$

woselbst die

$$\text{(6)} \qquad \varphi_0, \; \varphi_1, \; \cdots \; \varphi_{n-1}, \qquad \frac{d \log A}{dx}$$

rationale Functionen von x sind. Da überdies (A), (B) der Fuchsschen Classe angehören sollten, so darf der Nenner von

$$\frac{d \log \Delta}{dx}$$

nur einfache Factoren enthalten.

Wir sagen allgemein mit Herrn Poincaré von zwei linearen Differentialgleichungen (A), (B) mit rationalen Coefficienten, sie gehörten zur selben Familie, wenn zwischen ihren abhängigen Variabeln eine Beziehung von der Form (5) stattfindet, in welcher die Functionen (6) rational in x sind. Diese Beziehung zwischen zwei Differentialgleichungen ist offenbar eine gegenseitige; zwei Differentialgleichungen derselben Familie haben ferner, wie man sofort übersieht, bei geeigneter Wahl eines Fundamentalsystems von Integralquotienten sowohl dieselbe projective Monodromiegruppe ϑ, als auch dieselbe projective Transformationsgruppe Θ. Für Differentialgleichungen derselben Art (Nr. 165, S. 120) ist einfach Δ gleich Eins.

Untersuchen wir nun den Charakter der Differentialgleichungen (A) und (B) derselben Familie in der Umgebung der singulären Stellen.

Wenn eine Stelle $x = a$ Unbestimmtheitsstelle für die Integrale der einen Differentialgleichung ist, so ist sie es im Allgemeinen auch für alle Differentialgleichungen derselben Familie, ausgenommen den besonderen Fall, wo sich die Unbestimmtheit bei $x = a$ durch Multiplication von y mit einer Function von x beseitigen lässt. Wir beschränken uns im Folgenden auf die Betrachtung von Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe und bemerken nur, dass die in den Nummern 163—165 für die Differentialgleichungen derselben Art und für cogrediente Differentialgleichungen angestellten Untersuchungen sich in ähnlicher Weise auf den Begriff der Familie übertragen lassen, wenn man, statt wie bei der Art die Integrale und die zugehörigen homogenen Gruppen, hier die Integralquotienten und die entsprechenden projectiven Gruppen zu Grunde legt. Es folgt dies einfach daraus, dass der Uebergang von einer Differentialgleichung zu einer anderen von derselben Familie erfolgen kann, indem man zunächst zu einer Differentialgleichung derselben Art übergeht und dann die Transformation ausführt, welche die Integralquotienten conservirt.

Wenn die Differentialgleichung (A) zur Fuchs'schen Classe gehört, so wird die Differentialgleichung (B) derselben Familie dann und nur dann auch zur Fuchs'schen Classe gehören, wenn Δ keine Unbestimmtheitsstelle enthält, d. h. wenn der Nenner von

$$\frac{d \log \Delta}{dx}$$

nur einfache Factoren besitzt. Bedeutet dann $x = a$ eine singuläre Stelle von (A), in deren Umgebung die Entwickelungen der Integrale

Logarithmen enthalten, so hat $x = a$ auch für jede Differentialgleichung derselben Familie denselben Charakter.

Sei ferner $x = a$ ein Punkt, in dessen Umgebung die Entwickelungen der Integrale von (A) keine Logarithmen enthalten, und bedeuten

$$r_1, \; r_2, \cdots r_n$$

die Wurzeln der zu $x = a$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von (A), so haben die Wurzeln der zu demselben Punkte gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von (B) die Gestalt

$$\lambda + r_1 + g_1, \quad \lambda + r_2 + g_2, \cdots \lambda + r_n + g_n,$$

wo λ irgend eine beliebige constante Grösse bedeutet und $g_1, g_2, \cdots g_n$ ganze positive oder negative Zahlen sind.

Hieraus folgt, dass Differentialgleichungen derselben Familie dieselben wirklichen singulären Punkte haben, während ihre scheinbar singulären Stellen verschieden sein können.

218. Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die zur selben Familie gehören. Satz von Poincaré.

Wir specialisiren nunmehr die oben an die Differentialgleichung (A_2) geknüpften Fragen, indem wir uns auf die Betrachtung der mit (A_2) zur selben Familie gehörigen Gleichungen beschränken. In der That sind ja unter den Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe, deren projective Monodromiegruppe ϑ dieselbe ist, wie für die Differentialgleichung (A_2), und deren wirkliche singuläre Stellen mit denen von (A_2) übereinstimmen, die mit (A_2) zur selben Familie und zur Fuchs'schen Classe gehörigen als specielle Fälle enthalten.

Sei die Differentialgleichung

$$(B_2) \qquad \frac{d^2 z}{d x^2} + q_1 \frac{d z}{d x} + q_2 z = 0$$

von dieser Beschaffenheit, dann ist also

$$z = A(fy + gy'),$$

oder, wie wir mit Rücksicht auf die Nr. 19 (Bd. I, S. 52) auch schreiben können,

$$(7) \qquad z = A_1 \frac{d}{dx}(My),$$

wo

$$M = e^{\int \frac{f}{g} dx}, \quad A_1 = Age^{-\int \frac{f}{g} dx}$$

gesetzt wurde.

Ebenso können wir auch für beliebiges n die Relation (5), die zwischen den abhängigen Variabeln zweier Differentialgleichungen derselben Familie besteht, in die Form setzen

$$z = A\varphi_{n-1} v_1 v_2 \cdots v_{n-1} \frac{d}{dx} \frac{1}{v_{n-1}} \frac{d}{dx} \cdots \frac{1}{v_2} \frac{d}{dx} \frac{y}{v_1},$$

wir beschränken uns aber der Einfachheit wegen auf die Betrachtung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wir sehen, dass der Uebergang von einer Differentialgleichung (A) zu einer andern derselben Familie ausgeführt werden kann, indem man die abhängige Variable y von (A) mit einer Function multiplicirt, dann das Product differentiirt, das Resultat abermals mit einer Function multiplicirt, wieder differentiirt u. s. w.

Durch Ausführung der Multiplicationen werden die Differenzen der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen nicht geändert, dagegen können diese Differenzen durch Ausführung der Differentiationen geändert werden.

Es wird nämlich im Allgemeinen der Exponent, zu welchem eine Function gehört, die sich im Punkte $x = a$ wie ein Integral einer linearen Differentialgleichung verhält, durch Differentiation um eine Einheit erniedrigt, es kann aber, wenn dieser Exponent gleich Null ist, der im Satze 2. der Nr. 40 (Bd. I, S. 141) hervorgehobene Ausnahmefall eintreten. Sei z. B. für $n = 2$ in der Umgebung von $x = a$

$$My = c_1(\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \cdots) + c_2(\beta_1(x-a) + \beta_2(x-a)^2 + \cdots),$$

wo c_1, c_2 willkürliche Constanten bedeuten, dann ist, wenn

$$\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0$$

ist, die Ableitung dieses Ausdruckes in der Form

$$c_1(3\alpha_3(x-a)^2 + \cdots) + \left(c_2 + \frac{\alpha_1}{\beta_1} c_1\right)(\beta_1 + 2\beta_2(x-a) + \cdots)$$

dargestellt. Während also in der Differentialgleichung für My die zu $x = a$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung die Wurzeln 0, 1 hatte, sind diese Wurzeln für die Differentialgleichung, der

$$\frac{d(My)}{dx}$$

genügt, 0, 2 geworden; der für die erste Differentialgleichung reguläre Punkt $x = a$ hat sich demnach in eine ausserwesentlich singuläre Stelle verwandelt, er ist also für (B_2) jedenfalls scheinbar singulärer Punkt geworden. So können also durch die Differentiationen neue scheinbar singuläre Punkte eingeführt werden; es können aber umgekehrt auch scheinbar singuläre Punkte verschwinden.

In der That, wenn wiederum für $n = 2$, z. B.

$$My = c_1(\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \cdots) + c_2(\beta_2(x-a)^2 + \beta_3(x-a)^3 + \cdots)$$

ist, so folgt

$$\frac{d(My)}{dx} = c_1(\alpha_1 + 2\alpha_2(x-a) + \cdots) + c_2(2\beta_2(x-a) + \cdots);$$

während also der Punkt $x = a$ für (A_2) jedenfalls scheinbar singuläre Stelle war, kann derselbe (wenn nämlich A_1 für $x = a$ weder verschwindet noch unendlich wird) für (B_2) reguläre Stelle geworden sein. Wir können allgemein sagen:

Die Differentiation, die in dem Ausdrucke (7) vorkommt, kann die Differenz der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung nur dann um eine Einheit vermehren oder vermindern, wenn eine dieser Wurzeln gleich Null ist. Im Sinne der in der Nr. 197 (S. 256) eingeführten Auffassung heisst dies, es kann nur in diesem Falle eine neue scheinbar singuläre Stelle eintreten oder eine solche Stelle wegfallen.

Sei

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \varphi_1 \frac{dv}{dx} + \varphi_0 v = 0 \tag{8}$$

die Differentialgleichung, welcher My genügt, dann befriedigt die Ableitung dieses Productes die Differentialgleichung

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \left(\varphi_1 - \frac{\varphi_0'}{\varphi_0}\right)\frac{dw}{dx} + \left(\varphi_0 - \frac{\varphi_1\varphi_0'}{\varphi_0} + \varphi_1'\right)w = 0, \tag{9}$$

und es besitzt die Differentialgleichung (8) genau ebensoviele scheinbar singuläre Stellen wie (A_2) und (9) ebensoviele wie (B_2). In die Gleichung (9) werden zunächst durch die Nullstellen von φ_0 scheinbar singuläre Stellen eingeführt, die in (8) nicht vorhanden waren.

In der rationalen Function φ_0 ist, da (A_2) zur Fuchs'schen Classe gehören sollte, der Zähler von um Zwei niedrigerem Grade wie der Nenner. Möge φ_0 an δ Stellen von der zweiten Ordnung und an ε Stellen von der ersten Ordnung unendlich werden, dann ist die Anzahl ν der endlichen Nullstellen von φ_0

$$\nu = 2\delta + \varepsilon - 2,$$

also

$$\nu \equiv \varepsilon \pmod 2.$$

Die einfachen Unendlichkeitsstellen von φ_0 sind in dem in der Nr. 112 (Bd. I, S. 401) eingeführten Sinne einfache singuläre Punkte von (8), es ist also eine Lösung von (8) in der Umgebung einer solchen Stelle regulär und gehört zum Exponenten Null. Durch die Differentiation wird also die Differenz der Wurzeln der zugehörigen determinirenden

Fundamentalgleichung um eine Einheit vermehrt oder vermindert, d. h. es tritt entweder ein neuer scheinbar singulärer Punkt hinzu, oder es geht ein solcher verloren. Die ε einfachen Unendlichkeitsstellen von φ_0 bewirken also, dass sich die Anzahl der scheinbaren singulären Stellen der Differentialgleichung (9) von der Anzahl dieser Stellen in (8) um eine Zahl τ unterscheidet, welche die Congruenz

$$\tau \equiv \varepsilon \pmod 2$$

befriedigt. Da durch die ν Nullstellen von φ_0 ebensoviele scheinbar singuläre Stellen von (9) erzeugt werden, beträgt also die Gesammtzahl der in (9) neu hinzugetretenen scheinbar singulären Stellen $\tau + \nu$, und es ist

$$\tau + \nu \equiv 2\varepsilon \equiv 0 \pmod 2.$$

Wir haben somit den von Herrn Poincaré herrührenden Satz:

Für alle Differentialgleichungen (zweiter Ordnung) der Fuchs'schen Classe, die zur selben Familie gehören, lässt die Anzahl der scheinbaren singulären Stellen (im Sinne der Nr. 197, S. 256) denselben Rest modulo Zwei.

219. Bestimmung einer Differentialgleichung der Familie mit der Minimalzahl von scheinbar singulären Punkten.

Wenn für die Differentialgleichung (A_2) die Zahlen ϱ und σ denselben Rest modulo Zwei lassen, so kann es eine Differentialgleichung derselben Familie geben, die $\sigma - 2$ scheinbar singuläre Punkte besitzt (vergl. Nr. 217, S. 348); dagegen ist dies nicht möglich, wenn von den Zahlen ϱ und σ die eine gerade und die andere ungerade ist. Im letzteren Falle kann es noch eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Differentialgleichungen derselben Familie geben, die $\sigma - 1$ scheinbar singuläre Stellen enthalten, denn für $\varrho = \sigma - 1$ enthält der Coefficient p von (A_2) einen Parameter mehr, als durch die Forderung der Zugehörigkeit zu einer bestimmten Familie fixirt werden.

Soll die Differentialgleichung (B_2), die mit (A_2) zur selben Familie gehört, auch die Form

$$(B_2) \qquad \frac{d^2 z}{d x^2} = q z$$

haben, so müssen in der Beziehung

$$(10) \qquad z = \psi(-\chi y + y'),$$

die zwischen den abhängigen Variabeln von (A_2) und (B_2) besteht, die Coefficienten ψ, χ der Gleichung

$$(11)\qquad \chi^2 + \frac{d\chi}{dx} = p + \frac{\text{const.}}{\psi^2}$$

Genüge leisten, wo χ eine rationale Function bedeutet. Es ist dann, wie eine einfache Rechnung zeigt,

$$(12)\qquad q = p + \frac{1}{\psi}\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2}{\psi}(\psi\chi' + \psi'\chi).$$

In diesem Falle muss also ψ die Quadratwurzel aus einer rationalen Function sein.

Nehmen wir zunächst an, dass die Zahlen ϱ und σ in der Differentialgleichung (A_2) denselben Rest modulo Zwei lassen; sei dann

$$2m = \varrho - \sigma.$$

Wäre diese Zahl negativ, so müsste

$$\varrho < \sigma,$$

also jedenfalls ϱ kleiner oder höchstens gleich $\sigma - 2$ sein; in diesem Falle wäre die Differentialgleichung (A_2) selbst schon so beschaffen, dass die Anzahl ihrer scheinbar singulären Stellen nicht grösser ist wie $\sigma - 2$. Wir wollen uns die Aufgabe stellen, wenn m nicht negativ ist, die Differentialgleichung (B_2) so zu bestimmen, dass in derselben höchstens $\sigma - 2$ scheinbar singuläre Stellen auftreten.

Setzen wir zu diesem Ende

$$(13)\qquad \frac{1}{\psi^2} = \frac{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_\varrho)(x-\partial_1)(x-\partial_2)\cdots(x-\partial_{\sigma-2})}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_\sigma)^2(x-c_1)^2(x-c_2)^2\cdots(x-c_m)^2},$$

wo die $\partial_1, \cdots \partial_{\sigma-2}, c_1, \cdots c_m$ vorläufig unbestimmt sind, und versuchen, diese $m + \sigma - 2$ Constanten und eine $(m + \sigma - 1)^{\text{te}}$ Constante c_0 so zu bestimmen, dass die rationale Function

$$p + \frac{c_0}{\psi^2} = P$$

sich in die Form der linken Seite der Gleichung (11)

$$(14)\qquad \chi^2 + \frac{d\chi}{dx}$$

setzen lässt. P wird im Unendlichen von zweiter Ordnung Null, also muss die rationale Function χ im Unendlichen von der ersten Ordnung verschwinden.

Seien $\lambda_\varkappa$ für $\varkappa = 1, 2, \cdots \nu$ die Unendlichkeitsstellen von χ und $\mu_\varkappa$ die zugehörigen Cauchy'schen Résidus, dann ist offenbar

$$\chi = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{\mu_\varkappa}{x - \lambda_\varkappa}.$$

Setzt man

$$\chi_\varkappa = \lim_{x=\lambda_\varkappa}\left(\chi - \frac{\mu_\varkappa}{x-\lambda_\varkappa}\right),$$

so ist

$$\chi^2 + \frac{d\chi}{dx} = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{\mu_\varkappa^2 - \mu_\varkappa}{(x-\lambda_\varkappa)^2} + 2\sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{\chi_\varkappa \mu_\varkappa}{x-\lambda_\varkappa};$$

wenn also

$$P = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{M_\varkappa}{(x-\lambda_\varkappa)^2} + \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{N_\varkappa}{x-\lambda_\varkappa}$$

ist, so muss sein

(15) $$M_\varkappa = \mu_\varkappa^2 - \mu_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu).$$

Diese Gleichungen bestimmen, wenn P gegeben ist, die $\mu_\varkappa$ und folglich die Function χ. Wenn also die $\lambda_1, \cdots \lambda_\nu$ und die $M_1, \cdots M_\nu$ bekannt sind, so sind dadurch die $N_1, \cdots N_\nu$ bereits bestimmt, falls P in der Form

$$\chi^2 + \frac{d\chi}{dx}$$

darstellbar sein soll; es ist nämlich

(16) $$\begin{cases} N_\varkappa = 2\mu_\varkappa \chi_\varkappa & (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu), \\ \sum_{\varkappa=1}^{\nu} N_\varkappa = 0. \end{cases}$$

Setzen wir

$$\lim_{x=\lambda_\varkappa}\left\{P - \frac{M_\varkappa}{(x-\lambda_\varkappa)^2} - \frac{N_\varkappa}{x-\lambda_\varkappa}\right\} = P_\varkappa,$$

$$\lim_{x=\lambda_\varkappa}\left\{\frac{d\chi}{dx} + \frac{\mu_\varkappa}{(x-\lambda_\varkappa)^2}\right\} = \chi_\varkappa',$$

so ist

(17) $$P_\varkappa = \chi_\varkappa^2 + (1 + 2\mu_\varkappa)\chi_\varkappa'.$$

Die Function P hat die $m + \sigma + \varrho = \nu$ Unendlichkeitsstellen zweiter Ordnung

$$a_1, \cdots a_\sigma, \; b_1, \cdots b_\varrho, \; c_1, \cdots c_m;$$

damit P in der Form (14) darstellbar sei, müssen für jede derselben die Bedingung (17) oder die Gleichungen (15), (16) erfüllt sein.

Betrachten wir zunächst die Unendlichkeitsstellen $b_\varkappa$, so ist, wenn wir $\lambda_\varkappa = b_\varkappa$ nehmen, zufolge der durch die Gleichungen (1), (2) (Nr. 217, S. 348) gegebenen Form von p,

$$M_\varkappa = \bar{\alpha}_\varkappa = \frac{3}{4},$$

also nach (15)

$$\mu_\varkappa^2 - \mu_\varkappa = \frac{3}{4}.$$

Nehmen wir z. B. die Wurzel

$$\mu_\varkappa = -\frac{1}{2}$$

dieser Gleichung, so lautet (17)

$$P_\varkappa = \chi_\varkappa^2.$$

Andererseits ist aber nach (16)

(18) $$N_\varkappa = -\chi_\varkappa,$$

und nach (1), (2)

(19) $$N_\varkappa = \bar{\beta}_\varkappa,$$

so dass also

$$P_\varkappa = \bar{\beta}_\varkappa^2$$

sein muss. Da aber für $x = b_\varkappa$ die Function $\frac{1}{\psi^2}$ verschwindet, so ist einfach

$$P_\varkappa = \varepsilon_\varkappa,$$

wo $\varepsilon_\varkappa$ die in der Nr. 217 (S. 348) festgelegte Bedeutung hat. D. h. die Bedingung (17) reducirt sich auf

$$\varepsilon_\varkappa = \bar{\beta}_\varkappa^2,$$

und dies ist nichts anderes wie die Gleichung (3), welche besagt, dass $b_\varkappa$ scheinbar singuläre Stelle der Differentialgleichung (A_2) ist.

Für die Unendlichkeitsstellen $b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho)$ von P sind also die Bedingungen (17) schon von selbst erfüllt.

Wir können dann die in P noch vorhandenen $m + \sigma - 1$ Constanten so einrichten, dass die Bedingungen (17) auch für die übrigen $m + \sigma$ Unendlichkeitsstellen von P erfüllt sind, denn wegen der Gleichung

$$\sum_{\varkappa=1}^{\nu} N_\varkappa = 0$$

sind nur $m + \sigma - 1$ dieser Bedingungen von einander unabhängig. Dann hat also P die Form (14). Die Function χ lässt sich alsdann auf die folgende Weise bestimmen.

Es ist:

$$\chi = \sum_{\varkappa=1}^{\sigma} \frac{C_\varkappa}{x - a_\varkappa} - \frac{1}{2} \sum_{\varkappa=1}^{\varrho} \frac{1}{x - b_\varkappa} + \sum_{\varkappa=1}^{m} \frac{D_\varkappa}{x - c_\varkappa},$$

so dass also die $2m + \sigma = \varrho$ Grössen

$$C_1, \cdots C_\sigma; \; c_1, \cdots c_m; \; D_1, \cdots D_m$$

zu bestimmen sind. Dies geschieht mit Hülfe der aus (18), (19) folgenden ϱ Gleichungen

$$(20) \qquad -\chi_\varkappa = \beta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho).$$

Setzen wir

$$\chi = \frac{H(x)}{K(x)\prod_{\varkappa=1}^{\sigma}(x - a_\varkappa)\prod_{\varkappa=1}^{\varrho}(x - b_\varkappa)},$$

wo $H(x)$ eine ganze rationale Function $(m + \varrho + \sigma - 1)^{\text{ten}}$ Grades, $K(x)$ eine ebensolche Function m^{ten} Grades bedeutet, so erkennt man leicht, dass die Gleichungen (20) in den Coefficienten von $H(x)$ und $K(x)$ linear sind; das Gleiche gilt von den Gleichungen

$$\lim_{x=b_\varkappa}[(x - b_\varkappa)\chi] = -\frac{1}{2} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho),$$

welche besagen, dass das Résidu von χ in Bezug auf $b_\varkappa$ gleich $-\frac{1}{2}$ ist. Diese Gleichungen reichen im Allgemeinen zur Bestimmung der Coefficienten von $H(x)$ und $K(x)$ gerade aus, so dass also im Allgemeinen die Bestimmung von χ auch nur auf eine einzige Weise möglich ist.

Hat man χ und dadurch auch P und ψ bestimmt, so genügt

$$z = \psi(-\chi y + y')$$

der Differentialgleichung (B_2), wo q durch (12) gegeben wird.

Von dieser Gleichung ist zunächst leicht einzusehen, dass sie die Punkte $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$ nicht mehr zu scheinbar singulären Stellen hat, sondern dass sich das allgemeine Integral von (B_2) in der Umgebung von $b_\varkappa$ regulär verhält. Es ist nämlich für das allgemeine Integral y von (A_2) in der Umgebung von $b_\varkappa$

$$y = (x - b_\varkappa)^{-\frac{1}{2}}(\alpha_0 + \alpha_1(x - b_\varkappa) + \alpha_2(x - b_\varkappa)^2 + \cdots),$$

$$\frac{dy}{dx} = (x - b_\varkappa)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_1(x - b_\varkappa) + \cdots\right),$$

also da

$$\chi = \frac{1}{x - b_\varkappa}\left\{-\frac{1}{2} + \beta_1(x - b_\varkappa) + \cdots\right\}$$

ist, erhält man

$$-\chi y + y' = (x - b_\varkappa)^{-\frac{1}{2}}(\gamma_0 + \gamma_1(x - b_\varkappa) + \cdots).$$

Endlich ist

$$\psi(x) = (x - b_\varkappa)^{\frac{1}{2}}(\delta_0 + \delta_1(x - b_\varkappa) + \cdots),$$

also in der That

$$z = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(x - b_\varkappa) + \varepsilon_2(x - b_\varkappa)^2 + \cdots.$$

Dagegen hat die Differentialgleichung (B_2) die Stellen $\partial_1, \partial_2, \cdots \partial_{\sigma-2}$ zu scheinbar singulären Punkten, so dass also, wie verlangt worden war, (B_2) nicht mehr wie $\sigma - 2$ scheinbar singuläre Punkte besitzt, d. h. genauer gesagt, nicht mehr wie $\sigma - 2$ einfache, von den wirklich singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ getrennt liegende scheinbar singuläre Punkte.

Für die wirklich singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ stimmen, wie man sofort übersieht, die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichungen (A_2) und (B_2) überein, wenn, wie wir bisher stillschweigend vorausgesetzt haben, keine der Grössen $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$ und $\partial_1, \partial_2, \cdots \partial_{\sigma-2}$ mit einer der Grössen $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ zusammenfällt.

220. Die Reducirte der Familie. Allgemeine Bemerkungen.

Die Reduction der Differentialgleichung (A_2) auf (B_2) ist aber in genau derselben Weise ausführbar, wenn einige der Punkte $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$ mit Punkten der Reihe $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$ coincidiren, denn das zur Herstellung der Function ψ eingeschlagene Verfahren lässt sich auch in diesem Falle in ganz unveränderter Form anwenden.

Nehmen wir also an, es mögen für die Differentialgleichung (A_2) mit dem wirklich singulären Punkte $a_\varkappa$ etwa $g_\varkappa$ scheinbar singuläre Punkte vereinigt sein, d. h. im Sinne der in der Nr. 197 (S. 256) eingeführten Sprechweise, es sei der reale Theil von $\delta_\varkappa$ zwischen den positiven ganzen Zahlen $g_\varkappa$ und $g_\varkappa + 1$ gelegen, ferner mögen $b_1, b_2, \cdots b_\tau$ die von den wirklichen singulären Punkten getrennt liegenden scheinbar singulären Stellen bedeuten, die wir nach wie vor als einfache voraussetzen wollen. Wir können dann die Reduction von (A_2) auf (B_2) so vornehmen, dass wir nebst den τ Stellen $b_1, \cdots b_\tau$ noch jeden der Punkte $a_\varkappa$ $\bar{g}_\varkappa$-fach, wo

$$\bar{g}_\varkappa \leqq g_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1)$$

ist, als scheinbar singulären Punkt aufzählen, es muss nur

$$\tau + \sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1} \bar{g}_\varkappa \equiv \sigma \pmod 2$$

sein. In (13) hat man dann

$$2m = \tau + \sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1} \bar{g}_\varkappa - \sigma, \quad \varrho = \tau + \sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1} \bar{g}_\varkappa$$

und ferner etwa

$$b_{\tau+1} = \cdots = b_{\tau+\bar{g}_1+1} = a_1, \quad b_{\tau+\bar{g}_1+2} = \cdots = b_{\tau+\bar{g}_1+\bar{g}_2+1} = a_2,$$

u. s. w.

zu nehmen. Wenn einige der b_i gleich Unendlich zu nehmen sind, so sind natürlich die entsprechenden Linearfactoren im Zähler von (13) einfach wegzulassen, indem ja bekanntlich dem Auftreten einer unendlichen Wurzel in einer Gleichung stets die Erniedrigung des Grades der Gleichung um eine Einheit entspricht. In der Differentialgleichung (B_2), die auf diese Weise entsteht, ist die Differenz der Wurzeln der zu $a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung im Allgemeinen gleich

$$\delta_\varkappa - \bar{g}_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

geworden, und an die Stelle der $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$ sind die $\sigma - 2$ einfachen (im Allgemeinen von den $a_\varkappa$ getrennt liegenden) scheinbar singulären Stellen $\partial_1, \partial_2, \cdots \partial_{\sigma-2}$ eingetreten.

Nehmen wir insbesondere

$$\bar{g}_\varkappa = g_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1),$$

so dass also

$$\varrho = \tau + \sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1} g_\varkappa$$

die wirklich vorhandene Anzahl einfacher scheinbar singulärer Stellen (im Sinne der Nr. 197, S. 256) angiebt; wenn dann ϱ und σ modulo Zwei gleiche Reste lassen, und wir durch $b_1, \cdots b_\varrho$ die sämmtlichen scheinbar singulären Stellen (jede so oft gezählt, als ihre Vielfachheit erfordert) bezeichnen, so ergiebt das zur Bestimmung der Function (13) dargelegte Verfahren eine mit (A_2) zur selben Familie gehörige Differentialgleichung (B_2), die im strengen Sinne des Wortes nur $\sigma - 2$ einfache scheinbar singuläre Stellen besitzt. Von diesen Stellen können eventuell auch einige in die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$ hineinfallen; im Allgemeinen liegen die $\partial_1, \partial_2, \cdots \partial_{\sigma-2}$ von einander und von den $a_\varkappa$ getrennt, und dann ist die Differenz der Wurzeln der zu $a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von (B_2) gleich $\delta_\varkappa - g_\varkappa$. Da die zur Bestimmung von ψ beziehungsweise χ dienenden Gleichungen eine eindeutige Bestimmung liefern, so giebt es auch stets nur eine Differentialgleichung von der für (B_2) angegebenen Beschaffenheit, die mit (A_2) zur selben Familie gehört. Wir haben also den Satz:

Wenn die Differentialgleichung (A_2) σ wirkliche im Endlichen gelegene und ϱ einfach zu zählende scheinbar singuläre Stellen besitzt, so giebt es, wenn ϱ und σ modulo Zwei gleiche Reste lassen, eine und nur eine mit (A_2) zur selben Familie gehörige Differentialgleichung (B_2), die nur $\sigma - 2$ einfach zu zählende scheinbar singuläre Stellen hat. Man nennt diese Differentialgleichung (B_2) nach Herrn Poincaré die Reducirte der Familie.

Wenn ϱ und σ modulo Zwei incongruent sind, so kann man auf analoge Weise zeigen, dass sich eine mit (A_2) zur selben Familie gehörige Differentialgleichung (B_2) bestimmen lässt, die $\sigma - 1$ scheinbar singuläre Punkte besitzt und deren Coefficient q noch einen willkürlich bleibenden Parameter enthält. Ueber diesen kann man z. B. so disponiren, dass einer der $\sigma - 2$ scheinbar singulären Punkte eine vorgeschriebene Lage erhält. Dabei liefern dann die Bestimmungsgleichungen von (B_2) diese Gleichung auch in eindeutiger Weise. Man kann dann ebenso wie vorhin die Reduction entweder so ausführen, dass man nur die von den wirklichen singulären Punkten getrennt liegenden scheinbaren singulären Stellen in's Spiel bringt, oder so, dass man auch noch einen Theil der mit wirklichen coincidirenden scheinbaren singulären Stellen, oder endlich so, dass man alle scheinbaren singulären Stellen (im strengen Sinne) mit heranzieht. Im letzteren Falle erhält man eine eindeutig determinirte Differentialgleichung (B_2), die genau $\sigma - 1$ einfach zu zählende scheinbar singuläre Stellen besitzt (über eine derselben ist willkürlich disponirt worden), und die in diesem Falle als die Reducirte der Familie anzusehen ist.

Es bedarf noch der Erörterung, dass die Reducirte innerhalb der Familie auch wirklich eindeutig determinirt ist, d. h. dass man stets zur selben Reducirten kommt, von welcher Differentialgleichung (A_2) der Familie man auch ausgegangen sein mag. Hat man aber zwei Differentialgleichungen, die zur selben Familie gehören, für welche die Wurzeln der zu den wirklichen singulären Punkten $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen übereinstimmen, und die nicht mehr wie $\sigma - 2$ einfach zu zählende scheinbar singuläre Stellen besitzen, so muss in der zwischen den abhängigen Variabeln y, z bestehenden Beziehung

$$z = A(fy + gy')$$

g verschwinden und Af sich auf eine Constante reduciren, d. h. die Differentialgleichungen sind identisch. Also kann es innerhalb einer Familie nicht zwei verschiedene Reducirte geben.

Die hier für Differentialgleichungen zweiter Ordnung entwickelten Resultate lassen sich im Wesentlichen auch auf Differentialgleichungen beliebiger Ordnung übertragen. Wir wollen dies hier des Näheren nicht ausführen, sondern ähnliche Betrachtungen, wie wir sie hier für die Integralquotienten einer linearen Differentialgleichung angestellt haben, nunmehr für die Integrale selbst anstellen und dabei die Ordnung der Differentialgleichung beliebig lassen. Wenn es nämlich auch bei Behandlung der Umkehrungsfragen geboten erscheint, die Integralquotienten in den Vordergrund der Untersuchung zu stellen, so darf man doch hierbei nicht stehen bleiben. Denn eine nicht geringe Anzahl von Eigenschaften tritt deutlicher hervor, wenn man statt der Quotienten die Integrale selbst studirt, andere Eigenschaften können überhaupt nur an den Integralen dargelegt werden.

Es ist dies eine ähnliche Erscheinung, wie sie auch in vielen anderen Gebieten der Mathematik zu Tage tritt, wo durch den Uebergang von nicht homogenen Ausdrücken zu homogenen Vieles vereinfacht, Vieles überhaupt erst zugänglich wird, so z. B. in der algebraischen und arithmetischen Theorie der algebraischen Formen, wo manche Fragen erst bei Betrachtung homogener Functionen formulirt werden können. Dass auch bei den Umkehrproblemen die Betrachtung der Integrale selbst zu wesentlich neuen Gesichtspunkten führt, wird sich an späterer Stelle zeigen, wo wir statt z. B. für Differentialgleichungen zweiter Ordnung Functionen des Integralquotienten

$$\eta = \frac{y_2}{y_1}$$

zu untersuchen, homogene Functionen der Integrale y_1, y_2 studiren werden. Von der Betrachtung homogener Functionen der y_1, y_2 können wir dann stets wieder zu den Functionen von η herabsteigen, indem wir den Grad jener homogenen Functionen gleich Null annehmen.

221. Differentialgleichung für die Integralquotienten einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung.

Ehe wir das Gebiet der Integralquotienten verlassen, wollen wir der Vollständigkeit wegen noch die algebraische Differentialgleichung aufstellen, der die Integralquotienten einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung Genüge leisten. Wir wissen, dass diese Differentialgleichung von der fünften Ordnung sein muss (Nr. 180, S. 181); sie spielt für $n = 3$ dieselbe Rolle wie die Gleichung (4) der Nr. 180 (S. 184) für $n = 2$.

Möge die Differentialgleichung dritter Ordnung in der Form

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3p_2\frac{dy}{dx} + p_3 y = 0, \quad p_1 = 0,$$

vorgelegt sein. Dann lässt sich durch Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{3}{4}p_2\zeta = 0$$

oder, wenn

$$\frac{1}{\zeta^2} = \frac{dz}{dx}$$

gesetzt wird, durch Integration von

$$\Delta\binom{z}{x} = 3p_2$$

die Differentialgleichung für y in die Form setzen

(1) $$\frac{d^3u}{dz^3} + \vartheta u = 0,$$

wo (Nr. 183, S. 198)

$$u = \frac{dz}{dx}y,$$

$$\vartheta = \frac{1}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^3}\left(p_3 - \frac{3}{2}\frac{dp_2}{dx}\right)$$

zu nehmen ist.

Seien u_1, u_2 zwei linear unabhängige Lösungen von (1), dann ist

$$-\vartheta u_2 = \frac{d^3u_2}{dz^3} = \frac{d^3}{dz^3}(u_1 s),$$

wenn wir

$$s = \frac{u_2}{u_1}$$

setzen. Wir erhalten folglich mit Rücksicht auf die Differentialgleichung (1)

$$-\vartheta u_2 = u_1\frac{d^3s}{dz^3} + 3\frac{du_1}{dz}\frac{d^2s}{dz^2} + 3\frac{d^2u_1}{dz^2}\frac{ds}{dz} - \vartheta u_1 s,$$

oder

(2) $$0 = u_1 s^{(3)}(z) + 3u_1'(z)s''(z) + 3u_1''(z)s'(z),$$

wo die oberen Accente Ableitungen nach z bedeuten.

Differentiiren wir diese Gleichung zweimal nach z und entfernen mit Hülfe von (1) die Ableitungen höherer als zweiter Ordnung von u_1, so kommt

$$0 = (s^{(4)}(z) - 3s'(z)\vartheta)u_1 + 4u_1'(z)s^{(3)}(z) + 6u_1''(z)s''(z),$$

$$0 = [s^{(5)}(z) - 9s''(z)\vartheta + 3s'(z)\vartheta'(z)]u_1 + [5s^{(4)}(z) - 3s'(z)\vartheta]u_1'(z) + 10u_1''(z)s^{(3)}(z).$$

Eliminiren wir aus diesen beiden Gleichungen und aus (2) die Grössen

$$u_1,\quad u_1'(z),\quad u_1''(z),$$

so erhalten wir die gesuchte Differentialgleichung fünfter Ordnung für die Integralquotienten s von (1) in der Form

$$\begin{vmatrix} \frac{d^5s}{dz^5} - 9\frac{d^2s}{dz^2}\vartheta - 3\frac{ds}{dz}\frac{d\vartheta}{dz} & 5\frac{d^4s}{dz^4} - 3\frac{ds}{dz}\vartheta & 10\frac{d^3s}{dz^3} \\ \frac{d^4s}{dz^4} - 3\frac{ds}{dz}\vartheta & 4\frac{d^3s}{dz^3} & 6\frac{d^2s}{dz^2} \\ \frac{d^3s}{dz^3} & 3\frac{d^2s}{dz^2} & 3\frac{ds}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

Bedeuten s_1, s_2 zwei Lösungen dieser Differentialgleichung, so ist die allgemeine Lösung s in der Form

$$s = \frac{A + Bs_1 + Cs_2}{A' + B's_1 + C's_2}$$

darstellbar, wo A, B, C, A', B', C' willkürliche Integrationsconstanten bedeuten, und ein Fundamentalsystem von (1) ist durch

$$(s_1''(z)s_2'(z) - s_1'(z)s_2''(z))^{-\frac{1}{3}},$$

$$s_1(s_1''(z)s_2'(z) - s_1'(z)s_2''(z))^{-\frac{1}{3}},$$

$$s_2(s_1''(z)s_2'(z) - s_1'(z)s_2''(z))^{-\frac{1}{3}}$$

gegeben (vergl. Nr. 180, S. 181, Nr. 179, S. 175).

Achtes Kapitel.

222. Differentialgleichungen und Functionssysteme, die zur selben Classe gehören. Sätze von Riemann.

Die nun folgenden Untersuchungen schliessen sich enge an die bereits in der Nr. 162 (S. 156) skizzirte Art und Weise an, wie Riemann die Theorie der durch die Gauss'sche Reihe definirten Function entwickelt und, wie aus den aus seinem Nachlasse zuerst im Jahre 1876 bekannt gemachten Fragmenten hervorgeht, auch in die Theorie der allgemeinen linearen Differentialgleichungen einzudringen versucht hat.

Wir haben zwei lineare Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe derselben Familie zugezählt, wenn sie dieselben wirklichen singulären Punkte besitzen und wenn sich zwei Systeme von Integralquotienten angeben lassen, die bei Umläufen der unabhängigen Variabeln um diese singulären Punkte auch dieselben projectiven Substitutionen erfahren. Die scheinbar singulären Stellen, die für Differentialgleichungen derselben Familie noch verschieden sein können, sind im Allgemeinen Unendlichkeitsstellen der Integralquotienten, in deren Umgebung sich die Integralquotienten verhalten wie rationale Functionen. Es würde also den Anschein haben, dass wir das Analogon dessen, was für die Integralquotienten die Familie ist, bei Betrachtung der Integrale selbst in der Zugehörigkeit zweier Differentialgleichungen zur selben Art zu suchen hätten.

In der That stimmen für die Integrale zweier Differentialgleichungen derselben Art (vergl. Nr. 165, S. 120) diejenigen singulären Punkte überein, in deren Umgebung sich die Integrale verzweigen oder, wenn die Differentialgleichung nicht zur Fuchs'schen Classe gehört, unbestimmt werden, und es können sich nur diejenigen singulären Punkte ändern, in deren Umgebung die Integrale das Verhalten von rationalen Functionen zeigen. Nun kann schon, wenn wir die Integralquotienten einer und derselben Differentialgleichung betrachten, eine Stelle, die für einen dieser Quotienten eine reguläre Stelle ist, für

einen anderen eine Unendlichkeitsstelle sein. Dagegen ist für die Integrale selbst das Auftreten einer Unendlichkeitsstelle für ein Integral insofern charakteristisch, als es dann in jedem Fundamentalsysteme mindestens ein Integral geben muss, welches an dieser Stelle ebenfalls unendlich wird. Es liegt dies eben daran, dass von zwei Fundamentalsystemen von Integralen das eine durch das andere ganz linear darstellbar ist, während Fundamentalsysteme von Integralquotienten als gebrochene lineare Functionen von einander erscheinen.

Suchen wir also das Analogon der Zugehörigkeit zweier linearer Differentialgleichungen, deren Integralquotienten wir betrachten, zur selben Familie, so werden wir den Integralen nicht nur dieselben Verzweigungs- und Unbestimmtheitsstellen, sondern überhaupt dieselben singulären Stellen zu erhalten haben, d. h. wir werden unter den Differentialgleichungen derselben Art noch diejenigen aussondern, für welche auch die singulären Stellen, in denen Integrale wie rationale Functionen unendlich werden (Kategorie 3. der in der Nr. 165, S. 119 aufgestellten Classification), dieselben sind.

Wir sagen mit Riemann, dass zwei Differentialgleichungen derselben Art insbesondere zur selben Classe gehören, wenn auch die Unendlichkeitsstellen ihrer Integrale, wo sich diese Integrale wie ratio nale Functionen verhalten, übereinstimmen, d. h. wenn die sämmtlichen wesentlichen singulären Punkte in beiden Differentialgleichungen dieselben sind.

Zwei Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe gehören also dann und nur dann zur selben Classe im Sinne von Riemann, wenn ihre sämmtlichen wesentlichen singulären Stellen übereinstimmen, und wenn überdies Fundamentalsysteme dieser Differentialgleichungen existiren, die cogredient sind, d. h. bei Umläufen um dieselben singulären Stellen auch dieselben Substitutionen erfahren*).

Wir beschränken uns im Folgenden auf die Betrachtung von Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe.

Sei

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0$$

*) In seinen in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1888 und folg. veröffentlichten Arbeiten bedient sich Herr Fuchs der Bezeichnung „Classe" für die Gesammtheit derjenigen linearen Differentialgleichungen, die nach unserer im Anschlusse an Herrn Poincaré (Acta Mathematica Bd. 5, 1884) gewählten Terminologie zur selben „Art" gehören. Wir haben den Classenbegriff in der ursprünglich von Riemann festgesetzten Form beibehalten.

eine solche Differentialgleichung, $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ die im Endlichen gelegenen, $a_{\sigma+1} = \infty$ der unendlich ferne wesentlich singuläre Punkt und $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$ die ausserwesentlich singulären Punkte. Ferner seien

$$y_1, y_2, \cdots y_n$$

die Elemente irgend eines Fundamentalsystemes von (A),

$$\mathfrak{y}_{\varkappa 1}, \mathfrak{y}_{\varkappa 2}, \cdots \mathfrak{y}_{\varkappa n} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma+1)$$

die Elemente des zu $x = a_\varkappa$ gehörigen canonischen Fundamentalsystemes,

$$r_{\varkappa 1}, r_{\varkappa 2}, \cdots r_{\varkappa n} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma+1)$$

die Wurzeln der zu $x = a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, endlich mögen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1}$$

die dem Fundamentalsysteme $y_1, y_2, \cdots y_n$ entsprechenden Fundamentalsubstitutionen bedeuten, die bei der gewohnten durch die Fig. 2 (Nr. 208, S. 304) angedeuteten Zerschneidung der x-Ebene in eine einfach zusammenhängende Fläche $\overline{T}$ den Ueberschreitungen der Querschnitte

$$l_1, l_2, \cdots l_\sigma$$

entsprechen. Da unter den $a_1, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$ auch die Stellen enthalten sind, an denen einzelne Integrale unendlich werden, ohne sich zu verzweigen, so können einzelne der Substitutionen $A_\varkappa$ sich auch auf die identische Substitution 1 reduciren.

Bedeutet

$$\text{(B)} \qquad q_0 \frac{d^n z}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \cdots + q_n z = 0$$

eine Differentialgleichung, die mit (A) zur selben Classe gehört, so ist jedenfalls, da (A) und (B) zur selben Art gehören,

$$\text{(C)} \qquad z = r_0 y + r_1 y' + \cdots + r_{n-1} y^{(n-1)},$$

wo die $r_0, r_1, \cdots r_{n-1}$ rationale Functionen von x darstellen. Diese rationalen Functionen müssen aber überdies so beschaffen sein, dass die durch die Gleichung (C) definirte Function z an keiner von den $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ verschiedenen endlichen Stelle unendlich wird. Dagegen kann die Differentialgleichung (B) im Allgemeinen ausserwesentlich singuläre Stellen besitzen, die von denen der Differentialgleichung (A) verschieden sind. Für eine wesentlich singuläre Stelle $x = a_\varkappa$ können sich die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung von (B) von den $r_{\varkappa 1}, r_{\varkappa 2}, \cdots r_{\varkappa n}$ nur um ganze Zahlen unterscheiden.

Wir sagen von dem mit $y_1, y_2, \cdots y_n$ cogredienten Fundamentalsysteme

(1) $$z_x = r_0 y_x + r_1 y_x' + \cdots + r_{n-1} y_x^{(n-1)},$$

es sei ein Functionssystem, welches mit dem Functionssysteme $y_1, y_2, \cdots y_n$ zur selben Classe gehört. Diese Definition stimmt dann offenbar mit der folgenden überein.

Ein System von n Functionen $z_1, z_2, \cdots z_n$, die in der einfach zusammenhängenden Fläche $\overline{T}$ allenthalben eindeutig und endlich sind, beim Ueberschreiten der Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$ die Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\sigma$ erfahren und keine Stelle der Unbestimmtheit besitzen, gehört mit $y_1, y_2, \cdots y_n$ zur selben Classe.

In der That befriedigt jedes so beschaffene Functionssystem eine lineare homogene Differentialgleichung von höchstens n^{ter} Ordnung der Fuchs'schen Classe, die mit (A) zur selben Classe gehört.

Seien

(2) $$s_{x1}, \; s_{x2}, \; \cdots \; s_{xn} \qquad (x = 1, 2, \cdots \sigma + 1)$$

die Wurzeln der zu $x = a_x$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (B), so sagen wir mit Riemann, diese Zahlen seien die Exponenten des Functionssystems $z_1, z_2, \cdots z_n$. Es wird uns wesentlich darauf ankommen, festzustellen, inwieweit ein mit $y_1, y_2, \cdots y_n$ zur selben Classe gehöriges Functionssystem durch Angabe seiner Exponenten (die sich natürlich von den entsprechenden r_{xi} nur durch additive ganze Zahlen unterscheiden können) bestimmt ist.

Hat man $(n+1)$ Systeme von je n Functionen, die zur selben Classe gehören,

$$y_{x1}, \; y_{x2}, \; \cdots \; y_{xn} \qquad (x = 1, 2, \cdots n+1),$$

so besteht zwischen diesen Systemen eine homogene lineare Beziehung, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von x sind.

Denn setzt man

$$\varphi_1 y_{1x} + \varphi_2 y_{2x} + \cdots + \varphi_{n+1} y_{n+1,x} = 0 \qquad (x = 1, 2, \cdots n),$$

so sind die $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{n+1}$ proportional den aus dem Systeme

$$(y_{ix}) \qquad (i = 1, 2, \cdots n+1; \; x = 1, 2, \cdots n)$$

gebildeten Determinanten n^{ter} Ordnung. Diese Determinanten sind aber nach dem Appell'schen Satze (Nr. 15, Bd. I, S. 40) proportional mit gewissen ganzen rationalen Functionen von x.

Betrachten wir insbesondere die Beziehungen (1), die zwischen $z_1, z_2, \cdots z_n$ und den Ableitungen der $y_1, y_2, \cdots y_n$ bestehen, welch' letztere ja offenbar Functionssysteme sind, die mit $y_1, y_2, \cdots y_n$ zur selben Classe gehören. Diese Beziehungen lassen sich in die Form setzen

$$(3)\qquad g z_\varkappa = h_0 y_\varkappa + h_1 y_\varkappa' + \cdots + h_{n-1} y_\varkappa^{(n-1)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo die $g, h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$ ganze rationale Functionen von x bedeuten.

Sei $x = c$ eine Wurzel der Gleichung

$$g(x) = 0.$$

Wenn $x = c$ mit keiner der wesentlichen singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ zusammenfällt, so sind die $z_1, z_2, \cdots z_n$ für $x = c$ jedenfalls endlich, also müssen in diesem Punkte die Ausdrücke

$$h_0 y_\varkappa + h_1 y_\varkappa' + \cdots + h_{n-1} y_\varkappa^{(n-1)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

verschwinden. Wenn nun, wie wir voraussetzen können, die ganzen Functionen

$$g,\ h_0,\ h_1,\ \cdots\ h_{n-1}$$

keinen gemeinsamen Theiler besitzen, so können für $x = c$ nicht alle

$$h_0,\ h_1,\ \cdots\ h_{n-1}$$

gleich Null sein; also muss die Determinante

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n)$$

für $x = c$ verschwinden. Diese Determinante verschwindet aber nur für singuläre Punkte der Differentialgleichung (A), wir haben also den Satz:

Der Coefficient g der $z_\varkappa$ in den Gleichungen (3) kann nur für die singulären Stellen der Differentialgleichung (A) verschwinden.

223. Bestimmung einer Differentialgleichung der Classe, deren determinirende Gleichungen zwischen Null und Eins gelegene Wurzeln haben.

Wenn g nur in den wesentlichen singulären Stellen von (A) gleich Null wird, so definiren die Gleichungen (3) bei willkürlicher Wahl der ganzen rationalen Functionen $h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$ ein Functionssystem $[z_\varkappa]$, welches mit $[y_\varkappa]$ zur selben Classe gehört. Dies ist also insbesondere der Fall, wenn g gleich einer Constanten gewählt wird.

Diese einfache Bemerkung soll uns dazu dienen, um von der Differentialgleichung (A) zu einer Differentialgleichung derselben Classe

überzugehen, in welcher die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen gewisse vorgeschriebene Abweichungen von den entsprechenden Grössen der Gleichung (A) zeigen.

Denken wir uns die Differentialgleichung (A) in der Umgebung einer gewissen wesentlichen oder ausserwesentlichen singulären Stelle $x = a$ in der Normalform (Nr. 44, Bd. I, S. 154) geschrieben

$$\text{(A)}\qquad (x-a)^n P_n(x) y^{(n)} + (x-a)^{n-1} P_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + P_0(x) y = P(y) = 0$$

und setzen wir

$$z = R_0 y + (x-a) R_1 y' + \cdots + (x-a)^{n-1} R_{n-1} y^{(n-1)} = R(y),$$

wo also die P_n, P_{n-1}, $\cdots$ P_0 bestimmte, die R_{n-1}, $\cdots$ R_0 noch geeignet zu wählende ganze rationale Functionen von x bedeuten, von denen P_n und R_{n-1} für $x = a$ nicht verschwinden, so genügt z einer mit (A) zur selben Classe gehörigen Differentialgleichung, die wir uns bei $x = a$ ebenfalls in der Normalform geschrieben denken wollen:

$$\text{(B)}\qquad (x-a)^n Q_n z^{(n)} + (x-a)^{n-1} Q_{n-1} z^{(n-1)} + \cdots + Q_0 z = Q(z) = 0,$$

Q_n, Q_{n-1}, $\cdots$ Q_0 sind ganze Functionen, Q_n für $x = a$ von Null verschieden.

Bilden wir den zusammengesetzten Differentialausdruck

$$QR(y),$$

so besitzt derselbe (Nr. 17, Bd. I, S. 46) bei $x = a$ ebenfalls die Normalform und hat $x = a$ zur Stelle der Bestimmtheit. Es ist dann (Nr. 164, S. 118)

$$QR = SP,$$

wo S einen Differentialausdruck $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten bedeutet, der für $x = a$ auch die Normalform und diese Stelle zur Stelle der Bestimmtheit hat.

Seien nun für unbestimmtes ϱ:

$$P((x-a)^\varrho) = (x-a)^\varrho \sum_{\varkappa=0}^{\infty} f_\varkappa(\varrho)(x-a)^\varkappa,$$

$$Q((x-a)^\varrho) = (x-a)^\varrho \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \varphi_\varkappa(\varrho)(x-a)^\varkappa,$$

$$R((x-a)^\varrho) = (x-a)^\varrho \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \psi_\varkappa(\varrho)(x-a)^\varkappa,$$

$$S((x-a)^\varrho) = (x-a)^\varrho \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \chi_\varkappa(\varrho)(x-a)^\varkappa$$

die charakteristischen Functionen der Differentialausdrücke P, Q, R, S, so haben wir nach Nr. 86 (Bd. I, S. 309) die Gleichungen:

$$\sum_{\varkappa} \varphi_{\nu-\varkappa}(\varrho+\varkappa)\psi_{\varkappa-\mu}(\varrho+\mu) = \sum_{\varkappa} \chi_{\nu-\varkappa}(\varrho+\varkappa)f_{\varkappa-\mu}(\varrho+\mu)$$

$$(\nu, \mu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Die beiden ersten dieser Gleichungssysteme lauten

$$(4) \qquad \varphi_0(\varrho)\psi_0(\varrho) = \chi_0(\varrho)f_0(\varrho),$$

$$(5) \qquad \varphi_0(\varrho+1)\psi_0(\varrho+1) = \chi_0(\varrho+1)f_0(\varrho+1),$$

$$(6) \qquad \varphi_1(\varrho)\psi_0(\varrho) + \varphi_0(\varrho+1)\psi_1(\varrho) = \chi_1(\varrho)f_0(\varrho) + \chi_0(\varrho+1)f_1(\varrho).$$

Aus der letzten Gleichung folgt dann mit Rücksicht auf die zweite

$$(7) \qquad \chi_1(\varrho)f_0(\varrho) - \varphi_1(\varrho)\psi_0(\varrho) = \chi_0(\varrho+1)\,\frac{f_0(\varrho+1)\psi_1(\varrho) - \psi_0(\varrho+1)f_1(\varrho)}{\psi_0(\varrho+1)}.$$

Sei nun r_1 eine λ-fache Wurzel der zu $x = a$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung

$$(8) \qquad f_0(\varrho) = 0$$

von (A), so kann man im Allgemeinen, wie Herr Heffter gezeigt hat, die Coefficienten des Differentialausdruckes $R(y)$ so einrichten, dass die zu $x = a$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung

$$(9) \qquad \varphi_0(\varrho) = 0$$

von (B) die λ-fache Wurzel $r_1 + 1$ besitzt und ihre sämmtlichen $n - \lambda$ übrigen Wurzeln mit (8) gemein hat.

Nehmen wir nämlich $R(y)$ von der λ^{ten} Ordnung so, dass

$$\psi_0(\varrho) = \text{const.}\,(\varrho - r_1)^{\lambda}$$

ist, dann verschwindet die linke Seite der Gleichung (7) für $\varrho = r_1$ von der λ^{ten} Ordnung. Wenn nun nicht gleichzeitig

$$(10) \qquad f_0(r_1+1) = 0 \quad \text{und} \quad f_1(r_1) = 0$$

sind, so kann, da

$$\psi_0(r_1+1) \neq 0$$

ist, und $R(y)$ auch noch so eingerichtet werden kann, dass

$$\psi_1(r_1) \neq 0$$

ist, die rechte Seite von (7) nur dadurch für $\varrho = r_1$ von λ^{ter} Ordnung verschwinden, dass

$$\chi_0(\varrho+1) = 0$$

die λ-fache Wurzel r_1, also

$$\chi_0(\varrho) = 0$$

die λ-fache Wurzel $r_1 + 1$ besitzt. Dann hat aber zufolge der Gleichung (4) auch

$$\varphi_0(\varrho) = 0$$

die λ-fache Wurzel $r_1 + 1$. Dass $R(y)$ überdies so eingerichtet werden kann, dass die $n - \lambda$ übrigen Wurzeln von (9) mit denen von (8), und überhaupt für jeden wesentlich singulären Punkt die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen von (A) und (B) übereinstimmen, ist evident.

Was die Bedingungen (10) anlangt, so ist Folgendes zu bemerken. Wenn z. B. zur Wurzel r_1 ein in Reihenform darstellbares Integral

$$\mathfrak{y} = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu (x - a)^{r_1 + \nu}, \quad g_0 \neq 0,$$

gehört, so lauten die beiden ersten Gleichungen der für die g_ν bestehenden Recursionsformel (Nr. 45, Bd. I, S. 158)

$$g_0 f_0(r_1) = 0,$$
$$g_0 f_1(r_1) + g_1 f_0(r_1 + 1) = 0.$$

Wenn alsdann z. B.

$$f_0(r_1 + 1) = 0$$

wäre, so müsste nothwendig auch

$$f_1(r_1) = 0$$

sein; in diesem Falle wäre also die angegebene Reduction nicht ausführbar.

Wenn für alle wesentlich singulären Stellen von (A) die zugehörigen Fundamentalgleichungen lauter von einander verschiedene Wurzeln haben, so können die Gleichungen (10) für keine der Wurzeln der zu diesen Stellen gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen bestehen. Da wir ferner durch Multiplication von y mit einer rationalen Function von der Form

$$(x - a_1)^{-\alpha_1}(x - a_2)^{-\alpha_2} \cdots (x - a_\sigma)^{-\alpha_\sigma},$$

wo die $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\sigma$ positive ganze Zahlen oder Null bedeuten, stets erreichen können, dass die realen Theile der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen für die im Endlichen gelegenen wesentlichen singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ nicht positiv sind, so können wir durch wiederholte Anwendung des für $x = a$ und die Wurzel r_1 beschriebenen Verfahrens stets von (A) zu einer Differentialgleichung (A') derselben Classe übergehen, die so beschaffen ist, dass die realen Theile der Wurzeln der auf

$a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ bezüglichen determinirenden Fundamentalgleichungen zwischen Null und der negativen Einheit liegen.

Herr Fuchs, der diese Reduction zuerst angegeben hat, lehrt, wie man die Coefficienten der Beziehung, die zwischen den abhängigen Variabeln der Differentialgleichungen (A) und (A') besteht, direct finden, also die Reduction mit einem Schlage ausführen kann. Die analoge Reduction in dem Falle, wo für die determinirenden Fundamentalgleichungen von (A) Wurzeln vorhanden sind, die sich um ganze Zahlen unterscheiden, beruht auf dem folgenden ebenfalls von Herrn Fuchs herrührenden Satze:

Man kann stets eine mit (A) zur selben Classe gehörige Differentialgleichung (A') finden, die so beschaffen ist, dass, wenn $r_1, r_2, \cdots r_m$ die Wurzeln der zu einem singulären Punkte gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von (A') bedeuten, welche sich nicht um ganze Zahlen von einander unterscheiden, die Gesammtheit der von r_1 um ganze Zahlen (die Null mit eingeschlossen) verschiedenen Wurzeln in der Form

$$r_1, \; r_1 - 1, \; r_1 - 2, \cdots r_1 - \nu \qquad (\nu \leqq n-1)$$

darstellbar ist.

Seien nämlich für die zu $x = a$ gehörige determinirende Gleichung von (A)

$$r_1, \; r_1 - g_1, \; r_1 - g_2, \cdots r_1 - g_\nu$$

die von r_1 um ganze Zahlen verschiedenen Wurzeln, und möge für $\varkappa = 0, 1, \cdots \nu$ die Wurzel $r_1 - g_\varkappa$ eine $\lambda_\varkappa$-fache sein, während $g_0, g_1, g_2, \cdots g_\nu$ ganze Zahlen bedeuten, für welche

$$g_0 = 0 < g_1 < g_2 < \cdots < g_\nu$$

ist; dann kann man zunächst zu einer Differentialgleichung übergehen, die mit (A) zur selben Classe gehört, und für welche die zu $x = a$ gehörige determinirende Gleichung die Wurzeln

$$r_1, \; r_1 - g_1 + 1, \; r_1 - g_2, \cdots r_1 - g_\nu$$

beziehungsweise $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\nu$-fach besitzt, wenn $g_1 > 1$ ist. Durch Wiederholung dieses Processes gelangt man zu einer mit (A) zur selben Classe gehörigen Differentialgleichung, für welche

$$r_1, \; r_1 - 1, \; r_1 - g_2, \cdots r_1 - g_\nu$$

beziehungsweise $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\nu$-fache Wurzeln der zu $x = a$ gehörigen determinirenden Gleichung sind. Wenn $g_2 > 2$, so fährt man

in derselben Weise fort, bis die gewünschte Form der Wurzelgruppe erreicht ist.

Diese Reduction ist, wie sich leicht übersehen lässt, für den Punkt $x = \infty$ genau in derselben Weise durchführbar wie für eine im Endlichen gelegene Stelle.

224. Sätze über Differentialgleichungen, die zu derselben Classe gehören.

Wir kehren zur allgemeinen Untersuchung der Coefficienten der Relation (3) (Nr. 223, S. 369) zurück unter der Voraussetzung, dass die $[z_\varkappa]$ ein mit $[y_\varkappa]$ zur selben Classe gehöriges Functionssystem bedeuten.

Bezeichnen wir mit

$$D_\varkappa(z;\, y_1,\, y_2,\, \cdots y_n)$$

die Determinante, welche aus der Determinante

$$D(y_1,\, y_2,\, \cdots y_n) = \begin{vmatrix} y_1, & y_1', & \cdots & y_1^{(n-1)} \\ y_2, & y_2', & \cdots & y_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n, & y_n', & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

dadurch hervorgeht, dass man die Elemente der k^{ten} Verticalreihe durch $z_1,\, z_2,\, \cdots z_n$ ersetzt, so ist

$$\frac{h_{\varkappa-1}}{g} = \frac{D_\varkappa(z;\, y_1,\, y_2,\, \cdots y_n)}{D(y_1,\, y_2,\, \cdots y_n)}. \tag{11}$$

In der Umgebung des wesentlich singulären Punktes $a_\varkappa$ ist (Nr. 43, Bd. I, S. 152) die Determinante $D(y_1,\, y_2,\, \cdots y_n)$ in der Form

$$D(y_1,\, y_2,\, \cdots y_n) = (x - a_\varkappa)^{r_\varkappa}\, \mathfrak{P}_\varkappa(x \,|\, a)$$

darstellbar, wo $\mathfrak{P}_\varkappa$ eine gewöhnliche, für $x = a_\varkappa$ nicht verschwindende Potenzreihe von $x - a$ bedeutet und

$$r_\varkappa = \sum_{i=1}^{n} r_{\varkappa i} - \frac{n(n-1)}{2} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

gesetzt wurde; ebenso ist in der Umgebung von $x = \infty$

$$D(y_1,\, y_2,\, \cdots y_n) = \left(\frac{1}{x}\right)^{r_{\sigma+1}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

wenn wir

$$r_{\sigma+1} = \sum_{i=1}^{n} r_{\sigma+1,\,i} + \frac{n(n-1)}{2}$$

setzen und $\mathfrak{P}$ eine gewöhnliche, für $x = \infty$ nicht verschwindende Potenzreihe von x^{-1} bedeuten lassen.

Zufolge der zwischen den Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1}$ bestehenden Beziehung

$$A_{\sigma+1} A_\sigma \cdots A_2 A_1 = 1$$

ist (vergl. Nr. 122, Bd. I, S. 445) die Summe

$$\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1} \sum_{i=1}^{n} r_{\varkappa i} = r$$

eine ganze Zahl; es ist folglich

$$(12) \qquad D(y_1, y_2, \cdots y_n) \prod_{\varkappa=1}^{\sigma} (x - a_\varkappa)^{-r_\varkappa}$$

eine für alle endlichen Werthe von x eindeutige und endliche Function, die sich für $x = \infty$ wie die ganzzahlige Potenz

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{r - (\sigma - 1) \frac{n(n-1)}{2}}$$

verhält. Wäre der Exponent dieser Potenz positiv, so müsste das Product (12) nach einem elementaren Satze der Functionentheorie eine Constante und zwar, da es für $x = \infty$ verschwindet, gleich Null sein. Dies ist aber ausgeschlossen, weil $[y_\varkappa]$ ein Fundamentalsystem bedeutet; also ist

$$r - (\sigma - 1) \frac{n(n-1)}{2} \leqq 0,$$

und das Product (12) ist demnach eine ganze rationale Function vom Grade

$$(\sigma - 1) \frac{n(n-1)}{2} - r.$$

Wir können diese ganze Function auch sofort genau angeben, wenn wir bemerken, dass $D(y_1, y_2, \cdots y_n)$ und folglich auch das Product (12) für jeden ausserwesentlichen singulären Punkt $x = b_\varkappa$ verschwinden muss wie

$$(x - b_\varkappa)^{\mathfrak{r}_\varkappa},$$

wo (vergl. Nr. 57, Bd. I, S. 201)

$$\mathfrak{r}_\varkappa = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{r}_{\varkappa i} - \frac{n(n-1)}{2} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho)$$

ist und $\mathfrak{r}_{\varkappa 1}, \mathfrak{r}_{\varkappa 2}, \cdots \mathfrak{r}_{\varkappa n}$ die Wurzeln der zu $x = b_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung bedeuten. Da nämlich zufolge der Fuchs'schen Beziehung (Nr. 68, Bd. I, S. 241)

(13) $$\sum_{\varkappa=1}^{\varrho}\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{r}_{\varkappa i}+r=(\varrho+\sigma-1)\frac{n(n-1)}{2}$$

ist, so ist, abgesehen von einer Constanten, das Product (12) di
gleich der ganzen Function

$$\prod_{\varkappa=1}^{\sigma}(x-b_\varkappa)^{\mathfrak{r}_\varkappa}=G(x).$$

Wir haben also

(14) $$D(y_1, y_2, \cdots y_n)=G(x)\prod_{\varkappa=1}^{\sigma}(x-a_\varkappa)^{r_\varkappa}.$$

Durch ganz analoge Schlüsse findet man, dass auch

$$D_\varkappa(z; y_1, y_2, \cdots y_n)=G_\varkappa(x)\prod_{\lambda=1}^{\sigma}(x-a_\lambda)^{r_\lambda^{(\varkappa)}}, \qquad (\varkappa=1,2,\cdots n)$$

ist, wo $G_\varkappa(x)$ eine ganze rationale Function bedeutet, die für ke
der Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ verschwindet und wo die Differenzen

$$r_\lambda - r_\lambda^{(\varkappa)} \qquad (\lambda=1,2,\cdots\sigma;\ \varkappa=1,2,\cdots n)$$

ganze Zahlen sind.

Hieraus schliessen wir, dass wir den Factor g von $z_\varkappa$ in den G
chungen (3) gleich einem Producte von der Form

$$g=G(x)H(x)$$

nehmen können, wo $H(x)$ eine ganze rationale Function bedeutet,
nur für die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ verschwindet. Wir erhalten also
folgenden Satz, der eine wichtige Ergänzung des in der Nr. 222 (S. 3
gefundenen Ergebnisses bildet:

Der Coefficient g von $z_\varkappa$ in der Gleichung (3) kann
ausserwesentlichen singulären Punkten der Differentialg
chung (A) von keiner höheren Ordnung verschwinden wie
Determinante des Fundamentalsystems dieser Different
gleichung.

Wir wollen sagen, der Punkt $b_\varkappa$ sei ein ausserwesentl
singulärer Punkt $\mathfrak{r}_\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung oder ein $\mathfrak{r}_\varkappa$-facher aus
wesentlich singulärer Punkt der Differentialgleichung (A), w
wie oben

$$\mathfrak{r}_\varkappa=\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{r}_{\varkappa i}-\frac{n(n-1)}{2}$$

ist. Für $\mathfrak{r}_\varkappa=1$ haben wir also einen einfachen ausserwesent
singulären Punkt; es ist dann, da alle $\mathfrak{r}_{\varkappa 1}, \mathfrak{r}_{\varkappa 2}, \cdots \mathfrak{r}_{\varkappa n}$ von eina
verschiedene ganze Zahlen bedeuten, nothwendig

$$\mathfrak{r}_{\varkappa 1} = n, \quad \mathfrak{r}_{\varkappa 2} = n - 2, \quad \mathfrak{r}_{\varkappa 3} = n - 3, \cdots \mathfrak{r}_{\varkappa n} = 0,$$

die eingeführte Bezeichnung stimmt also in diesem Falle mit der in der Nr. 112 (Bd. I, S. 401) benutzten überein.

Für einen solchen einfachen ausserwesentlich singulären Punkt $b_\varkappa$ wird also g im Allgemeinen von erster Ordnung verschwinden. Damit dann die $[z_\varkappa]$ mit den $[y_\varkappa]$ zur selben Classe gehören, müssen die ganzen Functionen $h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$ so eingerichtet werden, dass die $[z_\varkappa]$ für $x = b_\varkappa$ endlich bleiben. Sei $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ das zu $x = b_\varkappa$ gehörige canonische Fundamentalsystem, also in der Umgebung von $x = b_\varkappa$

$$\mathfrak{y}_\lambda = (x - b_\varkappa)^{\lambda - 1} \mathfrak{P}_\lambda(x \mid b_\varkappa) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n - 1),$$

$$\mathfrak{y}_n = (x - b_\varkappa)^n \mathfrak{P}_n(x \mid b_\varkappa),$$

wo $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots \mathfrak{P}_n$ gewöhnliche Potenzreihen sind, die für $x = b_\varkappa$ nicht verschwinden. Mögen ferner $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \cdots \mathfrak{z}_n$ die den $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ entsprechenden Lösungen der Differentialgleichung (B), und

$$g(x) = (x - b_\varkappa)\bar{g}(x), \quad \bar{g}(b_\varkappa) \neq 0$$

sein. Dann sind die Coefficienten der ganzen Functionen

$$h_0, \quad h_1, \cdots h_{n-1}$$

so einzurichten, dass die rechten Seiten der Gleichungen

$$(x - b_\varkappa)\bar{g}(x)\mathfrak{z}_1 = h_0 \mathfrak{P}_1(x \mid b_\varkappa) + h_1 \mathfrak{P}_1'(x \mid b_\varkappa) + \cdots + h_{n-1} \mathfrak{P}_1^{(n-1)}(x \mid b_\varkappa)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(x - b_\varkappa)\bar{g}(x)\mathfrak{z}_{n-1} = h_0 (x - b_\varkappa)^{n-1} \mathfrak{P}_{n-1}(x \mid b_\varkappa) + \cdots$$
$$+ h_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{ (x - b_\varkappa)^{n-1} \mathfrak{P}_{n-1}(x \mid b_\varkappa) \right\}$$

den Factor $x - b_\varkappa$ erhalten; die rechte Seite der n^{ten} Gleichung

$$(x - b_\varkappa)\bar{g}(x)\mathfrak{z}_n = h_0 \mathfrak{y}_n + h_1 \mathfrak{y}_n' + \cdots + h_{n-1} \mathfrak{y}_n^{(n-1)}$$

enthält den Factor $x - b_\varkappa$ schon von selbst. Also müssen entsprechend dem einfachen ausserwesentlich singulären Punkte $x = b_\varkappa$ die in den

$$h_0, \quad h_1, \cdots h_{n-1}$$

auftretenden Coefficienten genau $n - 1$ von einander unabhängige homogene lineare Gleichungen erfüllen. Ebenso folgt allgemein:

Entsprechend einem $\mathfrak{r}_\varkappa$-fachen ausserwesentlichen singulären Punkte müssen die Coefficienten der ganzen Functionen

$$h_0, \quad h_1, \cdots h_{n-1}$$

genau $(n - 1)\mathfrak{r}_\varkappa$ von einander unabhängige Bedingungen er-

füllen; zu diesen treten dann noch die $\mathfrak{r}_\varkappa$ Bedingungen, welche bewirken, dass g den Factor

$$(x - b_\varkappa)^{\mathfrak{r}_\varkappa}$$

enthält.

225. Differentialgleichungen mit nur einfachen ausserwesentlichen singulären Stellen. Constantenzählungen für die homogene Monodromiegruppe.

Wenn wir z gleich der n^{ten} Ableitung von y nehmen, so liefern uns die erlangten allgemeinen Resultate eine Bestätigung der bereits im fünften Abschnitte gefundenen Sätze über die Gestalt der Coefficienten einer Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe.

In diesem Falle ist nämlich (vergl. Nr. 14, Bd. I, S. 37)

$$D_\varkappa(z;\, y_1,\, y_2,\, \cdots\, y_n) = (-1)^\varkappa D_{n-\varkappa+1}(y_1,\, y_2,\, \cdots\, y_n),$$

und folglich haben die oben mit $r_\lambda^{(\varkappa)}$ bezeichneten Zahlen die Werthe

$$r_\lambda^{(\varkappa)} = r_\lambda + \varkappa - n - 1 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n;\ \lambda = 1, 2, \cdots \sigma).$$

Wir erhalten also

$$(15)\quad G(x)\prod_{\lambda=1}^{\sigma}(x-a_\lambda)^n y^{(n)} = \prod_{\lambda=1}^{\sigma}(x-a_\lambda)^{n-1} G_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + G_n(x) y,$$

wo die $G_1(x), \cdots G_n(x)$ ganze rationale Functionen bedeuten, deren Grade sich durch Betrachtung des unendlich fernen Punktes ergeben. Man findet in Uebereinstimmung mit Nr. 62 (Bd. I, S. 220) den Grad von $G_\varkappa(x)$ gleich

$$\sum_{\lambda=1}^{\varrho}\mathfrak{r}_\lambda + (\sigma - 1)\varkappa.$$

Wenn wir nebst dem Systeme $[z_\varkappa]$ noch die $(n-1)$ Systeme

$$[z_\varkappa^{(\lambda)}] \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n-1)$$

betrachten, so gehören diese offenbar auch mit $[y_\varkappa]$ zur selben Classe. Es ist folglich

$$G(x) H_\lambda(x) z_\varkappa^{(\lambda)} = h_{\lambda 0} y_\varkappa + h_{\lambda 1} y_\varkappa' + \cdots + h_{\lambda,\, n-1} y_\varkappa^{(n-1)} \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n;\ \lambda = 0, 1, \cdots n-$$

wo die $H_0,\, H_1,\, \cdots\, H_{n-1}$ ganze rationale Functionen bedeuten, d nur für $a_1,\, a_2,\, \cdots\, a_\sigma$ verschwinden können, und die

$$h_{\lambda 0},\, h_{\lambda 1},\, \cdots\, h_{\lambda,\, n-1}$$

ganze Functionen sind, die sich aus den

$$h_{00} = h_0, \; h_{01} = h_1, \; \cdots \; h_{0,n-1} = h_{n-1}$$

und deren Ableitungen sowie aus den Coefficienten der Differentialgleichung (A) nebst deren Ableitungen zusammensetzen. Nach dem Multiplicationstheoreme der Determinanten haben wir demnach

(16) $$[G(x)]^n H_0(x) \cdots H_{n-1}(x) D(z_1, z_2, \cdots z_n) = |h_{i\varkappa}| \, D(y_1, y_2, \cdots y_n)$$
$$(\varkappa, i = 0, 1, \cdots n-1).$$

Die Coefficienten $h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$ der rechten Seite der Gleichung (3) müssen zufolge der ausserwesentlich singulären Stellen $\mathfrak{r}_\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung

$$x = b_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho)$$

genau

$$(n-1)\sum_{\varkappa=1}^{\varrho} \mathfrak{r}_\varkappa$$

Bedingungen erfüllen. Diese Bedingungen können wir jetzt auch so formuliren, dass wir sagen, es muss die Determinante

$$|h_{i\varkappa}| \qquad (i, \varkappa = 0, 1, \cdots n-1)$$

durch die $(n-1)^{\text{te}}$ Potenz der ganzen Function $G(x)$ theilbar sein.

Setzen wir

$$\frac{|h_{i\varkappa}|}{[G(x)]^{n-1}} = K(x) \qquad (i, \varkappa = 0, 1, \cdots n-1),$$

so lässt sich die Gleichung (16) mit Rücksicht auf (14) in der Form

$$H_0(x) \cdots H_{n-1}(x) D(z_1, z_2, \cdots z_n) = K(x) \cdot \prod_{\varkappa=1}^{\sigma} (x - a_\varkappa)^{r_\varkappa}$$

schreiben. Die Determinante des Fundamentalsystems $[z_\varkappa]$,

$$D(z_1, z_2, \cdots z_n),$$

kann nur für singuläre Stellen und muss für die ausserwesentlich singulären Stellen der Differentialgleichung (B) verschwinden (Nr. 11, Bd. I, S. 30 und Nr. 57, Bd. I, S. 201); daraus folgt, dass die Gleichung

(17) $$K(x) = 0$$

durch ihre Wurzeln die Lage und durch die Vielfachheit jeder Wurzel zugleich die Ordnungszahl der ausserwesentlich singulären Stellen der Differentialgleichung (B) bestimmt.

Nun können wir offenbar die ganzen Functionen

$$h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$$

so einrichten, dass die Gleichung (17) lauter einfache Wurzeln besitzt,

dann sind also alle ausserwesentlich singulären Stellen der Differentialgleichung (B) einfache, d. h.:

Wir können von (A) stets zu einer Differentialgleichung derselben Classe übergehen, die nur einfache ausserwesentliche singuläre Stellen besitzt.

Es ist folglich keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir im Folgenden von vornherein annehmen, dass die ausserwesentlichen singulären Stellen $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$ der Differentialgleichung (A) einfache sind. Dann ist also

$$\mathfrak{r}_\varkappa = 1 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho),$$

und die ganze Function $G(x)$ ist einfach vom Grade ϱ,

$$G(x) = \prod_{\varkappa=1}^{\varrho} (x - b_\varkappa).$$

Die Thatsache, dass $b_\varkappa$ einfache ausserwesentlich singuläre Stelle ist, legt den Coefficienten der rechten Seite der Gleichung (15) $n - 1$ Bedingungen, dem Coefficienten der linken Seite eine Bedingung auf, so dass wir also im Ganzen für die Coefficienten von (15) oder von (A) genau n Bedingungen und für alle ϱ ausserwesentlich singulären Stellen zusammengenommen

$$n\varrho$$

von einander unabhängige Bedingungen erhalten (vergl. Nr. 57, Bd. I, S. 203).

Wir nehmen nun an der Differentialgleichung (A) bez. (15) eine Constantenzählung vor, die der in der Nr. 207 (S. 301) vorgenommenen analog ist; so wie dort die projective Monodromiegruppe, wird aber jetzt die homogene lineare Monodromiegruppe Θ in Betracht gezogen werden.

Die ganzen Functionen $G_\varkappa(x)$ in (15) sind vom Grade

$$\varrho + \varkappa(\sigma - 1) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wir haben also in allen

$$G(x),\ G_1(x),\ \cdots\ G_n(x)$$

im Ganzen

$$(n+1)(\varrho+1) + (\sigma - 1)\frac{n(n+1)}{2}$$

Constanten, wo die ausserwesentlich singulären Stellen $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$ als Constanten von $G(x)$ schon mitgezählt sind. Zu diesen treten noch die σ wesentlichen singulären Stellen, die aber nur $\sigma - 2$ wesentliche Parameter liefern, da wir durch lineare Transformation des x, ohne

den Charakter des unendlich fernen Punktes als wesentlich singulärer Stelle zu ändern, z. B.

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1$$

machen können. Dagegen sind abzuziehen ein constanter Homogenitätsfactor in der Gleichung (15) und die $n\varrho$ Bedingungsgleichungen für die ausserwesentlich singulären Stellen, so dass genau

$$(n+1)(\varrho+1) + (\sigma-1)\frac{n(n+1)}{2} - n\varrho - 1 + \sigma - 2$$
$$= \varrho + n + (\sigma-1)\frac{n(n+1)}{2} + \sigma - 2$$

verfügbare Parameter in den Coefficienten von (A) enthalten sind.

Die Gruppe Θ, die aus den Fundamentalsubstitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\sigma$ gebildet ist, hängt von $n^2\sigma$ Parametern ab; da wir aber ähnliche Gruppen als nicht von einander verschieden ansehen müssen, d. h. also die n^2 Coefficienten einer willkürlichen linearen Transformation, durch die wir von dem Fundamentalsysteme $[y_x]$ zu einem anderen Fundamentalsysteme übergehen, noch abziehen müssen, bleiben zunächst

$$n^2\sigma - n^2$$

Parameter. Aber die Multiplication aller $[y_x]$ mit einem constanten Factor ändert nichts an der Gruppe, es sind also richtig nicht n^2, sondern nur $n^2 - 1$ Parameter abzuziehen, so dass Θ genau von

$$n^2(\sigma-1) + 1$$

Parametern abhängt.

Denken wir uns die Gruppe Θ, d. h. die dieselbe bestimmenden $n^2(\sigma-1)+1$ Parameter gegeben und fragen, ob es möglich ist, die lineare Differentialgleichung (A) so einzurichten, dass die gegebene Gruppe die Monodromiegruppe derselben sei, so müssen wir also die in den Coefficienten von (A) auftretenden Parameter in geeigneter Weise zu bestimmen suchen. Es muss also jedenfalls die Anzahl dieser Parameter

$$\varrho + n + (\sigma-1)\frac{n(n+1)}{2} + \sigma - 2 \geq n^2(\sigma-1) + 1$$

sein. Hieraus erkennen wir, dass es für $n > 2$ im Allgemeinen nicht möglich ist, eine Differentialgleichung (A) herzustellen, die eine vorgeschriebene Monodromiegruppe Θ und keinen ausserwesentlichen singulären Punkt besitzt. Oder wie wir auch sagen können: Damit es möglich sei, eine zur Gruppe Θ gehörige Differentialgleichung (A) herzustellen, die keinen ausserwesentlich singulären Punkt besitzt, müssen

zwischen den $n^2(\sigma - 1) + 1$ Parametern von Θ genau

$$n^2(\sigma - 1) + 2 - (\sigma - 1)\frac{n^2 + n + 2}{2} - n$$

Relationen bestehen.

Diese Anzahl ist stets positiv, wenn

$$n > 2, \quad \sigma > 1$$

ist, nur für $n = 2$ ist dieselbe gleich Null. Wir finden also hier be Betrachtung der Integrale und der zu denselben gehörigen homogene linearen Gruppe genau dasselbe Ergebniss, wie wir es in der Nr. 20 (S. 302) durch Betrachtung der Integralquotienten und der zugehörige projectiven Gruppe abgeleitet hatten. Die daselbst aufgestellten Sätz bleiben für unsere gegenwärtige Untersuchung bestehen, wenn wir i denselben an die Stelle von „scheinbaren singulären Punkten" „ausser wesentlich singuläre Punkte" setzen. Es liefert uns also auch dies Constantenzählung eine Bestätigung dessen, dass den ausserwesentlic singulären Punkten für die Betrachtung der Integrale die analoge Roll zufällt wie den scheinbar singulären Punkten für die Betrachtung de Integralquotienten, und dass demnach beim Studium der Integrale selbs die Differentialgleichungen derselben Classe (also nicht die derselbe Art) das Analogon sind für die beim Studium der Integralquotiente auftretenden Differentialgleichungen derselben Familie.

Wir wollen auch hier, ähnlich wie in der Nr. 217 (S. 348), di Constantenzählung unter der Voraussetzung vornehmen, dass nich nur die Parameter der Gruppe Θ, sondern auch die wesentlichen singu lären Stellen

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

fest aber sonst willkürlich gegeben sind.

Die Anzahl der in den Coefficienten der Differentialgleichung (A verfügbaren Parameter reducirt sich dann auf

$$\varrho + n + (\sigma - 1)\frac{n(n+1)}{2}.$$

Soll eine Bestimmung derselben möglich sein, so dass die Differentia gleichung (A) die durch ihre $n^2(\sigma - 1) + 1$ Parameter gegeben Gruppe Θ zur Monodromiegruppe hat, so muss also

$$\varrho + n + (\sigma - 1)\frac{n(n+1)}{2} - (\sigma - 1)n^2 - 1 \geqq 0$$

sein, d. h.:

Damit eine Differentialgleichung (A) gefunden werde kann, welche die vorgeschriebenen wesentlichen singulär Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \infty$$

besitzt, und (so drücken wir uns jetzt exacter aus) für welche ein Fundamentalsystem existirt, welches bei Ueberschreitung der Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$ die vorgeschriebenen Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma$$

erfährt, muss die Anzahl ϱ der ausserwesentlich singulären Stellen

$$\varrho \geqq (\sigma - 1)\frac{n(n-1)}{2} + 1 - n \tag{18}$$

genommen werden.

Da die Gesammtheit aller Differentialgleichungen, deren wesentlich singuläre Punkte die

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \infty,$$

und deren zugehörige Fundamentalsubstitutionen die

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1}$$

sind, eine bestimmte Classe ausmacht, so schliessen wir aus der vorgenommenen Constantenzählung, dass bei willkürlicher Wahl der $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ eine und nur eine Differentialgleichung der Classe vorhanden sein dürfte, die genau

$$\varrho_0 = (\sigma - 1)\frac{n(n-1)}{2} + 1 - n \tag{19}$$

ausserwesentlich singuläre Stellen besitzt, da, wenn ϱ gleich dieser Anzahl genommen wird, in den Coefficienten von (A) genau ebensoviele noch verfügbare Parameter auftreten, wie in der Gruppe Θ. Natürlich hat diese Folgerung aus der Constantenzählung nur heuristische Bedeutung, wir werden sehr bald sehen, wie dieselbe präcisirt werden muss.

226. Differentialgleichungen derselben Classe, deren determinirende Fundamentalgleichungen übereinstimmen.

Wir hatten in der Nr. 224 (S. 376) erkannt, dass die allgemeinste Transformation, durch welche man von der Differentialgleichung (A) zu einer Differentialgleichung (B) derselben Classe übergeht, in der Form

$$g(x)z = h_0 y + h_1 y' + \cdots + h_{n-1} y^{(n-1)} \tag{20}$$

dargestellt werden kann, wo die ganze Function $g(x)$ als ein Product

$$g(x) = G(x)H(x)$$

von zwei Factoren darstellbar ist, deren einer $H(x)$ nur für die wesent-

lichen singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ verschwindet, während andere $G(x)$ für jeden ausserwesentlichen singulären Punkt von von so hoher Ordnung verschwindet, wie die Vielfachheit dieses aus wesentlich singulären Punktes angiebt. Die $h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$ sind d ganze rationale Functionen, deren Coefficienten, entsprechend je linearen Factor von $G(x)$, $n-1$ von einander unabhängige Bedingun zu erfüllen haben.

Wir stellen uns nun nach **Riemann** die Aufgabe, die Coefficien

$$g,\ h_0,\ h_1,\ \cdots h_{n-1}$$

der Relation (20) so zu bestimmen, dass die Differentialgleichung (der z Genüge leistet, nicht nur mit (A) zur selben Classe gehört, s dern dass auch für jeden wesentlichen singulären Punkt Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung der I ferentialgleichungen (A) und (B) übereinstimmen.

Aus der Forderung folgt zunächst, dass die Exponenten $r_\lambda^{(\varkappa)}$, denen die Determinanten

$$D_\varkappa(z;\ y_1, y_2, \cdots y_n)$$

in Bezug auf die Punkte a_λ gehören, für $\varkappa = 1, 2, \cdots n$ nicht kle sind wie die entsprechenden Exponenten r_λ, zu denen

$$D(y_1, y_2, \cdots y_n)$$

gehört. Es ist nämlich im Allgemeinen

$$r_\lambda^{(\varkappa)} = r_\lambda + \varkappa - 1 \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \sigma;\ \varkappa = 1, 2, \cdots n).$$

Daraus schliessen wir, dass wir $H(x)$ gleich einer Constanten neh können, so dass also einfach

$$g(x) = G(x)$$

ist. Wir hatten vorausgesetzt, dass die Gleichung (A) genau ϱ fache ausserwesentlich singuläre Punkte haben sollte; die Voraussetz dass alle ausserwesentlich singulären Punkte einfache sind, ist z im Folgenden nicht erforderlich, wir halten aber der Bequemlich wegen trotzdem an derselben fest.

Es ist also $g(x)$ eine ganze Function ϱ^{ten} Grades, die für kei der wesentlich singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ verschwindet. S die ganzen Functionen $h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$ beziehungsweise von den (den $\tau_0, \tau_1, \cdots \tau_{n-1}$, so handelt es sich zunächst um die Bes mung dieser Gradzahlen.

Zu dem Ende betrachten wir den Punkt $x = \infty$ und das zu c selben gehörige canonische Fundamentalsystem von (A)

$$\mathfrak{y}_{\sigma+1,\varkappa} = \left(\frac{1}{x}\right)^{r_{\sigma+1,\varkappa}} \mathfrak{P}_\varkappa\left(\frac{1}{x}\right), \quad \mathfrak{P}_\varkappa(\infty) \neq 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n).$$

Dann ist, da die entsprechenden Integrale von (B) zu denselben Exponenten gehören müssen, in der Umgebung von $x = \infty$

$$x^\varrho \left(\frac{1}{x}\right)^{r_{\sigma+1,\varkappa}} \overline{\mathfrak{P}}_\varkappa\left(\frac{1}{x}\right) = x^{\tau_0}\left(\frac{1}{x}\right)^{r_{\sigma+1,\varkappa}} \mathfrak{P}_{\varkappa 0}\left(\frac{1}{x}\right) + x^{\tau_1}\left(\frac{1}{x}\right)^{r_{\sigma+1,\varkappa}+1} \mathfrak{P}_{\varkappa 1}\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots$$
$$+ x^{\tau_{n-1}}\left(\frac{1}{x}\right)^{r_{\sigma+1,\varkappa}+n-1} \mathfrak{P}_{\varkappa, n-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo die $\mathfrak{P}_\varkappa, \overline{\mathfrak{P}}_\varkappa, \mathfrak{P}_{\varkappa 0}, \cdots \mathfrak{P}_{\varkappa, n-1}$ gewöhnliche Potenzreihen bedeuten, von denen $\overline{\mathfrak{P}}_\varkappa$ für $x = \infty$ sicher von Null verschieden ist. Es muss folglich

$$\tau_0 \leqq \varrho, \quad \tau_1 \leqq \varrho + 1, \quad \tau_2 \leqq \varrho + 2, \cdots \tau_{n-1} \leqq \varrho + n - 1$$

sein, wir können also im Allgemeinen

(21) $$\tau_\varkappa = \varrho + \varkappa$$

nehmen.

Die ganzen Functionen $h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$ enthalten somit

$$n(\varrho + 1) + \frac{n(n-1)}{2}$$

Coefficienten, zwischen denen zufolge der ϱ ausserwesentlichen singulären Punkte, für welche $g(x)$ verschwindet,

$$(n-1)\varrho$$

homogene lineare Bedingungsgleichungen stattfinden, so dass also nur noch

$$n + \varrho + \frac{n(n-1)}{2}$$

dieser Coefficienten verfügbar bleiben. Wir haben jetzt noch die Bedingungen dafür aufzustellen, dass auch für die im Endlichen gelegenen wesentlichen singulären Punkte Uebereinstimmung der Wurzeln der determinirenden Gleichungen von (A) und (B) stattfindet.

Setzen wir in (20) für y die Elemente des zu $x = a_\varkappa$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems von (A)

$$\mathfrak{y}_{\varkappa i} = (x - a_\varkappa)^{r_{\varkappa i}} \mathfrak{P}_i(x | a_\varkappa) \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

ein, so erhalten wir in der Umgebung von $x = a_\varkappa$

$$(x - a_\varkappa)^{r_{\varkappa i}} \overline{\mathfrak{P}}_i(x|a_\varkappa) = [h_0(a_\varkappa) + h_0'(a_\varkappa)(x - a_\varkappa) + \cdots](x - a_\varkappa)^{r_{\varkappa i}} \mathfrak{P}_i(x|a_\varkappa)$$
$$+ [h_1(a_\varkappa) + h_1'(a_\varkappa)(x - a_\varkappa) + \cdots](x - a_\varkappa)^{r_{\varkappa i}-1} \mathfrak{P}_{i1}(x|a_\varkappa) + \cdots$$
$$+ [h_{n-1}(a_\varkappa) + h_{n-1}'(a_\varkappa)(x - a_\varkappa) + \cdots](x - a_\varkappa)^{r_{\varkappa i}-n+1} \mathfrak{P}_{i, n-1}(x|a_\varkappa)$$
$$(i = 1, 2, \cdots n),$$

wo die $\mathfrak{P}_i, \overline{\mathfrak{P}}_i, \cdots \mathfrak{P}_{i,n-1}$ gewöhnliche Potenzreihen bedeuten, die für $x = a_\varkappa$ nicht verschwinden. Es müssen folglich auf den rechten Seiten dieser Gleichungen die Coefficienten der Potenzen

$$(x - a_\varkappa)^{r_{\varkappa i} - n + 1}, \quad (x - a_\varkappa)^{r_{\varkappa i} - n + 2}, \cdots (x - a_\varkappa)^{r_{\varkappa i} - 1}$$

verschwinden. Dies giebt für jeden Werth von i $n - 1$ lineare homogene Gleichungen zwischen den

$$h_\lambda^{(\mu)}(a_\varkappa) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n-1; \ \mu = 0, 1, \cdots \lambda - 1),$$

so dass wir also im Ganzen $n(n-1)$ homogene Gleichungen zwischen diesen

$$\frac{n(n-1)}{2} = n_2$$

Grössen erhalten. Diese Gleichungen lassen, da sie homogen sind, stets eine Auflösung zu, es kommen folglich nur n_2 von einander unabhängige derselben in Betracht.

Entsprechend den σ wesentlich singulären Punkten $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ haben also die Coefficienten der ganzen Functionen $h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$ im Ganzen

$$\frac{n(n-1)}{2} \sigma$$

homogene lineare Bedingungsgleichungen zu erfüllen. Es bleiben somit noch

$$n + \varrho - (\sigma - 1) \frac{n(n-1)}{2}$$

Constanten verfügbar, wobei zu bemerken ist, dass diese Anzahl mindestens gleich Eins sein muss, da die Multiplication von y mit einem constanten Factor jederzeit freisteht. Es muss also, in Uebereinstimmung mit dem durch die Constantenzählung in der Differentialgleichung gefundenen Resultate, die Anzahl ϱ der einfach zu zählenden ausserwesentlich singulären Stellen

$$\text{(22)} \qquad \varrho \geqq 1 - n + (\sigma - 1) \frac{n(n-1)}{2} = \varrho_0$$

sein (Ungleichung (18) S. 383).

Wenn die Differentialgleichung (A) genau $\varrho_0 + \nu$ einfach zu zählende ausserwesentlich singuläre Stellen besitzt, so verbleiben also in den Coefficienten der $h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$ noch $\nu + 1$ willkürliche Constanten, und zwar hängen die $h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$ linear homogen von diesen willkürlichen Parametern ab.

Wenn wir diese $\nu + 1$ Constanten unbestimmt lassen, so stellt uns der Ausdruck (20) stets die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung (B) dar, die mit (A) zur selben Classe

gehört und für welche, wie verlangt wurde, die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen für die wesentlich singulären Punkte dieselben sind wie bei (A), und umgekehrt erhalten wir auf diese Weise auch alle Differentialgleichungen von der gedachten Beschaffenheit.

Zufolge der Fuchs'schen Beziehung (vergl. die Gleichung (13) S. 376) ist bei $\varrho = \varrho_0 + \nu$ einfach zu zählenden ausserwesentlich singulären Stellen

(23) $$r = \sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1} \sum_{i=1}^{n} r_{\varkappa i} = (\sigma - 1) \frac{n(n-1)}{2} - \varrho,$$

also mit Rücksicht auf (22)

(24) $$r = n - 1 - \nu.$$

Hieraus schliessen wir zunächst, dass für Differentialgleichungen (B) die Anzahl der ausserwesentlich singulären Stellen ebenfalls gleich ϱ sein muss, so lange die $\nu + 1$ Constanten in den $h_0, h_1, \cdots h_{n-1}$ unbestimmt bleiben.

Wir können über diese $\nu + 1$ Constanten aber so disponiren, dass in den Entwickelungen gewisser unter den Ausdrücken

$$h_0 \mathfrak{y}_{\varkappa i} + h_1 \mathfrak{y}'_{\varkappa i} + \cdots + h_{n-1} \mathfrak{y}^{(n-1)}_{\varkappa i} \qquad \binom{\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma+1}{i = 1, 2, \cdots n}$$

die Anfangsglieder wegfallen. Dadurch, dass wir in einem dieser Ausdrücke ein Anfangsglied zum Verschwinden bringen, verringern wir die Anzahl der willkürlichen Constanten um Eins und vermehren dagegen die Summe

$$\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1} \sum_{i=1}^{n} s_{\varkappa i} = s$$

der Wurzeln aller zu wesentlichen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen von (B) mindestens um eine Einheit. Entsprechend vermindert sich dann die Anzahl der einfach zu zählenden ausserwesentlich singulären Stellen von (B) mindestens um eine Einheit, da die Summe $r + \varrho$ stets den unveränderlichen Werth

$$(\sigma - 1) \frac{n(n-1)}{2}$$

behalten muss. Indem wir über ν von den $\nu + 1$ Constanten auf solche Weise disponiren, erhalten wir eine Differentialgleichung (B), für welche die Wurzelsumme s mindestens gleich

$$s = r + \nu$$

und die Anzahl $\overline{\varrho}$ der einfach zu zählenden ausserwesentlich singulären

Stellen höchstens gleich

$$\bar{\varrho} = \varrho_0$$

geworden ist. Diese Differentialgleichung (B) ist dann eindeutig bestimmt, d. h. wir haben den Satz:

Unter den mit (A) zur selben Classe gehörigen Differentialgleichungen lassen sich stets solche aussondern, die ein gewisses Minimum von ausserwesentlichen singulären Stellen besitzen. Ist (B) eine solche Differentialgleichung, so giebt es innerhalb der Classe keine zweite, die die gleiche Anzahl von einfach zu zählenden ausserwesentlich singulären Stellen und dieselben Wurzeln der zu den wesentlich singulären Stellen gehörigen determinirenden Gleichungen hat wie (B).

227. **Formulirung zweier verschiedener Probleme, die für die Riemann'sche P-Function zusammenfallen. Contigue Functionen.**

Wenn die Gruppe Θ oder genauer die Fundamentalsubstitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma$$

gegeben sind, und es giebt eine Differentialgleichung (A), die die willkürlich vorgeschriebenen Stellen

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma$$

und $x = \infty$ zu wesentlich singulären Stellen und die $A_1, A_2, \cdots A_\sigma$ als zugehörige Fundamentalsubstitutionen hat, so muss ϱ mindestens gleich $\sigma - 2$ sein. In diesem Falle wird also die Differentialgleichung (B) mit dem Minimum von ausserwesentlich singulären Stellen genau ϱ_0 solcher einfach zu zählender Stellen haben. Wenn die $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ nicht willkürlich, sondern geeignet gewählt sind, so kann die Minimalzahl der ausserwesentlich singulären Stellen unter ϱ_0 herabsinken, sie kann nämlich (vergl. Nr. 225, S. 383) gleich oder grösser wie

$$\varrho_0 - \sigma + 2$$

werden, so lange die Fundamentalsubstitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\sigma$ ganz willkürlich gewählt sind; sie kann sich endlich auf eine noch kleinere Zahl bis Null einschliesslich reduciren, wenn für $n > 2$ zwischen den Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen Beziehungen bestehen.

Die Frage, ob Differentialgleichungen von der Form (A) angebbar sind, wenn die Fundamentalsubstitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma$$

willkürlich vorgeschrieben werden, kommt im Wesentlichen auf die

analoge Existenzfrage für den Fall, wo die projective Monodromiegruppe gegeben ist, zurück. Wir können dieselbe also für Differentialgleichungen zweiter Ordnung ohne ausserwesentlich singuläre Stellen und mit reellen Wurzeln der zu den wesentlich singulären Stellen gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen durch die Untersuchungen der Nummern 211—216 als erledigt ansehen.

Von wesentlich anderer Natur ist die Frage, ob es Differentialgleichungen (A) giebt, für welche nicht nur die Fundamentalsubstitutionen, sondern auch die Lage der wesentlich singulären Stellen

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$$

willkürlich gegeben ist. Um dieser Frage näher zu treten, muss man die Art der Abhängigkeit der Integrale einer Differentialgleichung (A) von der Lage jener Stellen (von denen man ein für allemal

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

nehmen kann) eingehend untersuchen, insbesondere wird dabei die Art der Abhängigkeit der Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen von den $a_3, a_4, \cdots a_\sigma$ von hervorragender Wichtigkeit sein. Die Einsicht, die wir uns durch die Betrachtungen des zweiten Kapitels des siebenten Abschnittes (Bd. I, S. 378 ff.) in die Natur dieser Abhängigkeit verschafft haben, reicht zur Erledigung der aufgeworfenen Frage nicht hin; man wird vorläufig nur durch geeignete Specialisirung des Problems eine Förderung desselben erwarten können.

Da ist es denn der einfachste Fall, der zunächst in Betracht gezogen werden muss und auf den in den letzten Jahren Herr Fuchs durch seine auf denselben bezüglichen tiefen Untersuchungen die Aufmerksamkeit gelenkt hat, der Fall nämlich, wo die Parameter der Monodromiegruppe unabhängig sind von der Lage der singulären Punkte. Ehe wir die Darlegung der Fuchs'schen Untersuchungen in ihrer vollen Allgemeinheit in Angriff nehmen, haben wir noch eines besonderen Falles Erwähnung zu thun, der uns schon vielfach beschäftigt hat und noch vielfach beschäftigen wird; es ist der Fall

$$n = 2, \quad \sigma = 2.$$

Specialisiren wir zunächst auf $n = 2$, so ist in Uebereinstimmung mit dem bei der Betrachtung der projectiven Monodromiegruppe gefundenen Ergebnisse, im Sinne der Constantenzählung, eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ohne ausserwesentlich singulären Punkt möglich, die σ vorgeschriebene Fundamentalsubstitutionen besitzt; die Lage der $\sigma - 2$ singulären Punkte

$$a_3, a_4, \cdots a_\sigma$$

ist dann vollkommen festgelegt, wenn man

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

wählt. Das zweite Problem, wo nebst den Fundamentalsubstitutionen auch noch die Lage der wesentlichen singulären Punkte willkürlich vorgeschrieben wird, erfordert das Auftreten von mindestens

$$\varrho_0 = \sigma - 2$$

einfach zu zählenden ausserwesentlichen singulären Stellen. Wir haben gezeigt, dass innerhalb der durch Angabe der Fundamentalsubstitutionen und der wesentlichen singulären Stellen bestimmten Classe die Differentialgleichung mit $\sigma - 2$ ausserwesentlich singulären Stellen eindeutig festgelegt ist, wenn noch die, durch die Fundamentalsubstitutionen nur abgesehen von ganzen Zahlen bestimmten Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen genau gegeben werden. Die Gesammtsumme r dieser Wurzeln ist dann

$$r = \sigma - 1;$$

wenn mehr wie $\sigma - 2$ ausserwesentlich singuläre Stellen zugelassen werden, so ist r entsprechend kleiner als $\sigma - 1$.

Die beiden Probleme, die für $\sigma > 2$ von wesentlich verschiedener Natur sind, fallen zusammen, wenn $\sigma = 2$ genommen wird.

Dieser Fall ist es, den Riemann in seiner Abhandlung „Ueber die durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen“ behandelt. In demselben ist die Anzahl der Parameter der Monodromiegruppe gleich

$$n^2(\sigma - 1) + 1 = 5;$$

wir können z. B. die sechs Wurzeln der zu den wesentlich singulären Punkten 0, 1, ∞ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen

$$\lambda, \lambda'; \quad \nu, \nu'; \quad \mu, \mu',$$

zwischen denen dann noch die Beziehung

$$\lambda + \lambda' + \nu + \nu' + \mu + \mu' = 1 - \varrho$$

bestehen muss, wenn ϱ die Anzahl der ausserwesentlich singulären Stellen bedeutet, als diese fünf Parameter ansehen. Da $\varrho_0 = 0$ ist, so kann es auch Differentialgleichungen der verlangten Art ohne ausserwesentlich singuläre Stellen geben; dann ist also die Wurzelsumme

$$\lambda + \lambda' + \mu + \mu' + \nu + \nu' = 1,$$

und wir kommen zu der Riemann'schen P-Function, wie sie in der Nr. 70 (Bd. I, S. 250 ff.) definirt worden ist.

Die von Riemann für diese seine Function aufgestellten Sätze ergeben sich nun als specielle Fälle aus unserer allgemeinen Theorie

Riemann nennt die $\lambda, \lambda', \mu, \mu', \nu, \nu'$ die Exponenten der Function

$$P\begin{pmatrix}\lambda & \mu & \nu & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & x\end{pmatrix}$$

und sagt von den Elementen der zu den einzelnen wesentlich singulären Punkten gehörigen canonischen Fundamentalsysteme, sie seien die zu den bezüglichen Exponenten gehörigen Bestandtheile der P-Function. Dann haben wir zufolge des Satzes der Nr. 226 (S. 388) das von Riemann in der Nr. 4 seiner Abhandlung aufgestellte Theorem:

In zwei P-Functionen mit gleichen Exponenten unterscheiden sich die zu denselben Exponenten gehörigen Bestandtheile nur durch einen constanten Factor.

Aus dem Classenbegriffe folgt ferner der Satz der Nr. 7 von Riemann's Arbeit:

Sämmtliche P-Functionen, deren entsprechende Exponenten sich um ganze Zahlen unterscheiden, lassen sich in zwei beliebige von ihnen linear mit rationalen Functionen von x als Coefficienten ausdrücken.

Aus diesem Satze folgt bei Riemann die Differentialgleichung für die P-Function (vergl. Nr. 70, Bd. I, S. 252), und damit ist auch der Existenzbeweis geliefert, wenn man, wie Riemann es thut, die P-Function nur durch ihre Eigenschaften definirt, nämlich dadurch, dass

1) P für alle Werthe von x, ausser 0, 1, ∞, regulär ist,
2) zwischen je drei Zweigen der Function P eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten besteht,
3) P in der Umgebung von $x = 0, \infty, 1$ in der Form darstellbar ist:

$$\begin{aligned} P &= c_{11}x^{\lambda}\mathfrak{P}_{11}(x) + c_{12}x^{\lambda'}\mathfrak{P}_{12}(x), \\ &= c_{31}\left(\frac{1}{x}\right)^{\mu}\mathfrak{P}_{31}\left(\frac{1}{x}\right) + c_{32}\left(\frac{1}{x}\right)^{\mu'}\mathfrak{P}_{32}\left(\frac{1}{x}\right), \\ &= c_{21}(x-1)^{\nu}\mathfrak{P}_{21}(x-1) + c_{22}(x-1)^{\nu'}\mathfrak{P}_{22}(x-1), \end{aligned}$$

wo die $c_{i\varkappa}$ Constanten, die $\mathfrak{P}_{i\varkappa}$ für verschwindende Werthe des Argumentes von Null verschiedene gewöhnliche Potenzreihen bedeuten.

Die aus der Gauss'schen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ entspringende P-Function ist (vergl. Nr. 70, 71)

$$\text{(I)} \qquad P\begin{pmatrix}0 & \alpha & \gamma-\alpha-\beta & \\ 1-\gamma & \beta & 0 & x\end{pmatrix};$$

daraus folgt sofort, dass die P-Functionen, welche aus den zu $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ contiguen Reihen (Nr. 75, Bd. I, S. 268) entspringen,

n besitzen, die sich von denen der Function (I) nur um ganze terscheiden. Die Gauss'schen Beziehungen zwischen je dreien inander contiguen Functionen sind also Specialfälle der zu es letzterwähnten Riemann'schen Satzes bestehenden Be- en zwischen P-Functionen, deren Exponenten um ganze Zahlen ander verschieden sind. Die Art, wie Riemann aus diesen nen die Differentialgleichung der P-Function herstellt, ist auch ine Verallgemeinerung des Verfahrens, mit Hülfe dessen Gauss r zweiten (nachgelassenen) Arbeit über die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ Differentialgleichung für dieselbe aus den „relationes inter func- es contiguas“ ableitet.

Allgemein hätte man als das Analogon der contiguen Functionen Lösungen von Differentialgleichungen derselben Classe und mit der eichen Anzahl von einfach zu zählenden ausserwesentlichen singulären tellen zu betrachten.

Die Differentialgleichungen, die mit der Differentialgleichung der Function

$$P\begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu & x \\ \lambda' & \mu' & \nu' & \end{pmatrix}$$

zur selben Classe gehören, können im Allgemeinen noch beliebig viele ausserwesentlich singuläre Punkte enthalten. Ihre Lösungen sind dann P-Functionen allgemeinerer Art. Einen besonderen Fall solcher verallgemeinerten P-Functionen hat Riemann gelegentlich in der von Hattendorf herausgegebenen Abhandlung „über die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begränzung“ in Betracht gezogen. Es ist dies eine Function, die, wie wir kurz sagen können, mit der gewöhnlichen P-Function

$$\text{(II)} \qquad P\begin{pmatrix} 0 & \frac{-\alpha-\beta-\gamma+1}{2} & 0 & x \\ \alpha & \frac{-\alpha+\beta-\gamma+1}{2} & \gamma & \end{pmatrix}$$

zur selben Classe gehört, und für welche die Exponentensumme n Eins, sondern -1 ist. Riemann bezeichnet dieselbe durch

$$Q\begin{pmatrix} 0 & \frac{-\alpha-\beta-\gamma-1}{2} & 0 & x \\ \alpha & \frac{-\alpha+\beta-\gamma-1}{2} & \gamma & \end{pmatrix}$$

und zeigt, dass sie sich durch die Function (II) und deren e leitung homogen linear mit ganzen Coefficienten darstellen läs

Die lineare Differentialgleichung mit den wesentlichen s Stellen a, b, c, der die allgemeine Riemann'sche P-Functio

$$P\begin{pmatrix} a & b & c & \\ \lambda & \mu & \nu & x \\ \lambda' & \mu' & \nu' & \end{pmatrix}$$

genügt, ist so beschaffen, dass die Parameter ihrer Monodromiegruppe unabhängig sind von der Lage der Punkte a, b, c. Wir wenden uns nun zu den allgemeinen Untersuchungen von Herrn Fuchs über lineare Differentialgleichungen, deren Monodromiegruppe von gewissen in den Coefficienten auftretenden Parametern unabhängig ist; bei denselben werden die Untersuchungen des zehnten Abschnittes, besonders die der Nr. 175, in höchst merkwürdiger Weise zur Anwendung kommen.

Neuntes Kapitel.

228. Differentialgleichungen, deren Monodromiegruppe von einem in den Coefficienten auftretenden Parameter unabhängig ist. Sätze von Fuchs.

Sei die lineare homogene Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0$$

vorgelegt, deren Coefficienten wir vorläufig als eindeutige Functione von x voraussetzen. Möge ferner t ein Parameter sein, von dem di Coefficienten $p_1, \cdots p_n$ so abhängen, dass sie innerhalb eines gewisse Gebietes von x, t monogene analytische Functionen dieser beide Variabeln sind.

Wir nehmen nun an, dass ein Fundamentalsystem

$$y_1, y_2, \cdots y_n$$

von (A) existirt, welches die Eigenschaft hat, dass die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen und also auch die jeder Substitution der Monodromiegruppe Θ, die zu jenem Fundamentalsysteme gehört, von dem Parameter t unabhängig sind. Wir sagen dann kurz, die Monodromiegruppe der Differentialgleichung (A) sei von t unabhängig.

Wenn sich für einen geschlossenen Umlauf $\mathfrak{U}$ von x das Integral $y_\varkappa(x, t)$ in

$$\text{(1)} \qquad \Theta y_\varkappa = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\varkappa i} y_i \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

verwandelt, so sind also die $\alpha_{\varkappa i}$ von x und von t unabhängige Grössen.

Nach den Ergebnissen der Nummern 85 und 106 (Band I) sind die Integrale von (A) monogene analytische Functionen von t; wenn wir also in den Coefficienten von (A) an Stelle von t setzen

$$t + \delta t,$$

wo δt eine Grösse bedeutet, deren absoluter Betrag eine gewisse Grenze

nicht überschreitet, so verwandelt sich (A) in eine Differentialgleichung $(\overline{A})$, für welche die Ausdrücke

$$y_\varkappa(x, t + \delta t) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

ein Fundamentalsystem darstellen. Lassen wir x wiederum den Umlauf $\mathfrak{U}$ vollziehen, so ist gemäss unserer Voraussetzung

$$(2) \qquad \Theta y_\varkappa(x, t + \delta t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\varkappa i} y_i(x, t + \delta t) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

also folgt durch Subtraction der Gleichungen (2), (1) und nach Division durch δt

$$\Theta \left\{ \frac{y_\varkappa(x, t + \delta t) - y_\varkappa(x, t)}{\delta t} \right\} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\varkappa i} \frac{y_i(x, t + \delta t) - y_i(x, t)}{\delta t},$$

und wenn wir hierin δt gegen Null convergiren lassen,

$$(3) \qquad \Theta \left(\frac{\partial y_\varkappa(x, t)}{\partial t} \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\varkappa i} \frac{\partial y_i(x, t)}{\partial t} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n).$$

So lange t innerhalb gewisser Grenzen bleibt, haben die Functionen

$$\frac{\partial y_1}{\partial t}, \ \frac{\partial y_2}{\partial t}, \cdots \frac{\partial y_n}{\partial t},$$

als Functionen von x betrachtet, keine anderen Singularitäten, wie die

$$y_1, \ y_2, \cdots y_n$$

selbst. Dieselben bilden folglich im Sinne der Nr. 163 (S. 112) ein mit dem Systeme $[y_\varkappa]$ cogredientes Functionssystem, und nach den Ergebnissen jener Nummer besteht demnach eine Gleichung von der Form

$$(4) \qquad \frac{\partial y_\varkappa}{\partial t} = R_0 y_\varkappa + R_1 \frac{\partial y_\varkappa}{\partial x} + R_2 \frac{\partial^2 y_\varkappa}{\partial x^2} + \cdots + R_{n-1} \frac{\partial^{n-1} y_\varkappa}{\partial x^{n-1}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo die $R_0, R_1, \cdots R_{n-1}$ eindeutige Functionen von x sind.

Wenn umgekehrt von der Differentialgleichung (A) bekannt ist, dass ein Fundamentalsystem $[y_\varkappa]$ derselben Gleichungen von der Form (4) befriedigt, so bestehen offenbar für jeden Umlauf $\mathfrak{U}$ von x die Gleichungssysteme (1) und (3) gleichzeitig. Es ist dann leicht einzusehen, dass die $\alpha_{\varkappa i}$ von t unabhängig sein müssen.

In der That folgt durch Differentiation der Gleichungen (1) nach t

$$\frac{\partial \Theta y_\varkappa}{\partial t} = \Theta \left(\frac{\partial y_\varkappa}{\partial t} \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\varkappa i} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{\varkappa i}}{\partial t} y_i \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

also durch Subtraction von (3)

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{\varkappa i}}{\partial t} y_i \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n).$$

Da aber die $\alpha_{\varkappa i}$ von x unabhängig sind und die $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem constituiren, muss, wie behauptet wurde,

$$\frac{\partial \alpha_{\varkappa i}}{\partial t} = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

sein. Wir haben also den Satz:

Das Bestehen von Gleichungen von der Form (4) ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass die zum Fundamentalsysteme $[y_\varkappa]$ gehörige Monodromiegruppe Θ von dem in den Coefficienten der Differentialgleichung (A) auftretenden Parameter t unabhängig ist.

Es möge von nun ab vorausgesetzt werden, dass die Differentialgleichung (A) zur Fuchs'schen Classe gehört.

Die Functionen

$$\frac{\partial y_1}{\partial t}, \ \frac{\partial y_2}{\partial t}, \ \cdots \ \frac{\partial y_n}{\partial t},$$

von denen bereits hervorgehoben wurde, dass ihre Singularitäten mit denen der Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ übereinstimmen, befriedigen die nicht homogene lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(5) \qquad \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \cdots + p_n \frac{\partial y}{\partial t}$$
$$= -\frac{\partial p_1}{\partial t}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} - \frac{\partial p_2}{\partial t}\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} - \cdots - \frac{\partial p_n}{\partial t} y,$$

die aus (A) durch Differentiation nach t hervorgeht. Sei $x = a$ ein singulärer Punkt von (A) und $\mathfrak{y}_\varkappa$ ein Element des zu $x = a$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems, welches, wie wir der Einfachheit wegen voraussetzen wollen, in Reihenform

$$\mathfrak{y}_\varkappa = (x-a)^r \mathfrak{P}(x|a), \quad \mathfrak{P}(a|a) \neq 0,$$

darstellbar ist. Dann ist, wenn wir in (5) $\mathfrak{y}_\varkappa$ an die Stelle von y einsetzen, die rechte Seite dieser Gleichung so beschaffen, dass sich ihre logarithmische Ableitung in der Umgebung von $x = a$ wie eine rationale Function verhält, und dass sie selbst in der Form

$$(x-a)^\mu \bar{\mathfrak{P}}(x|a), \quad \bar{\mathfrak{P}}(a|a) \neq 0$$

darstellbar ist, wo μ eine Constante bedeutet. Aus dem Satze der

Nr. 58 (Bd. I, S. 207) folgt demnach, dass der Punkt $x = a$ für die Function

$$\frac{\partial \mathfrak{y}_x}{\partial t}$$

eine Stelle der Bestimmtheit ist.

Wir schliessen hieraus, dass, wenn y das allgemeine Integral der Differentialgleichung (A) bedeutet, auch die Function

$$\frac{\partial y}{\partial t}$$

als Function von x sich allenthalben bestimmt verhält.

Es gehören folglich die Functionssysteme

$$\left[\frac{\partial y_x}{\partial t}\right] \quad \text{und} \quad [y_x]$$

zur selben Classe im Sinne von Riemann (Nr. 222, S. 368), die Coefficienten $R_0, R_1, \cdots R_{n-1}$ in den Gleichungen (4) sind also in diesem Falle rationale Functionen von x.

229. System von linearen Differentialgleichungen, welches rationale Particularlösungen besitzen muss.

Die Bedingungen dafür, dass die Differentialgleichung (A) die durch die Gleichungen (4) charakterisirte Eigenschaft besitzt, lassen sich in folgender Weise darstellen.

Bezeichnen wir mit $P(y)$ die linke Seite der Differentialgleichung (A) und mit $R(y)$ die rechte Seite von (4), also

$$P(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y,$$
$$R(y) = R_0 y + R_1 y' + \cdots + R_{n-1} y^{(n-1)},$$

so lautet die Differentialgleichung (5)

(5a) $$P\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial t} y^{(n-1)} + \frac{\partial p_2}{\partial t} y^{(n-2)} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial t} y = 0.$$

Sei

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

ein willkürliches Integral von (A), so können die $c_1, c_2, \cdots c_n$ noch als Functionen von t gewählt werden. Es ist also

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{x=1}^{n} \frac{\partial c_x}{\partial t} y_x + \sum_{x=1}^{n} c_x \frac{\partial y_x}{\partial t},$$

und da nach (4)

$$\frac{\partial y_x}{\partial t} = R(y_x)$$

ist, so finden wir

$$(6)\qquad P\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = P\left(\sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa R(y_\varkappa)\right) = PR(y),$$

da ja offenbar

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\partial c_\varkappa}{\partial t} y_\varkappa$$

eine Lösung von (A) darstellt.

Es besteht demnach für ein willkürliches Integral y von (A) die Gleichung

$$(7)\qquad PR(y) + \frac{\partial p_1}{\partial t} y^{(n-1)} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial t} y = 0.$$

Bedeuten u, v zwei willkürliche Functionen von x, so ist

$$P(uv) = \sum_{\varkappa=0}^{n} u^{(n-\varkappa)}[n_\varkappa v^{(\varkappa)} + (n-1)_{\varkappa-1} p_1 v^{(\varkappa-1)} + (n-2)_{\varkappa-2} p_2 v^{(\varkappa-2)} + \cdots + (n-\varkappa+1) p_{\varkappa-1} v' + p_\varkappa v];$$

wir finden also

$$(8)\qquad P(R_\varkappa y^{(\varkappa)}) = \sum_{\lambda=0}^{n} R_\varkappa^{(n-\lambda)}[n_\lambda y^{(\varkappa+\lambda)} + (n-1)_{\lambda-1} p_1 y^{(\varkappa+\lambda-1)} + \cdots + (n-\lambda+1) p_{\lambda-1} y^{(\varkappa+1)} + p_\lambda y^{(\varkappa)}].$$

Sei nunmehr

$$z_1, z_2, \cdots z_n$$

das zu $[y_i]$ adjungirte Fundamentalsystem, so erhalten wir unter Benutzung der in der Nr. 23 (Bd. I, S. 63) eingeführten Bezeichnungen aus (8), wenn wir in diese Gleichung y_i für y einsetzen, mit

$$\frac{d^\mu z_i}{dx^\mu} = z_i^{(\mu)}$$

multipliciren und in Bezug auf i summiren:

$$(9)\qquad \sum_{i=1}^{n} z_i^{(\mu)} P(R_\varkappa y_i^{(\varkappa)}) = \sum_{\lambda=0}^{n} R_\varkappa^{(n-\lambda)}[n_\lambda s_{\varkappa+\lambda,\mu} + (n-1)_{\lambda-1} p_1 s_{\varkappa+\lambda-1,\mu} + \cdots + (n-\lambda+1) p_{\lambda-1} s_{\varkappa+1,\mu} + p_\lambda s_{\varkappa,\mu}] = Q_\mu(R_\varkappa).$$

Zufolge des Appell'schen Satzes sind (vergl. Nr. 169, S. 138 und Nr. 23, Bd. I, S. 63) die Ausdrücke

$$s_{\alpha,\beta} = \sum_{\varkappa=1}^{n} y_\varkappa^{(\alpha)} z_\varkappa^{(\beta)}$$

rationale Functionen von x; die $Q_\mu(R_\varkappa)$ sind demnach lineare

Differentialausdrücke der R_x mit in x rationalen Coefficienten.

Setzen wir nunmehr in der Gleichung (7) an die Stelle von y die Integrale y_i, multipliciren mit $z_i^{(\mu)}$ und summiren in Bezug auf i, so erhalten wir mit Rücksicht auf (9) die Gleichung

$$(10)\quad Q_\mu(R_0) + Q_\mu(R_1) + \cdots + Q_\mu(R_{n-1}) + \frac{\partial p_1}{\partial t} s_{n-1,\mu} + \frac{\partial p_2}{\partial t} s_{n-2,\mu} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial t} s_{0,\mu} = 0.$$

Diese Gleichung liefert für

$$\mu = 0, 1, 2, \cdots n-1$$

ein System von linearen Differentialgleichungen für die $R_0, R_1, \cdots R_{n-1}$.

Wenn die Differentialgleichung (A) die durch die Gleichungen (4) charakterisirte Eigenschaft haben soll, so müssen die Differentialgleichungen (10) ein System von Particularintegralen besitzen, die rationale Functionen von x sind.

230. Differentialgleichungen gerader ($2m^{\text{ter}}$) Ordnung. Satz von Fuchs über die Reductibilität der m^{ten} Associirten.

Wir greifen nunmehr auf die Untersuchungen der Nummern 171 und 175 zurück und setzen demgemäss im Folgenden voraus, dass die Ordnung der Differentialgleichung (A) eine gerade Zahl

$$n = 2m$$

sei. Es wird sich dann vorwiegend um die Untersuchung der m^{ten} associirten Differentialgleichung $(A^{(m)})$ von (A) handeln, deren Ordnung ν gleich

$$\nu = (2m)_m$$

ist, und für welche

$$u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}$$

das dem Fundamentalsysteme $[y_x]$ von (A) entsprechende Fundamentalsystem (im Sinne der Nr. 168, S. 130) bedeutet.

Da die Monodromiegruppe der Differentialgleichung $(A^{(m)})$ aus den m^{ten} associirten Substitutionen der Monodromiegruppe Θ von (A) gebildet wird (Nr. 169, S. 136), so schliessen wir unmittelbar, dass, wenn Θ von dem Parameter t unabhängig ist, dies auch für die Monodromiegruppe von $(A^{(m)})$ der Fall sein wird; d. h. die Integrale

$$u_{12}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}$$

befriedigen die den Gleichungen (4) analogen Gleichungen

$$(11)\qquad \frac{\partial u_{1\lambda}}{\partial t} = C_0 u_{1\lambda} + C_1 u'_{1\lambda} + \cdots + C_{\nu-1} u_{1\lambda}^{(\nu-1)} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \nu),$$

deren Coefficienten $C_0, C_1, \cdots C_{\nu-1}$ rationale Functionen von x sind. Diese Gleichungen lassen sich übrigens auch direct herleiten, indem man die Gleichungen (4) nach x differentiirt, die Ableitungen höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der y_x wegschafft, die so gefundenen Werthe in die Ausdrücke der

$$\frac{\partial u_{1\lambda}}{\partial t}$$

einsetzt und die Gleichungen (α), (β) der Nr. 167 (S. 127, 129) benutzt.

Bilden wir die quadratische Form (20) der Nr. 170 (S. 142)

$$Z = \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} \sum_{\beta=0}^{\nu-1} P_{\alpha\beta} u^{(\alpha)} u^{(\beta)}, \quad P_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha},$$

so reducirt sich dieselbe, wie a. a. O. gezeigt wurde, auf

$$\text{const.}\, e^{-\int p_1 dx},$$

wenn wir darin u gleich einem der Integrale $u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\nu}$ nehmen.

Um die Ergebnisse der Nummer 175 (S. 157 ff.) unmittelbar anwenden zu können, müssten wir von der Differentialgleichung (A) zu der canonischen Form ($\mathfrak{A}$), in welcher das Glied mit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung fehlt, übergehen. Es ist aber zweckmässiger, wenn wir die Gleichung (A) in ihrer allgemeinen Gestalt beibehalten und nur auf die abhängige Variable u der m^{ten} associirten Differentialgleichung die Transformation

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx}\, \mathfrak{u}$$

anwenden, wodurch dieselbe in eine Differentialgleichung

$$(\mathfrak{A}^{(m)})\qquad \frac{d^\nu \mathfrak{u}}{dx^\nu} + \mathfrak{R}_1 \frac{d^{\nu-1}\mathfrak{u}}{dx^{\nu-1}} + \cdots + \mathfrak{R}_\nu \mathfrak{u} = 0$$

übergeht.

Diese Differentialgleichung besitzt dann offenbar auch ein Fundamentalsystem

$$\mathfrak{u}_{11}, \mathfrak{u}_{12}, \cdots \mathfrak{u}_{1\nu},$$

dessen Monodromiegruppe von dem Parameter t unabhängig ist und welches folglich ein System von Gleichungen

$$(12)\qquad \frac{\partial \mathfrak{u}_{1\lambda}}{\partial t} = \mathfrak{C}_0 \mathfrak{u}_{1\lambda} + \mathfrak{C}_1 \mathfrak{u}'_{1\lambda} + \cdots + \mathfrak{C}_{\nu-1} \mathfrak{u}_{1\lambda}^{(\nu-1)} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \nu)$$

befriedigt. Die der Form Z analoge Form

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{u}) = \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} \sum_{\beta=0}^{\nu-1} \mathfrak{P}_{\alpha\beta} \mathfrak{u}^{(\alpha)} \mathfrak{u}^{(\beta)}, \quad \mathfrak{P}_{\alpha\beta} = \mathfrak{P}_{\beta\alpha},$$

reducirt sich dann für jedes Integral von $(\mathfrak{A}^{(m)})$ auf eine Constante, oder genauer ausgedrückt, auf eine von x unabhängige Grösse. Wir haben also vollständigen Anschluss an die Voraussetzungen der Nr. 175 gewonnen.

Wir wollen nun die Form $\mathfrak{Z}(\mathfrak{u})$ nach t differentiiren.

Aus (12) ergiebt sich durch Differentiation nach x

$$(13)\qquad \frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{\partial \mathfrak{u}_{1\lambda}}{\partial t}\right) = \mathfrak{C}_{i0} \mathfrak{u}_{1\lambda} + \mathfrak{C}_{i1} \mathfrak{u}'_{1\lambda} + \cdots + \mathfrak{C}_{i,\nu-1} \mathfrak{u}_{1\lambda}^{(\nu-1)},$$

wo die $\mathfrak{C}_{i0}, \mathfrak{C}_{i1}, \cdots \mathfrak{C}_{i,\nu-1}$ rationale Functionen von x bedeuten. Bilden wir also die Form

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{u}) = \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} \sum_{\beta=0}^{\nu-1} \frac{\partial \mathfrak{P}_{\alpha\beta}}{\partial t} \mathfrak{u}^{(\alpha)} \mathfrak{u}^{(\beta)}$$

$$+ \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} \sum_{\beta=0}^{\nu-1} \mathfrak{P}_{\alpha\beta} \{ \mathfrak{u}^{(\beta)} (\mathfrak{C}_{\alpha 0} \mathfrak{u} + \cdots + \mathfrak{C}_{\alpha,\nu-1} \mathfrak{u}^{(\nu-1)}) + \mathfrak{u}^{(\alpha)} (\mathfrak{C}_{\beta 0} \mathfrak{u} + \cdots$$
$$+ \mathfrak{C}_{\beta,\nu-1} \mathfrak{u}^{(\nu-1)}) \},$$

so ist zufolge der Gleichungen (13)

$$(14)\qquad \mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\lambda}) = \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{Z}(\mathfrak{u}_{1\lambda})].$$

Da nun aber der Ausdruck

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{u}_{1\lambda}) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \nu)$$

von x unabhängig ist, so ist zufolge der Gleichung (14) auch

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\lambda}) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \nu)$$

von x unabhängig.

Die $\mathfrak{u}_{1\lambda}$ sind als solche particulare Integrale der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}^{(m)})$ ausgezeichnet, die der Gleichung (12) Genüge leisten. Dieselbe Gleichung wird auch befriedigt durch ein Integral von $(\mathfrak{A}^{(m)})$, welches die Form

$$c_1 \mathfrak{u}_{11} + c_2 \mathfrak{u}_{12} + \cdots + c_\nu \mathfrak{u}_{1\nu}$$

hat, wo $c_1, c_2, \cdots c_\nu$ von x und t unabhängige Grössen bedeuten. Bezeichnen wir dagegen durch f irgend eine bloss von t abhängige Grösse, so ist

$$\frac{\partial (f \mathfrak{u}_{1\lambda})}{\partial t} = \left(\mathfrak{C}_0 f + \frac{df}{dt}\right) \mathfrak{u}_{1\lambda} + \mathfrak{C}_1 f \mathfrak{u}'_{1\lambda} + \cdots + \mathfrak{C}_{\nu-1} f \mathfrak{u}_{1\lambda}^{(\nu-1)}.$$

Setzen wir in $\mathfrak{T}(\mathfrak{u})$ an die Stelle von $\mathfrak{u}$ das Integral $f\mathfrak{u}_{1\lambda}$, so ist

$$\mathfrak{T}(f\mathfrak{u}_{1\lambda}) = f^2\mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\lambda}) = f^2 \frac{d}{dt}\mathfrak{Z}(\mathfrak{u}_{1\lambda}),$$

also auch der Ausdruck

$$\mathfrak{T}(f\mathfrak{u}_{1\lambda})$$

von x unabhängig. Ebenso ist offenbar

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\lambda} + \mathfrak{u}_{1\mu}) \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \cdots \nu)$$

von x unabhängig. Also ist auch

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\lambda}, \mathfrak{u}_{1\mu}) = \frac{\partial \mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\lambda})}{\partial \mathfrak{u}_{1\lambda}} \mathfrak{u}_{1\mu} + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\lambda})}{\partial \mathfrak{u}_{1\lambda}^{(\nu-1)}} \mathfrak{u}_{1\mu}^{(\nu-1)}$$

von x unabhängig, da ja

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\lambda} + \mathfrak{u}_{1\mu}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\lambda}) + \mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\mu}) + \mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\lambda}, \mathfrak{u}_{1\mu})$$

gefunden wird.

Für eine zweite von x unabhängige Grösse g ist aber

$$\mathfrak{T}(f\mathfrak{u}_{1\lambda} + g\mathfrak{u}_{1\mu}) = \mathfrak{T}(f\mathfrak{u}_{1\lambda}) + \mathfrak{T}(g\mathfrak{u}_{1\mu}) + fg\mathfrak{T}(\mathfrak{u}_{1\lambda}, \mathfrak{u}_{1\mu}),$$

also ist auch der Ausdruck

$$\mathfrak{T}(f\mathfrak{u}_{1\lambda} + g\mathfrak{u}_{1\mu})$$

von x unabhängig, d. h. wir haben den Satz:

Die Form $\mathfrak{T}(\mathfrak{u})$ ist ebenso wie $\mathfrak{Z}(\mathfrak{u})$ gleich einer vo[n] unabhängigen Grösse, wenn wir für $\mathfrak{u}$ irgend eine Lösung [der] Differentialgleichung $(\mathfrak{A}^{(m)})$ einsetzen.

Aus dieser Eigenschaft der Form $\mathfrak{T}(\mathfrak{u})$ erschliessen wir nun ge[nau] ebenso, wie in der Nr. 175 (S. 158 ff.) aus der analogen Eigensch[aft] der daselbst betrachteten Form $\mathfrak{Z}(\mathfrak{u})$, dass

$$\frac{\partial \mathfrak{T}(\mathfrak{u})}{\partial \mathfrak{u}^{(\nu-1)}} = \mathfrak{M}_1(\mathfrak{u})$$

einen Multiplicator der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}^{(m)})$, d. h. also e[ine] Lösung der zu $(\mathfrak{A}^{(m)})$ adjungirten Differentialgleichung darstellt, w[enn] man für $\mathfrak{u}$ irgend eine Lösung von $(\mathfrak{A}^{(m)})$ einsetzt. Bedeutet als[o] irgend eine solche Lösung, so haben wir in $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{u})$ und in

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \mathfrak{u}^{(\nu-1)}} = \mathfrak{M}(\mathfrak{u})$$

zwei Lösungen der zu $(\mathfrak{A}^{(m)})$ adjungirten Differentialgleichung, die be[ide] als lineare homogene Differentialausdrücke von höchstens $(\nu - 1)$ Ordnung von $\mathfrak{u}$ mit in x rationalen Coefficienten dargestellt sind.

Auf Grund des am Schlusse der Nr. 175 (S. 163) bewiesen[en] Satzes folgt hieraus, dass die Differentialgleichung $(\mathfrak{A}^{(m)})$ und folgli[ch]

auch die m^{te} associirte Differentialgleichung $(A^{(m)})$ von (A) reductibel sein muss, wenn nicht

$$\mathfrak{M}_1(u) = \text{const.}\ \mathfrak{M}(u)$$

ist. Das letztere ist im Allgemeinen nicht der Fall, wir haben also den wunderbaren von Herrn Fuchs gefundenen Satz:

Wenn die Monodromiegruppe der Differentialgleichung $2m^{ter}$ Ordnung (A) der Fuchs'schen Classe von einem in den Coefficienten von (A) auftretenden Parameter t unabhängig ist, so ist die m^{te} associirte Differentialgleichung von (A) reductibel.

Unter gewissen besonderen Voraussetzungen über die Art, wie die Coefficienten der Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe (A) von dem Parameter t abhängen, kann es sich ereignen, dass, wenn die Monodromiegruppe von (A) von t unabhängig ist, die Coefficienten $R_0, R_1, \cdots R_{n-1}$ der Relation (4) nicht nur rationale Functionen von x, sondern rationale Functionen von x und t sind. Wenn dies der Fall ist, so lassen sich mittelst der Gleichungen (4) und der Differentialgleichung (A) alle partiellen Ableitungen der Integrale $[y_x]$ nach den beiden Variabeln x und t als homogene lineare Functionen der y_x und ihrer $n-1$ Ableitungen

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial y_x}{\partial x}, \frac{\partial^2 y_x}{\partial x^2}, \cdots \frac{\partial^{n-1} y_x}{\partial x^{n-1}}$$

mit in x und t rationalen Coefficienten darstellen, sofern die Coefficienten von (A) auch rationale Functionen von t sind.

Man erhält also insbesondere

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial^\mu y_x}{\partial t^\mu} = R_{\mu 0} y_x + R_{\mu 1} \frac{\partial y_x}{\partial x} + \cdots + R_{\mu, n-1} \frac{\partial^{n-1} y_x}{\partial x^{n-1}} \qquad (x = 1, 2, \cdots n), \quad (\mu = 1, 2, \cdots n)$$

und hieraus ergiebt sich durch Elimination der Grössen (I) eine homogene lineare Differentialgleichung von höchstens n^{ter} Ordnung, der die $[y_x]$ als Functionen von t genügen, und deren Coefficienten rationale Functionen von t und dem jetzt als Parameter fungirenden x sind.

Wenn die Determinante

$$|R_{\mu\nu}| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots n-1)$$

von Null verschieden ist, so ist die Differentialgleichung, der die $[y_x]$ als Functionen von t genügen, wirklich von n^{ter} Ordnung. Dann lassen sich aber aus den Gleichungen (II) die Grössen (I) ausrechnen, d. h. wir erhalten insbesondere

$$\frac{\partial y_x}{\partial x} = \bar{R}_0 y_x + \bar{R}_1 \frac{\partial y_x}{\partial t} + \cdots + \bar{R}_{n-1} \frac{\partial^{n-1} y_x}{\partial t^{n-1}} \qquad (x = 1, 2, \cdots n),$$

und hieraus folgt auf Grund des Satzes der Nr. 228 (S. 396), dass die Monodromiegruppe der linearen Differentialgleichung mit der unabhängigen Variabeln t, der die $[y_x]$ genügen, von dem in den Coefficienten dieser Differentialgleichung auftretenden Parameter x unabhängig ist. Wir haben also den Satz:

Wenn die Coefficienten der Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe (A) den Parameter t rational enthalten und wenn für ein Fundamentalsystem $[y_x]$ die Gleichungen (4) bestehen, deren Coefficienten ebenfalls rational von den beiden Variabeln x und t abhängen, so befriedigen die $[y_x]$ als Functionen von t auch eine lineare homogene Differentialgleichung, deren Ordnung die von (A) nicht übertrifft, und es sind die Coefficienten der Substitutionen, welche die $[y_x]$ bei einem geschlossenen Umlaufe von x erleiden, von t, und die Coefficienten der ebenfalls linearen Substitutionen, die die $[y_x]$ bei einem geschlossenen Umlaufe von t erleiden, von x unabhängig.

Die nun folgenden Untersuchungen werden uns eine ausgedehnte Classe von linearen Differentialgleichungen liefern, die zu der in dem eben ausgesprochenen Theoreme charakterisirten Kategorie gehören.

Zwölfter Abschnitt.

Theorie und Anwendungen der Euler'schen Transformirten.

Erstes Kapitel.

231. Neue Herleitung der Laplace'schen Transformirten. Anwendung der dabei befolgten Methode. Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument.

Wir knüpfen an die auf die Laplace'sche Transformirte bezüglichen Untersuchungen (viertes Kapitel des siebenten Abschnittes, Bd. I) an und wollen zunächst die Herleitung der Nr. 113 (Bd. I, S. 407) in etwas modificirter Form wiedergeben, um einerseits dasjenige, was der Methode von Laplace eigenthümlich ist, und andererseits die Rolle, die der adjungirten Differentialgleichung zufällt, deutlich hervortreten zu lassen.

Die Differentialgleichung (A) werde in derselben Form angenommen, wie in der Nr. 110 (Bd. I, S. 394),

$$(A)\qquad D_x(y) = \sum_{\varkappa=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} C_{i\varkappa} x^i \frac{d^\varkappa y}{dx^\varkappa} = \sum_{\varkappa=0}^{n} P_\varkappa(x) \frac{d^\varkappa y}{dx^\varkappa} = 0,$$

so dass also die Coefficienten

$$P_n(x),\quad P_{n-1}(x), \cdots P_0(x)$$

ganze rationale Functionen m^{ten} Grades (in der Nr. 110 war dieser Grad durch p bezeichnet worden) von x sind; es wird ferner

$$C_{mn} = 1$$

vorausgesetzt.

Bilden wir nun den von x und einem Parameter z abhängigen Ausdruck

$$D_x(e^{zx}) = \sum_{\varkappa=0}^{n} P_\varkappa(x) z^\varkappa e^{zx},$$

so lässt sich derselbe umformen, wenn man beachtet, dass

$$(\alpha)\qquad x^{\varkappa}\frac{\partial^{\varkappa}e^{zx}}{\partial x^{\varkappa}}=z^{\varkappa}\frac{\partial^{\varkappa}e^{zx}}{\partial z^{\varkappa}}$$

ist. Entwickeln wir nämlich die Producte

$$P_{\varkappa}(x)e^{zx}$$

nach den successiven Ableitungen von e^{zx}, d. h. setzen wir

$$e^{zx}P_{\varkappa}(x)=\sum_{i=0}^{m}C_{i\varkappa}\frac{d^{i}e^{zx}}{dz^{i}}=e^{zx}\sum_{i=0}^{m}C_{i\varkappa}x^{i}\qquad(\varkappa=0,1,\cdots n),$$

so ergiebt sich

$$(1)\qquad D_{x}(e^{zx})=\sum_{\varkappa=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}C_{i\varkappa}x^{i}z^{\varkappa}e^{zx}=\varDelta_{z}(e^{zx}),$$

wo $\varDelta_{z}(u)$ den in der Nr. 112 (Bd. I, S. 400) mit $\varDelta(u)$ bezeich linearen homogenen Differentialausdruck m^{ter} Ordnung

$$\varDelta_{z}(u)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{\varkappa=0}^{n}C_{i\varkappa}z^{\varkappa}\frac{d^{i}u}{dz^{i}}=\sum_{i=0}^{m}\Pi_{i}(z)\frac{d^{i}u}{dz^{i}}$$

mit der unabhängigen Variabeln z bedeutet (vergl. Nr. 117, I S. 426).

Bezeichnen wir durch

$$\varDelta_{z}'(v)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{i}\frac{d^{i}(\Pi_{i}(z)v)}{dz^{i}}$$

den zu $\varDelta_{z}(v)$ adjungirten, durch

$$\varDelta_{z}(f,g)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=0}^{i-1}(-1)^{h}\frac{d^{h}(\Pi_{i}(z)g)}{dz^{h}}\frac{d^{i-h-1}f}{dz^{i-h-1}}$$

den begleitenden bilinearen Differentialausdruck (Nr. 24, Bd. I, S so erhalten wir für

$$f=e^{zx},\quad g=v$$

aus der Beziehung von Lagrange (a. a. O. Bd. I, S. 68, Gleich.

$$(2)\qquad v\varDelta_{z}(e^{zx})-e^{zx}\varDelta_{z}'(v)=\frac{d}{dz}\varDelta_{z}(e^{zx},v),$$

und da nach (1) für eine beliebige Function v von z

$$D_{x}(ve^{zx})=v\varDelta_{z}(e^{zx})$$

ist, so folgt aus (2)

$$D_{x}(ve^{zx})=\frac{d}{dz}\varDelta_{z}(e^{zx},v)+e^{zx}\varDelta_{z}'(v).$$

Integriren wir diese Gleichung auf einem Wege l in Bezug auf ergiebt sich

$$D_x\Big(\int_{(l)} v e^{zx} dz\Big) = \int_{(l)} \frac{d}{dz} \Delta_z(e^{zx}, v) dz + \int_{(l)} e^{zx} \Delta_z'(v) dz;$$

wenn also v als eine Lösung der Differentialgleichung

(L) $$\Delta_z'(v) = 0$$

gewählt wird, die nichts anderes ist, wie die Laplace'sche Transformirte von (A) (vergl. Nr. 111, Bd. I, S. 400), so stellt in Uebereinstimmung mit der Nr. 113 (Bd. I, S. 408) der Ausdruck

$$J_l(x) = \int_{(l)} v e^{zx} dz$$

eine Lösung von (A) dar, sofern wir l so einrichten, dass

$$\int_{(l)} \frac{d}{dz} \Delta_z(e^{zx}, v) dz = 0$$

ist.

Das Charakteristische der Methode von Laplace besteht in der Anwendung der Function

$$e^{zx}.$$

Wir wollen jetzt an die Stelle dieser Function den Ausdruck

$$(z-x)^{\xi-1}$$

treten lassen, wo ξ irgend eine beliebige von z und x unabhängige Grösse bedeutet. Die Function e^{zx} geht im Wesentlichen aus diesem Ausdrucke hervor, indem man ξ in geeigneter Weise unendlich gross werden lässt.

Setzen wir in die linke Seite der Differentialgleichung (A) den Ausdruck

$$(z-x)^{\xi-1}$$

an die Stelle von y, so erhalten wir im Wesentlichen die zur Stelle $x = z$ gehörige charakteristische Function (Nr. 44, Bd. I, S. 156)

(3) $$D_x((z-x)^{\xi-1}) = \sum_{\varkappa=0}^{n} (-1)^{\varkappa} P_{\varkappa}(x)(\xi-1)(\xi-2)\cdots(\xi-\varkappa)(z-x)^{\xi-\varkappa-1}.$$

Um diesen Ausdruck in ähnlicher Weise umzuformen wie vorhin den Ausdruck

$$D_x(e^{zx}),$$

entwickeln wir die Producte

$$P_{\varkappa}(x)(z-x)^{\xi-1}$$

nach den successiven Ableitungen von $(z-x)^{\xi-1}$, d. h. wir entwickeln die ganzen Functionen $P_{\varkappa}(x)$ nach Potenzen von $z-x$:

$$P_\varkappa(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{P_\varkappa^{(i)}(z)}{i!}(x-z)^i \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n).$$

Dann ist

$$D_x((z-x)^{\xi-1}) = \sum_{\varkappa=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}(-1)^{\varkappa+i}\frac{(\xi-1)(\xi-2)\cdots(\xi-\varkappa)}{i!}P_\varkappa^{(i)}(z)(z-x)^{\xi-\varkappa+i-1}$$

oder, wenn wir einen neuen Summationsindex

$$\nu = m + \varkappa - i$$

einführen, der dann alle ganzzahligen Werthe von 0 bis $m+n$ durchläuft und

(4) $$\varphi_\nu(z) = \sum_{\varkappa=0}^{n}(-1)^{m-\nu}\frac{(\xi-1)(\xi-2)\cdots(\xi-\varkappa)}{(\xi+m-1)(\xi+m-2)\cdots(\xi+m-\nu)}\frac{P_\varkappa^{(m+\varkappa-\nu)}(z)}{(m+\varkappa-\nu)!}$$

setzen, so ist

$$D_x((z-x)^{\xi-1}) = \sum_{\nu=0}^{m+n}\varphi_\nu(z)\frac{d^\nu}{dz^\nu}(z-x)^{\xi+m-1}.$$

Führen wir nun durch die Formel

$$\mathfrak{D}_z(u) = \sum_{\nu=0}^{m+n}\varphi_\nu(z)\frac{d^\nu u}{dz^\nu}$$

einen homogenen linearen Differentialausdruck $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung mit der unabhängigen Variabeln z und mit in z ganzen rationalen Coefficienten ein, so finden wir die Gleichung

(C) $$D_x((z-x)^{\xi-1}) = \mathfrak{D}_z((z-x)^{\xi+m-1}),$$

die wir als den Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument bezeichnen wollen. Es ist nämlich auf der linken Seite x das Argument und z der Parameter, auf der rechten Seite z das Argument und x der Parameter.

232. Satz von Abel für lineare Differentialgleichungen und Anwendung desselben auf die hyperelliptischen Integrale dritter Gattung.

Aus den Gleichungen (4) lassen sich die $P_\varkappa(z)$ durch die $\varphi_\nu(z)$ und deren Ableitungen ausdrücken. Die Rechnung gestaltet sich am einfachsten, wenn man $\varphi_\nu(z)$ zunächst nach Potenzen von $z-x$ entwickelt,

$$\varphi_\nu(z) = \sum_{\lambda=0}^{m}\frac{\varphi_\nu^{(\lambda)}(x)}{\lambda!}(z-x)^\lambda,$$

und diese Entwickelungen in die rechte Seite der Gleichung (C) einsetzt. Man erhält auf diese Weise

$$\mathfrak{D}_z\left((z-x)^{\xi+m-1}\right)$$
$$=\sum_{\nu=0}^{m+n}\sum_{\lambda=0}^{m}\frac{(\xi+m-1)(\xi+m-2)\cdots(\xi+m-\nu)}{\lambda!}\varphi_\nu^{(\lambda)}(x)(z-x)^{\xi+m-\nu+\lambda-1},$$

oder wenn man

$$\varkappa=\nu-\lambda-m$$

als neuen Summationsindex einführt,

$$\mathfrak{D}_z\left((z-x)^{\xi+m-1}\right)$$
$$=\sum_{\varkappa=-2m}^{n}(z-x)^{\xi-\varkappa-1}\sum_{\nu=0}^{m+n}(\xi+m-1)(\xi+m-2)\cdots(\xi+m-\nu)\frac{\varphi_\nu^{(\nu-m-\varkappa)}(x)}{(\nu-m-\varkappa)!},$$

und dies muss zufolge des Vertauschungssatzes (C) mit der rechten Seite der Gleichung (3) übereinstimmen. Die Coefficientenvergleichung ergiebt dann

$$(5)\quad \sum_{\nu=0}^{m+n}(-1)^\varkappa\frac{(\xi+m-1)(\xi+m-2)\cdots(\xi+m-\nu)}{(\xi-1)(\xi-2)\cdots(\xi-\varkappa)}\frac{\varphi_\nu^{(\nu-m-\varkappa)}(x)}{(\nu-m-\varkappa)!}$$
$$=\begin{cases}0 & \text{für } \varkappa<0,\\ P_\varkappa(x) & \text{für } \varkappa\geqq 0.\end{cases}$$

In mehr übersichtlicher Form tritt die Beziehung zwischen den beiden Differentialausdrücken

$$D_x(y),\quad \mathfrak{D}_z(u)$$

durch die folgende Ueberlegung zu Tage.

Setzen wir

$$\bar{P}_{\varkappa+m}(x)=(-1)^{m+\varkappa}\frac{(\xi-1)(\xi-2)\cdots(\xi-\varkappa)}{(m+\varkappa)!}P_\varkappa(x)\qquad (\varkappa=0,1,\cdots n),$$
$$\bar{P}_\nu(x)=0\quad\text{für}\quad \nu<m,$$
$$\bar{\varphi}_\varkappa(x)=(-1)^\varkappa(\xi+m-1)_\varkappa\varphi_\varkappa(x)\qquad (\varkappa=0,1,\cdots m+n),$$

so ist nach (4) und (5)

$$\varphi_\nu(x)=\sum_{\varkappa=0}^{m+n}(-1)^\varkappa\varkappa_\nu\bar{P}_\varkappa^{(\varkappa-\nu)}(x),$$
$$\bar{P}_\varkappa(x)=\sum_{\nu=0}^{m+n}(-1)^\nu\nu_\varkappa\bar{\varphi}_\nu^{(\nu-\varkappa)}(x).$$

Nun lautet aber die explicite Form des zu einem Differentialausdrucke

$$\sum_{\varkappa=0}^{p}p_\varkappa\frac{d^\varkappa y}{dx^\varkappa}$$

adjungirten Differentialausdruckes

$$\sum_{\varkappa=0}^{p}(-1)^{\varkappa}\frac{d^{\varkappa}(p_{\varkappa}w)}{dx^{\varkappa}}=\sum_{\varkappa=0}^{p}\sum_{\nu=0}^{\varkappa}(-1)^{\varkappa}\varkappa_{\nu}\frac{d^{\varkappa-\nu}p_{\varkappa}}{dx^{\varkappa-\nu}}\frac{d^{\nu}w}{dx^{\nu}}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{p}\frac{d^{\nu}w}{dx^{\nu}}\sum_{\varkappa=0}^{p}(-1)^{\varkappa}\varkappa_{\nu}\frac{d^{\varkappa-\nu}p_{\varkappa}}{dx^{\varkappa-\nu}}.$$

Setzen wir also

$$\overline{D}_{x}(y)=\sum_{\varkappa=0}^{n}(-1)^{\varkappa}\frac{(\xi-1)(\xi-2)\cdots(\xi-\varkappa)}{(m+\varkappa)!}P_{\varkappa}(x)\frac{d^{\varkappa}y}{dx^{\varkappa}},$$

$$\overline{\mathfrak{D}}_{x}(u)=\sum_{\nu=0}^{m+n}(-1)^{\nu}(\xi+m-1)_{\nu}\varphi_{\nu}(x)\frac{d^{\nu}u}{dx^{\nu}},$$

so sind die beiden Differentialausdrücke

$$(-1)^{m}\overline{D}_{x}\left(\frac{d^{m}y}{dx^{m}}\right)=\sum_{\varkappa=0}^{m+n}\overline{P}_{\varkappa}(x)\frac{d^{\varkappa}y}{dx^{\varkappa}}$$

und

$$\overline{\mathfrak{D}}_{x}(u)$$

einander adjungirt. Bezeichnen wir durch $\overline{D}_{x}'(w)$ den zu $\overline{D}_{x}(y)$ adjungirten Differentialausdruck, so ist nach dem Thomé-Frobenius-schen Reciprocitätssatze (Nr. 21, Bd. I, S. 59)

$$\overline{\mathfrak{D}}_{x}(u)=\frac{d^{m}}{dx^{m}}[\overline{D}_{x}'(u)].$$

Wir wenden uns nun zu der Gleichung (C), die wir ein wenig umformen wollen, um einerseits ihre Bedeutung klarer hervortreten zu lassen und um andererseits zu zeigen, wie sich aus derselben durch Specialisirung ein von Abel entdeckter Satz ergiebt, der von ihm als der Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument bezeichnet worden ist.

Es ist offenbar

$$\frac{d^{m+\mu}}{dz^{m+\mu}}(z-x)^{\xi+m-1}=\xi(\xi+1)\cdots(\xi+m-1)\frac{d^{\mu}(z-x)^{\xi-1}}{dz^{\mu}}.$$

Hieraus und aus der Gleichung (4) ergiebt sich

$$\mathfrak{D}_{z}((z-x)^{\xi+m-1})=\sum_{\mu=0}^{n}\frac{d^{\mu}(z-x)^{\xi-1}}{dz^{\mu}}\sum_{\varkappa=\mu}^{n}(-1)^{\mu}\frac{(\xi-1)\cdots(\xi-\varkappa)}{(\xi-1)\cdots(\xi-\mu)}\frac{P_{\varkappa}^{(\varkappa-\mu)}(z)}{(\varkappa-\mu)!}$$

$$+\sum_{\nu=0}^{m-1}(\xi+m-1)\cdots(\xi+m-\nu)(z-x)^{\xi+m-\nu-1}$$

$$\cdot\sum_{\varkappa=0}^{n}(-1)^{m-\nu}\frac{(\xi-1)\cdots(\xi-\varkappa)}{(\xi+m-1)\cdots(\xi+m-\nu)}\frac{P_{\varkappa}^{(m+\varkappa-\nu)}(z)}{(m+\varkappa-\nu)!}.$$

Setzen wir nun $\xi = 0$, so ist demnach

$$(6)\qquad \mathfrak{D}_z((z-x)^{m-1})$$
$$= D_z'((z-x)^{-1}) + \sum_{\nu=0}^{m-1}(z-x)^{m-\nu-1}\sum_{\varkappa=0}^{n}\frac{P_\varkappa^{(m+\varkappa-\nu)}(z)}{(m+\varkappa-\nu)!}(-1)^{m-\nu-\varkappa}\varkappa!.$$

Eine einfache Rechnung ergiebt aber

$$\frac{d^\varkappa}{dz^\varkappa}\left[\frac{P_\varkappa(z)-P_\varkappa(x)}{z-x}\right] = \frac{d^\varkappa}{dz^\varkappa}\sum_{i=1}^{m}\frac{P_\varkappa^{(i)}(z)}{i!}(x-z)^{i-1}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{m-1}(x-z)^{m-\nu-1}\frac{P_\varkappa^{(m-\nu+\varkappa)}(z)}{(m-\nu-1)!}\sum_{\lambda=0}^{\varkappa}\frac{(-1)^\lambda\varkappa_\lambda}{m-\nu+\lambda},$$

und nach einer bekannten combinatorischen Formel ist

$$\sum_{\lambda=0}^{\varkappa}(-1)^\lambda\frac{\varkappa_\lambda}{m+\lambda} = \frac{\varkappa!}{m(m+1)\cdots(m+\varkappa)};$$

wir finden also

$$\frac{d^\varkappa}{dz^\varkappa}\left[\frac{P_\varkappa(z)-P_\varkappa(x)}{z-x}\right] = \sum_{\nu=0}^{m-1}(z-x)^{m-\nu-1}(-1)^{m-\nu-1}\frac{\varkappa!}{(m-\nu+\varkappa)}P_\varkappa^{(m-\nu+\varkappa)}(z).$$

Hieraus und aus der Gleichung (6) folgt nunmehr mit Rücksicht auf die Gleichung (C)

$$(C_0)\qquad D_x\left(\frac{1}{z-x}\right) = D_z'\left(\frac{1}{z-x}\right) - \sum_{\varkappa=0}^{m}(-1)^\varkappa\frac{d^\varkappa}{dz^\varkappa}\left[\frac{P_\varkappa(z)-P_\varkappa(x)}{z-x}\right],$$

und dies ist die Form, auf welche Jacobi den Abel'schen Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument gebracht hat.

Setzen wir die ganze rationale Function von z und x

$$(7)\qquad -\sum_{\varkappa=0}^{m}(-1)^\varkappa\frac{d^\varkappa}{dz^\varkappa}\left[\frac{P_\varkappa(z)-P_\varkappa(x)}{z-x}\right] = U = \sum_i\sum_\varkappa c_{i\varkappa}x^iz^\varkappa,$$

so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Form des zu $D_x(y)$ adjungirten Differentialausdruckes, dass $c_{i\varkappa}$ nichts anderes ist, wie der Coefficient von x^i in dem Ausdrucke

$$-D_x(x^{-\varkappa-1}),$$

oder der Coefficient von $z^\varkappa$ in dem Ausdrucke

$$-D_z'(z^{-i-1}).$$

Bezeichnen wir mit $y(x)$ ein Integral der Differentialgleichung (A), mit $\eta(x)$ ein Integral der zu (A) adjungirten Differentialgleichung

$$D_x'(w) = 0,$$

so ist, zufolge der Lagrange'schen Beziehung,

$$-y(z)D_z'\left(\frac{1}{z-x}\right)=\frac{d}{dz}D_z\left(y(z),\frac{1}{z-x}\right),$$
$$\eta(x)D_x\left(\frac{1}{z-x}\right)=\frac{d}{dx}D_x\left(\frac{1}{z-x},\eta(x)\right).$$

Multipliciren wir also die erste dieser Gleichungen mit $\eta(x)$, die zweite mit $y(z)$ und addiren, so folgt, wenn wir beachten, dass

$$D_z'\left(\frac{1}{z-x}\right)=-D_z'\left(\frac{1}{x-z}\right)$$

ist, mit Rücksicht auf die Gleichungen (C_0) und (7)

$$(\Gamma)\qquad \frac{d}{dx}D_x\left(\frac{y(z)}{z-x},\eta(x)\right)-\frac{d}{dz}D_z\left(y(z),\frac{\eta(x)}{x-z}\right)=Uy(z)\eta(x).$$

Wir wollen zeigen, wie sich aus dieser Gleichung für $n=1$ der Satz von der Vertauschung des Parameters mit dem Argumente für die hyperelliptischen Integrale dritter Gattung ergiebt.

Nehmen wir also $n=1$, dann lautet die Differentialgleichung (A)

$$(A_1)\qquad D_x(y)=P_1(x)\frac{dy}{dx}+P_0(x)y=0$$

und ihre adjungirte

$$(A_1')\qquad D_x'(\eta)=-P_1(x)\frac{d\eta}{dx}+[P_0(x)-P_1'(x)]\eta=0.$$

Wir nehmen der Einfachheit wegen an, dass die Differentialgleichung (A_1) zur Fuchs'schen Classe gehört, dann kann $P_1(x)$ nur von einander verschiedene lineare Factoren enthalten, und $P_0(x)$ muss vom Grade $m-1$ sein, wenn $P_1(x)$ genau vom m^{ten} Grade ist. Sei

$$P_1(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_\sigma)(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_\varrho),$$
$$\sigma+\varrho=m,$$

und möge in Partialbrüche zerlegt

$$(8)\qquad -\frac{P_0}{P_1}=\sum_{i=1}^{\sigma}\frac{r_i}{x-a_i}+\sum_{i=1}^{\varrho}\frac{\mathfrak{r}_i}{x-b_i}$$

sein. Dabei denken wir uns die Bezeichnung so gewählt, dass die

$$\mathfrak{r}_1,\ \mathfrak{r}_2,\ \cdots\ \mathfrak{r}_\varrho$$

ganze Zahlen bedeuten, während keine der Grössen

$$r_1,\ r_2,\ \cdots\ r_\sigma$$

eine ganze Zahl ist. D. h. die

$$b_1,\ b_2,\ \cdots\ b_\varrho$$

sind scheinbar singuläre Stellen von (A_1).

Das allgemeine Integral von (A_1) lautet, wenn wir die willkürliche Constante gleich Eins nehmen,

$$y(x) = (x - a_1)^{r_1} \cdots (x - a_\sigma)^{r_\sigma} (x - b_1)^{\mathfrak{r}_1} \cdots (x - b_\varrho)^{\mathfrak{r}_\varrho},$$

und das entsprechende Integral der adjungirten Differentialgleichung ist folglich

$$\eta(x) = (x - a_1)^{-r_1 - 1} \cdots (x - a_\sigma)^{-r_\sigma - 1} (x - b_1)^{-\mathfrak{r}_1 - 1} \cdots (x - b_\varrho)^{-\mathfrak{r}_\varrho - 1}.$$

Der Ausdruck U ist in unserem Falle

$$U = -\frac{P_0(z) - P_0(x)}{z - x} + \frac{d}{dz} \frac{P_1(z) - P_1(x)}{z - x},$$

und der bilineare Differentialausdruck von (A_1) reducirt sich auf

$$D_x(f, g) = P_1(x) f g.$$

Wir erhalten aus (Γ) die Formel

$$(9) \quad \frac{d}{dx}\left[P_1(x)\eta(x)\frac{y(z)}{z - x}\right] - \frac{d}{dz}\left[P_1(z) y(z) \frac{\eta(x)}{x - z}\right]$$
$$= y(z)\eta(x)\left\{-\frac{P_0(z) - P_0(x)}{z - x} + \frac{d}{dz}\frac{P_1(z) - P_1(x)}{z - x}\right\};$$

dieselbe soll nun weiter specialisirt werden.

Betrachten wir nämlich den Fall, wo die Differentialgleichung (A_1) mit ihrer adjungirten (A_1') identisch ist.

Dann muss (vergl. Nr. 25, Bd. I, S. 70 ff.)

$$P_0(x) = \frac{1}{2} P_1'(x)$$

sein. Es fallen dann die $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$ weg, und in (8) ist

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_m = \frac{1}{2}, \quad \sigma = m.$$

Die Integrale $y(x)$ und $\eta(x)$ reduciren sich auf

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{P_1(x)}}, \quad \eta(x) = \frac{1}{\sqrt{P_1(x)}},$$

und U nimmt die Form an

$$U = \frac{1}{2}\frac{P_1'(z) + P_1'(x)}{z - x} - \frac{P_1(z) - P_1(x)}{(z - x)^2}.$$

Die Gleichung (9) liefert demnach

$$(10) \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{P_1(x)}}{(z - x)\sqrt{P_1(z)}}\right] - \frac{d}{dz}\left[\frac{\sqrt{P_1(z)}}{(x - z)\sqrt{P_1(x)}}\right] = \frac{U}{\sqrt{P_1(x)}\sqrt{P_1(z)}},$$

und dies ist unmittelbar die Form, in welcher der Vertauschungssatz von Parameter und Argument für das hyperelliptische Integral dritter Gattung

$$\int \frac{dx}{(x-z)\sqrt{P_1(x)}}, \quad P_1(x) = \prod_{\lambda=1}^{m}(x - a_\lambda)$$

gewöhnlich geschrieben zu werden pflegt.

Die ausserordentliche Wichtigkeit des Vertauschungssatzes (10) für die Theorie der hyperelliptischen Transcendenten liegt darin, dass es Herrn Weierstrass gelungen ist, aus diesem Satze die in der Nr. 206 (S. 295) erwähnten Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale zum ersten Male abzuleiten. Die Entdeckung dieser Beziehungen bildete eine Epoche in der Theorie der Abel'schen Functionen, da es nur auf Grund derselben für Herrn Weierstrass möglich ward, für die allgemeinen hyperelliptischen Functionen das zu leisten, was im einfachsten Falle der zu einer Quadratwurzel aus einer ganzen Function sechsten Grades gehörigen sogenannten ultraelliptischen Functionen Göpel und Rosenhain geleistet hatten, nämlich die Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems mit Hülfe der Transcendenten Θ. Wir werden auf das von Herrn Weierstrass in seiner Braunsberger Programmarbeit vom Jahre 1848/49 angewandte Verfahren an späterer Stelle einzugehen haben und daselbst auch die analogen, jedoch viel allgemeineren Folgerungen kennen lernen, die Herr Fuchs aus dem Vertauschungssatze (Γ) für die Integrale beliebiger linearer Differentialgleichungen gezogen hat.

233. Definition der Euler'schen Transformirten einer linearen homogenen Differentialgleichung. Reciprocität. Integration durc Quadraturen. Doppelschleifen.

Jetzt wollen wir auf die den Vertauschungssatz darstellende Gle-chung (C) (Nr. 231, S. 408) ein ähnliches Verfahren anwenden, w für den Fall der Laplace'schen Transformirten auf die Gleichung ((S. 406).

Bezeichnen wir mit

$$\mathfrak{D}_z'(v), \quad \mathfrak{D}_z(f, g)$$

den adjungirten linearen, beziehungsweise den begleitenden bilinear Differentialausdruck von $\mathfrak{D}_z(u)$, so ergiebt sich aus der Beziehung v Lagrange und aus der Gleichung (C) für eine beliebige Functio von z und einen Integrationsweg L die Gleichung

$$D_x\Big(\int\limits_{(L)} v(z-x)^{\xi-1}dz\Big) = \int\limits_{(L)} \frac{d}{dz}\mathfrak{D}_z((z-x)^{\xi-1+m}, v)\,dz$$
$$+\int\limits_{(L)} (z-x)^{\xi+m-1}\mathfrak{D}_z'(v)\,dz.$$

Bedeutet also v eine Lösung der Differentialgleichung

(11) $$\mathfrak{D}_z'(v) = 0,$$

und denken wir uns den Integrationsweg L so gewählt, dass

(12) $$\int\limits_{(L)} \frac{d}{dz}\mathfrak{D}_z((z-x)^{\xi+m-1}, v)\,dz = 0$$

ist, so besitzen wir in

(13) $$y = \int\limits_{(L)} v(z-x)^{\xi-1}dz$$

eine Lösung von (A).

Euler war der erste, der die Lösung einer gewissen speciellen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung (die im Wesentlichen auf die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe hinauskommt) in der Form eines bestimmten Integrales, oder wie sich die älteren Analysten auszudrücken pflegten, durch eine Quadratur von der Art

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} v(z-x)^{\xi-1}dz$$

darstellte, wo α, β von z unabhängig sind und v eine blosse Function von z bedeutet; wir wollen darum die Differentialgleichung (11) (nach Analogie der von Herrn Poincaré eingeführten Bezeichnung „Laplace'sche Transformirte" für die Gleichung (L) S. 407) die Euler'sche Transformirte von (A) nennen.

Offenbar ist aber auch umgekehrt

(14) $$u = \int\limits_{(\Lambda)} w(z-x)^{\xi+m-1}dx$$

eine Lösung der Differentialgleichung $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung

(𝔄) $$\mathfrak{D}_z(u) = 0,$$

wenn w eine Lösung der zu (A) adjungirten Differentialgleichung

$$D_x'(w) = 0$$

und Λ einen Integrationsweg bedeutet, für welchen

(15) $$\int\limits_{(\Lambda)} \frac{d}{dx}D_x((z-x)^{\xi-1}, w)\,dx = 0$$

ist. Wir haben also den Satz, der dem in der Nr. 117 (Bd. I, S. 426) für die Laplace'sche Transformirte gefundenen Satze ganz analog ist:

Die adjungirte Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) der Euler'schen Transformirten der Differentialgleichung (A) ist so beschaffen, dass ihre Euler'sche Transformirte die Adjungirte der ursprünglichen Differentialgleichung (A) ist. Die Differentialgleichungen ($\mathfrak{A}$) und (A) integriren sich gegenseitig durch Quadraturen nach der Methode von Euler.

Es handelt sich jetzt noch darum, die Integrationswege L beziehungsweise $\varLambda$ in geeigneter Weise zu wählen. Offenbar hängt diese Wahl wesentlich ab von der Lage der singulären Stellen der unter den Integralzeichen auftretenden Functionen, d. h. also von den singulären Punkten der beiden Differentialgleichungen (A) und ($\mathfrak{A}$). Da aber zufolge der Gleichungen (4) (S. 408)

$$\varphi_{m+n}(z) = (-1)^{m+n} P_n(z)$$

ist, so sind für die Differentialgleichungen (A) und ($\mathfrak{A}$) die singulären Stellen dieselben, und wir können uns demnach darauf beschränken, etwa die Bestimmung der Integrationswege $\varLambda$ zu unserer Aufgabe zu machen.

Zufolge der Gleichung (15) muss der Integrationsweg $\varLambda$ so beschaffen sein, dass im Anfangs- und Endpunkte desselben der Ausdruck

$$(16) \qquad D_x((z-x)^{\xi-1}, w)$$

denselben Werth annimmt, dass aber trotzdem das auf diesem Wege erstreckte Integral (14) nicht identisch verschwindet. Wir werden also ähnliche Integrationswege zu benutzen haben, wie im vierten Kapite des siebenten Abschnittes (Bd. I), d. h. entweder geschlossene Wege welche die singulären Punkte des Ausdruckes (16) in geeigneter Weis umschlingen, oder aber solche, die in einem dieser singulären Punkt beginnen und endigen und zwar in der Weise, dass die ersten und letzte Wegelemente ganz bestimmte Richtungen einhalten, die so gewäh werden müssen, dass die Bedingung (15) erfüllt wird (vergl. Nr. 11- Bd. I, S. 411, Nr. 116, ebenda S. 418). Die letztere Art von Integr tionswegen ist nur bei solchen singulären Punkten anwendbar, d Unbestimmtheitsstellen der Integrale w sind; da wir im Folgenden Untersuchung von Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe Auge haben, so lassen wir diese Art von Wegen bei Seite.

Wir erhalten geschlossene Wege, die nicht von singulären Punk ausgehen und der Bedingung (15) Genüge leisten, auf folgende W

Seien

$$a_1, \ a_2, \cdots a_\sigma$$

die von einander verschiedenen Nullstellen der ganzen rationalen Function

$$P_n(x)$$

und fixiren wir nebst diesen in der x-Ebene noch die Stelle z. Denken wir uns dann von den Punkten

$$a_1, \ a_2, \cdots a_\sigma, \ z$$

aus die Querschnitte

$$l_1, \ l_2, \cdots l_\sigma, \ l_0$$

nach dem Unendlichen hin gelegt, so sind in der so zerschnittenen x-Ebene

$$w, \ (z-x)^{\xi-1}$$

eindeutig, also auch (16) eindeutig. Bedeute nun ζ irgend einen regulären Punkt der x-Ebene, sei l ein von ζ ausgehender geschlossener Weg, der die Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$ beliebig oft und in beliebiger Aufeinanderfolge überschreitet, und möge das allgemeine Integral w der zu (A) adjungirten Differentialgleichung, wenn x den Umlauf l vollzieht, in Θw übergehen. Ferner sei s_0 eine von ζ aus um den Punkt z herum gelegte einfache Schleife, die den Querschnitt l_0 einmal in positiver Richtung überschreitet.

Integriren wir nun von ζ ausgehend längs l, dann längs s_0, dann längs l aber im entgegengesetzten Sinne und endlich längs s_0 ebenfalls im entgegengesetzten Sinne, d. h. also auf dem Wege:

$$l s_0 l^{-1} s_0^{-1},$$

so ist die Function (16) zu ihrem Ausgangswerthe zurückgekehrt, und es ist folglich

$$\text{(17)} \qquad \int\limits_{(l s_0 l^{-1} s_0^{-1})}^{\cdot} w (z-x)^{\xi+m-1} dx$$

eine Lösung der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$). Beachten wir, dass

$$\text{(17a)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{(l)}^{\cdot} w (z-x)^{\xi+m-1} dx + \int\limits_{(l^{-1})}^{\cdot} \Theta w (z-x)^{\xi+m-1} dx = 0, \\ \displaystyle\int\limits_{(s_0)}^{\cdot} w (z-x)^{\xi+m-1} dx + \int\limits_{(s_0^{-1})}^{\cdot} w e^{2\pi\xi\sqrt{-1}} (z-x)^{\xi+m-1} dx = 0 \end{cases}$$

ist, so erkennen wir, dass sich das Integral (17) in die Form setzen lässt

$$(18)\quad \int\limits_{(l s_0 l^{-1} s_0^{-1})} w(z-x)^{\xi+m-1}\,dx = \left(1-e^{2\pi\xi\sqrt{-1}}\right)\int\limits_{(l)} w(z-x)^{\xi+m-1}\,dx$$
$$-\int\limits_{(s_0)} (w-\Theta w)(z-x)^{\xi+m-1}\,dx.$$

Der Weg l lässt sich zusammensetzen aus den vom Punkte ξ aus um die Punkte a_i herum gelegten einfachen Schleifen s_i, die so beschaffen sind, dass sie nur den Querschnitt l_i einmal in positivem Sinne überschreiten. Da ferner nach Vollzug der Integration über eine solche Schleife s_i das Integral w der zu (A) adjungirten Differentialgleichung in ein anderes Integral derselben Differentialgleichung übergegangen ist, so können wir sagen:

Bedeutet $w_1, w_2, \cdots w_n$ ein Fundamentalsystem der zu (A) adjungirten Differentialgleichung, so lassen sich die über Wege von der Art

$$l s_0 l^{-1} s_0^{-1}$$

erstreckten Integrale (17) linear, homogen und mit constanten Coefficienten zusammensetzen aus den Integralen

$$(19)\qquad \int\limits_{(s_\varkappa)} w_i(z-x)^{\xi+m-1}\,dz \qquad \begin{pmatrix} \varkappa=0,1,\cdots\sigma, \\ i=1,2,\cdots n \end{pmatrix}.$$

Nehmen wir z. B. $l = s_\varkappa$, betrachten also den Weg

$$s_\varkappa s_0 s_\varkappa^{-1} s_0^{-1} \qquad (\varkappa=1,2,\cdots\sigma),$$

so ist das über denselben hin erstreckte Integral (17) jedenfalls eine Lösung von ($\mathfrak{A}$); einen solchen Weg bezeichnet man gewöhnlich als eine um die beiden Punkte $a_\varkappa$, z herumgelegte Doppelschleife (Fig. 10). Solche Doppelschleifen hatten wir auch schon in der Nr. 114 (Bd. I, S. 410) bei Gelegenheit der Integration der Laplace'schen Differentialgleichung angewandt, wir bemerken jedoch, dass die um zwei Punkte

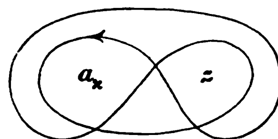


Fig. 10.

$$a_i,\ a_\varkappa,\quad i \neq \varkappa,$$

herum gelegte Doppelschleife

$$s_i s_\varkappa s_i^{-1} s_\varkappa^{-1}$$

im Allgemeinen nicht einen Weg Λ liefert, für welchen die Bedingung (15) erfüllt ist, sondern dass dies dann und nur dann der Fall ist, wenn die Werthänderung, die das Integral w auf dem Wege $s_i s_\varkappa$ erfährt, dieselbe ist, wie die auf dem Wege $s_\varkappa s_i$.

Wir wollen allgemein die Frage so formuliren:

1. Wie müssen die constanten Coefficienten der linearen homogenen Verbindungen der Integrale (19) bestimmt werden, damit diese Verbindungen Lösungen der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) darstellen?

2. Lässt sich aus solchen Verbindungen ein Fundamentalsystem von ($\mathfrak{A}$) zusammensetzen?

234. Differentialgleichungen, deren Integrale im Unendlichen nicht unbestimmt sind. Vereinfachung der Euler'schen Transformirten und des Vertauschungssatzes.

Indem wir die allgemeine Discussion der am Schlusse der vorigen Nummer aufgestellten Probleme bei Seite lassen, beschränken wir uns auf den Fall, wo die Differentialgleichung (A) der Fuchs'schen Classe angehört.

Zunächst schliessen wir aus den in der Nr. 232 (S. 409) dargelegten Beziehungen zwischen den Differentialgleichungen (A) und ($\mathfrak{A}$), am einfachsten wohl daraus, dass die Differentialausdrücke

$$\sum_{x=0}^{m+n} \overline{P}_x(x) \frac{d^x y}{dx^x} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{D}}_x(u)$$

einander adjungirt sind, dass eine singuläre Stelle, die für die eine der beiden Differentialgleichungen (A) und ($\mathfrak{A}$) eine Stelle der Bestimmtheit ist, auch für die andere denselben Charakter besitzen muss. Insbesondere folgt also hieraus der Satz:

Wenn von den beiden Differentialgleichungen (A), ($\mathfrak{A}$) die eine der Fuchs'schen Classe angehört, so ist dasselbe auch für die andere der Fall.

Wir machen vorläufig nur die allgemeinere Voraussetzung, dass *der unendlich ferne Punkt $x = \infty$ eine Stelle der Bestimmtheit für die Differentialgleichung (A) sein möge*; es werden dann die oben abgeleiteten Formeln einer wesentlichen Vereinfachung fähig, *indem sich nämlich die Differentialgleichung $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung ($\mathfrak{A}$) durch eine solche von der m^{ten} Ordnung ersetzen lässt.*

In der That ist, damit sich die sämmtlichen Lösungen der Differentialgleichung (A) im Punkte $x = \infty$ bestimmt verhalten, nach den Ergebnissen der Nr. 110 (Bd. I, S. 394) nothwendig und hinreichend, dass die Grade der Coefficienten

$$P_n, \; P_{n-1}, \cdots P_0$$

abnehmen. Wenn also m der wirkliche Grad von $P_n(x)$ ist, so l
man $m \geqq n$ voraussetzen, und $P_\varkappa(x)$ darf höchstens vom Grade $m-n$
sein. Also ist für $\nu < n$

$$P_\varkappa^{(m+\varkappa-\nu)}(x) = 0,$$

d. h. es sind nach Gleichung (4) (Nr. 231, S. 408) die

$$\varphi_0(z), \quad \varphi_1(z), \quad \cdots \quad \varphi_{n-1}(z)$$

sämmtlich gleich Null, so dass sich die Differentialgleichung (𝔄
der Form

$$\mathfrak{D}_z(u) = \sum_{\nu=0}^{m} \varphi_{n+\nu}(z) \frac{d^\nu}{dz^\nu}\left(\frac{d^n u}{dz^n}\right) = 0$$

als Differentialgleichung m^{ter} Ordnung für die n^{te} Ableitung vo
schreiben lässt.

Setzen wir also

$$(20)\begin{cases} Q_\nu(z) = \sum_{\varkappa=0}^{n} (-1)^{m-n-\nu} \frac{(\xi-1)(\xi-2)\cdots(\xi-\varkappa)}{(\xi+m-n-1)\cdots(\xi+m-n-\nu)} \frac{P_\varkappa^{(m+\varkappa-n-}}{(m+\varkappa-n} \\ \quad = (\xi+m-1)(\xi+m-2)\cdots(\xi+m-n)\varphi_{n+\nu}(z), \end{cases}$$

woraus sich gemäss den Gleichungen (4), (5) umgekehrt

$$(21) \quad \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\varkappa \frac{(\xi+m-n-1)\cdots(\xi+m-n-\nu)}{(\xi-1)(\xi-2)\cdots(\xi-\varkappa)} \frac{Q_\nu^{(\nu-m+n-\varkappa)}(x)}{(\nu-m+n-\varkappa)!}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } \varkappa \\ P_\varkappa(x) & \text{für } \varkappa \end{cases}$$

ergiebt, so kann die Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$\text{(E)} \qquad E_z(u) = \sum_{\nu=0}^{m} Q_\nu(z) \frac{d^\nu u}{dz^\nu} = 0$$

an die Stelle von (𝔄) treten.

Denn aus den Formeln der Nummern 231, 232 (S. 408 ff.) erg
sich zunächst die Gleichung

$$\text{(C')} \qquad D_x((z-x)^{\xi-1}) = E_z((z-x)^{\xi+m-n-1}),$$

und wenn

$$E_z'(v), \quad E_z(f, g)$$

den adjungirten linearen, beziehungsweise den begleitenden biline
Differentialausdruck von $E_z(u)$ bedeuten, so haben wir

$$(22) \qquad D_x\left(\int v(z-x)^{\xi-1} dz\right) = E_z((z-x)^{\xi+m-n-1}, v)$$

$$+ \int (z-x)^{\xi+m-n-1} E_z'(v) dz,$$

(23) $$E_z\left(\int w(z-x)^{\xi+m-n-1}dx\right) = D_x((z-x)^{\xi-1}, w) + \int (z-x)^{\xi-1} D_x'(w)dx.$$

Es stellt folglich

(24) $$y = \int_{(L)} v(z-x)^{\xi-1}dz$$

eine Lösung von (A) dar, wenn

(E') $$E_z'(v) = 0$$

und

(25) $$\int_{(L)} \frac{d}{dz} E_z((z-x)^{\xi+m-n-1}, v)dz = 0$$

ist, und umgekehrt haben wir in

(26) $$u = \int_{(\Lambda)} w(z-x)^{\xi+m-n-1}dx$$

eine Lösung von (E), wenn

(A') $$D_x'(w) = 0$$

und

(27) $$\int_{(\Lambda)} \frac{d}{dx} D_x((z-x)^{\xi-1}, w)dx = 0$$

ist.

Wir können dann (E') als die Euler'sche Transformirte von (A) und umgekehrt (A') als die Euler'sche Transformirte von (E) bezeichnen.

Die Differentialgleichung (E) hat die besondere Eigenschaft, dass ihre Ordnung mit dem Grade des Coefficienten der höchsten Ableitung übereinstimmt.

Die Form der Gleichungen (20) bis (27) lässt erkennen, dass der Fall eine besondere Beachtung verdient, wo auch in der Differentialgleichung (A) die Ordnungszahl n dieselbe ist, wie die Gradzahl m des Coefficienten der höchsten Ableitung, denn alsdann ist die Reciprocität zwischen den Differentialgleichungen (A) und (E) eine vollkommene. Es ist nämlich für

$$m = n$$

der Coefficient $P_\varkappa(x)$ der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ableitung von y in $D_x(y)$ vom $\varkappa^{\text{ten}}$ Grade, und wir können demnach die Beziehung zwischen den Differentialgleichungen (A) und (E) in elegantester Weise dadurch zum Ausdrucke bringen, dass wir sagen: Wenn

$$\left.\begin{aligned}\overline{P}_\varkappa(x) &= (-1)^\varkappa \frac{(\xi-1)\cdots(\xi-\varkappa)}{\varkappa!} P_\varkappa(x),\\ \overline{Q}_\nu(x) &= (-1)^\nu \frac{(\xi-1)\cdots(\xi-\nu)}{\nu!} Q_\nu(x)\end{aligned}\right\} \quad (\varkappa, \nu = 0, 1, \cdots m)$$

gesetzt wird, so ist

$$\overline{Q}_\nu(x) = \sum_{\varkappa=0}^{m} (-1)^\varkappa \varkappa_\nu \overline{P}_\varkappa^{(\varkappa-\nu)}(x),$$

$$\overline{P}_\varkappa(x) = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu \nu_\varkappa \overline{Q}_\nu^{(\nu-\varkappa)}(x),$$

d. h. die beiden Differentialgleichungen

$$\sum_{\varkappa=0}^{m} \overline{P}_\varkappa(x) \frac{d^\varkappa y}{dx^\varkappa} = 0,$$

$$\sum_{\nu=0}^{m} \overline{Q}_\nu(x) \frac{d^\nu u}{dx^\nu} = 0$$

sind einander adjungirt.

Der durch die Gleichung (C′) dargestellte Vertauschungssatz nim die einfache Form an

$$(C'') \qquad D_x((z-x)^{\xi-1}) = E_z((z-x)^{\xi-1}).$$

Falls in der gegebenen Differentialgleichung (A) m grösser wie sein sollte, so können wir z. B. dadurch, dass wir y gleich der $(m-n$ Ableitung einer neuen unabhängigen Variabeln setzen, eine Differenti gleichung herstellen, deren Ordnungszahl gleich m ist und die ne einer ganzen rationalen Function $(m-n)^{\text{ten}}$ Grades von x mit willk lichen Coefficienten noch n Lösungen besitzt, deren $(m-n)^{\text{te}}$ Abl tungen ein Fundamentalsystem der gegebenen Differentialgleichu bilden. Wir wollen darum im Folgenden voraussetzen, dass für Differentialgleichung (A)

$$m = n$$

sei und dann nachher besonders auf den Fall eingehen, wo in gegebenen Differentialgleichung (A) die Coefficienten gewisser ers Ableitungen verschwinden.

235. Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe, deren Ordnu mit dem Grade des Coefficienten der höchsten Ableitung übereinstimı

Wir gehen also von einer Differentialgleichung (A) aus, de: Ordnung mit dem Grade m des Coefficienten der höchsten Ableitı

übereinstimmt und setzen jetzt überdies voraus, dass (A) zur Fuchsschen Classe gehört.

Sei dann der Coefficient $P_m(x)$ der höchsten Ableitung in seine linearen Factoren zerlegt:

(1) $$P_m(x) = (x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2} \cdots (x - a_\sigma)^{\alpha_\sigma},$$

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i = m,$$

so muss, damit der singuläre Punkt $x = a_i$ eine Stelle der Bestimmtheit für die Lösungen von (A) sei, der Factor $x - a_i$ in $P_{m-1}(x)$ mindestens zur $(\alpha_i - 1)^{\text{ten}}$, in $P_{m-2}(x)$ mindestens zur $(\alpha_i - 2)^{\text{ten}}$ u. s. w., in $P_{m-\alpha_i+1}(x)$ mindestens zur ersten Potenz enthalten sein. Bezeichnen wir durch

$$\varrho_{i1}, \quad \varrho_{i2}, \cdots \varrho_{im}$$

die Wurzeln der zu $x = a_i$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, so sind (vergl. für diese Verhältnisse Nr. 112, Bd. I, S. 405) $m - \alpha_i$ derselben mit den Zahlen

$$0, \; 1, \; 2, \cdots m - \alpha_i - 1$$

identisch, und die zu diesen Wurzeln als Exponenten gehörigen Elemente des canonischen Fundamentalsystems verhalten sich in der Umgebung von $x = a_i$ regulär, wenn keine der α_i übrigen Wurzeln eine positive ganze Zahl und grösser als $m - \alpha_i - 1$ ist. Um Complicationen aus dem Wege zu gehen, die das Wesen der hier anzustellenden Untersuchung nicht berühren, wollen wir überhaupt annehmen, dass für alle singulären Punkte a_i die Grössen

$$\varrho_{i1}, \quad \varrho_{i2}, \cdots \varrho_{i\alpha_i}$$

weder ganzzahlig noch auch um ganze Zahlen von einander verschieden seien. Dann enthalten die Entwickelungen der Elemente

$$y_{i1}, \quad y_{i2}, \cdots y_{im}$$

des zu $x = a_i$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems in der Umgebung von $x = a_i$ keinen Logarithmus und haben also die Form

(2) $$y_{i\alpha} = (x - a_i)^{\varrho_{i\alpha}} \mathfrak{P}_{i\alpha}(x \mid a_i), \quad \mathfrak{P}_{i\alpha}(a_i \mid a_i) \neq 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots m),$$

wo die $\mathfrak{P}_{i\alpha}(x \mid a_i)$ nach positiven ganzen Potenzen von $x - a_i$ fortschreitende Reihen bedeuten. Die Bezeichnung ist dabei so gewählt worden, dass

(3) $$\varrho_{i,\alpha_i+1} = 0, \quad \varrho_{i,\alpha_i+2} = 1, \cdots \varrho_{im} = m - \alpha_i - 1$$

ist.

Multipliciren wir die linke Seite von (A) mit dem Factor

(4) $$\chi(x) = \prod_{i=1}^{\sigma} (x - a_i)^{m-\alpha_i},$$

so lauten die Wurzeln der zu $x = a_i$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung für die adjungirte Differentialgleichung von

(5) $$\chi(x) D_x(y) = 0,$$

nach den Ergebnissen der Nr. 109 (Bd. I, S. 391),

$$-\varrho_{i\alpha} - 1 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots m).$$

Die adjungirte Differentialgleichung von (5) lautet aber nach dem Reciprocitätssatze (Nr. 21, Bd. I, S. 59)

(6) $$D_x'(\chi(x)\mathfrak{w}) = 0,$$

die zu $x = a_i$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der zu (A) adjungirten Differentialgleichung (A′) hat also die Wurzeln

(7) $$\sigma_{i\alpha} = m - \alpha_i - \varrho_{i\alpha} - 1 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots m),$$

und die zugehörigen Elemente des canonischen Fundamentalsystems haben die Form

(8) $$w_{i\alpha} = (x - a_i)^{\sigma_{i\alpha}} \overline{\mathfrak{P}}_{i\alpha}(x \mid a_i), \quad \overline{\mathfrak{P}}_{i\alpha}(a_i \mid a_i) \neq 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots m),$$

wo die $\overline{\mathfrak{P}}_{i\alpha}(x \mid a_i)$ nach $x - a_i$ fortschreitende gewöhnliche Potenzreihen bedeuten. Insbesondere sind die

$$w_{i, \alpha_i + \varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots m - \alpha_i)$$

in der Umgebung von $x = a_i$ regulär und gehören zu den Exponenten

$$\sigma_{i, \alpha_i + \varkappa} = m - \alpha_i - \varkappa.$$

Es sei nun w das allgemeine Integral der Differentialgleichung (A′). Wir betrachten, wie in der vorhergehenden Nummer, die über die von $x = \zeta$ ausgehenden Schleifen

$$s_0, \ s_1, \ s_2, \ \cdots \ s_\sigma$$

erstreckten Integrale

$$\int_{(s_i)}^{\bullet} w(z - x)^{\xi - 1} dx \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots \sigma).$$

Bedeute b_i einen Punkt in der Umgebung von a_i, d. h. einen Punkt, für welchen die Entwickelungen der Integrale unserer Differentialgleichungen nach Potenzen von $x - a_i$ convergiren, und bezeichnen wir mit $\bar{s}_i$ die von b_i aus um a_i herumgelegte Schleife, dann ist

$$\int_{(s_i)}^{\bullet} w(z-x)^{\xi-1}dx = \int_{\xi}^{b_i}(w-\Theta_i w)(z-x)^{\xi-1}dx + \int_{(s_i)}^{\bullet} w(z-x)^{\xi-1}dx,$$

wo wir durch $\Theta_i w$ dasjenige Integral von (A′) bezeichnet haben, in welches sich w verwandelt, wenn x einen einfachen Umlauf im positiven Sinne um a_i vollzogen (d. h. den Schnitt l_i einmal in positiver Richtung überschritten) hat, und wo das Integral von ξ nach b_i in der durch die Linien $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$ zerschnittenen x-Ebene, d. h. auf directem Wege, zu nehmen ist.

Sei das Integral w durch die Elemente des zu $x = a_i$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems dargestellt

(9) $$w = \sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha^{(i)} w_{i\alpha},$$

dann ist in der Umgebung von a_i

(10) $$w = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} c_\alpha^{(i)} w_{i\alpha} + \mathfrak{P}(x\,|\,a_i),$$

wo $\mathfrak{P}(x\,|\,a_i)$ eine gewöhnliche nach $x - a_i$ fortschreitende Potenzreihe bedeutet. Also haben wir

$$\int_{(s_i)}^{\bullet} w(z-x)^{\xi-1}dx = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} c_\alpha^{(i)} \int_{(s_i)}^{\bullet} w_{i\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx$$

und ferner

(11) $$w - \Theta_i w = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} c_\alpha^{(i)} (w_{i\alpha} - \Theta_i w_{i\alpha}).$$

Setzen wir also

$$A_{i\alpha} = \int_{(s_i)}^{\bullet} w_{i\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx,$$

so ist

(12) $$\int_{(s_i)}^{\bullet} w(z-x)^{\xi-1}dx = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} c_\alpha^{(i)} A_{i\alpha}.$$

Wir können uns folglich, was die über die Schleifen

$$s_1,\ s_2,\ \cdots\ s_\sigma$$

erstreckten Integrale anlangt, auf die Betrachtung der Ausdrücke

$$A_{i\alpha} \qquad (i = 1, 2, \cdots \sigma;\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_i),$$

deren Anzahl gleich m ist, beschränken. Beachten wir, dass

$$\Theta_i w_{i\alpha} = \varepsilon_{i\alpha} w_{i\alpha}$$

ist, wenn

$$\varepsilon_{i\alpha} = e^{2\pi\sigma_{i\alpha}\sqrt{-1}}$$

gesetzt wird, so kann $A_{i\alpha}$ in der Form

$$(13) \qquad A_{i\alpha} = (1 - \varepsilon_{i\alpha}) \int_{\xi}^{b_i} w_{i\alpha}(z - x)^{\xi - 1} dx + \int_{(s_i)} w_{i\alpha}(z - x)^{\xi - 1} dx$$

geschrieben werden.

Um die über die Schleife s_0 erstreckten Integrale darzustellen nehmen wir irgend ein Fundamentalsystem $w_1, w_2, \cdots w_m$ der Differentialgleichung (A') und setzen

$$Z_\beta = \int_{(s_0)} w_\beta(z - x)^{\xi - 1} dx \qquad (\beta = 1, 2, \cdots m);$$

dann sind auch die m Integrale

$$Z_{i\alpha} = \int_{(s_0)} w_{i\alpha}(z - x)^{\xi - 1} dx \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots \sigma, \\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_i \end{pmatrix}$$

durch $Z_1, Z_2, \cdots Z_m$ linear, homogen und mit constanten Coefficiente darstellbar.

Zweites Kapitel.

236. Die Fuchs'sche Methode der veränderlichen Integrationswege. Aenderung der Integrationsschleifen bei geschlossenen Umläufen des Parameters.

Wir fragen nunmehr nach den Aenderungen, welche die als Functionen von z aufgefassten Schleifenintegrale

$$A_{i\alpha}, \quad Z_\beta$$

erleiden, wenn die unabhängige Variable geschlossene Wege in ihrer Ebene beschreibt. Singuläre Stellen dieser Integrale können ausser den Punkten

$$z = a_1, a_2, \cdots a_\sigma$$

nur noch die Punkte $z = \zeta$ und $z = \infty$ sein; wir haben also nur das Verhalten der in Rede stehenden Integrale bei einfachen geschlossenen Umläufen von z um die Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \zeta$$

zu untersuchen.

Bei dieser Untersuchung kann man sich mit Vortheil einer von Herrn Fuchs begründeten Methode bedienen, die wir als die Methode der veränderlichen Integrationswege bezeichnen wollen und die auf der folgenden Erwägung beruht. Denkt man sich in der Ebene der Integrationsvariabeln x die Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, z, \zeta$$

nebst den von ζ ausgehenden Integrationsschleifen

$$s_1, s_2, \cdots s_\sigma, s_0$$

fixirt, so müssen diese Schleifen so beschaffen sein, dass sie durch keinen der singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, z$ des Integranden hindurchgehen. Wenn nun z sich verändert, so werden sich demzufolge auch die Integrationsschleifen verändern müssen, so wie z auf seinem Wege eine derselben trifft. Stellt man sich etwa die Integrations-

schleifen als biegsame und ausdehnbare Fäden vor, die im Punkte befestigt und um die singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, z$ herumge schlungen sind, so wird z, wenn es eine Bahn beschreibt, diese Fäde immer vor sich her treiben. Ist die Bahn von z insbesondere ein geschlossene, so währt die Veränderung jener Schleifen so lange, bi z ungehindert in seine Ausgangslage zurückkehren kann. Es darf natü lich keine der Schleifen während ihrer Aenderung einen der Punkt $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ passiren, dagegen bildet der Punkt z während seine Bewegung nur in seiner augenblicklichen Lage ein für die Schleife nicht passirbares Hinderniss, so dass also die Schleifen z. B. über di Ausgangslage von z hinweg ungehindert gehen können, ehe der Punk diese Lage wieder erreicht hat.

Will man also die Aenderung untersuchen, die ein Integral

$$\int\limits_{(s_i)} w(z-x)^{\xi-1}dx$$

erfährt, wenn z eine bestimmte Bahn beschreibt, so hat man zu be achten, dass dieses Integral in zwiefacher Weise von z abhängt. Einma dadurch, dass der Integrand eine Function von z ist, das andere Ma dadurch, dass die Curve, über welche das Integral zu erstrecken is sich ebenfalls mit z ändert. Nach den Principien der Integralrech nung werden wir also das veränderte Integral erhalten, wenn wir de veränderten Integranden längs des veränderten Integrationsweges inte griren.

Wenn z einen geschlossenen Umlauf vollzieht, so kann ein Aenderung des Integranden nur dann eintreten, wenn sich gewiss Theile des Integrationsweges innerhalb jenes Umlaufes befinden; dan multiplicirt sich nämlich in den diesen Theilen des Integrationsweg entsprechenden Elementen des Integrales der Factor

$$(z-x)^{\xi-1}$$

des Integranden mit der Einheitswurzel

$$\varepsilon = e^{2\pi\xi\sqrt{-1}}.$$

Wir untersuchen zunächst die Aenderung der Integrationsschleifen be geschlossenen Umläufen von z.

In der x-Ebene haben wir die Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ und die vo denselben nach dem Unendlichen hin gelegten Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$ ferner den Punkt z, von dem aus der Querschnitt l_0 und den Punkt von dem aus der Querschnitt $\bar{l}$ nach dem Unendlichen hin gelegt sei möge. Denken wir uns überdies noch die Integrationsschleife $s_0, s_1, s_2, \cdots s_\sigma$, so zerfällt die x-Ebene in σ Parzellen, die wir de

Reihe nach durch die Zahlen 1, 2, $\cdots \sigma$ bezeichnen wollen, so dass die i^{te} Parzelle von den Querschnitten l_{i+1}, l_i und den Integrationsschleifen s_i, s_{i+1} begrenzt wird. Die Lage von ζ denken wir uns so, dass bei einer Umkreisung von ζ in positivem Sinne zuerst die Schleife s_σ, dann $s_{\sigma-1}, \cdots s_2, s_1$ und endlich der Querschnitt l getroffen werden (vergl. Fig. 11). Wir wollen ferner annehmen, dass sich der Punkt z

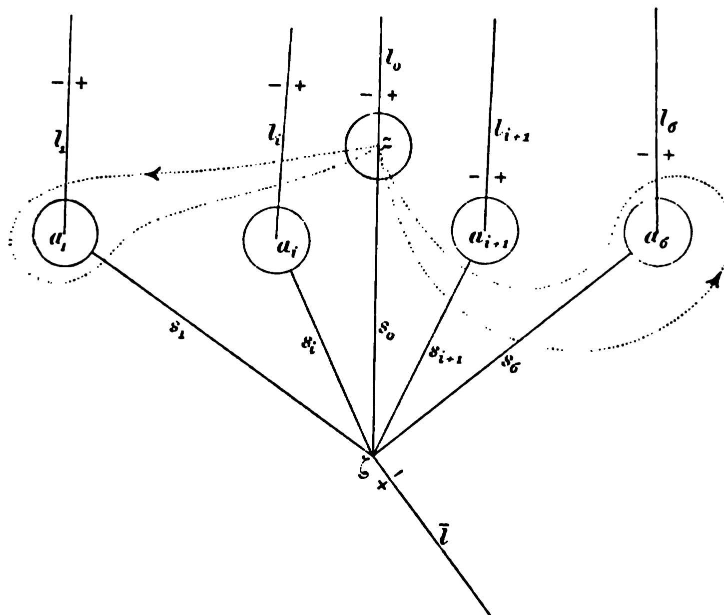


Fig. 11.

innerhalb der Parzelle i befinde, und lassen jetzt z einen einfachen Umlauf in positivem Sinne um einen der singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ vollziehen.

Dabei unterscheiden wir nun zunächst zwei Fälle, jenachdem nämlich der Umlauf um einen Punkt a_h erfolgt, für welchen

$$h = 1, 2, \cdots i$$

ist, oder um einen Punkt a_x, wo

$$x = i + 1, \quad i + 2, \cdots \sigma.$$

Von den Punkten a_h sagen wir, sie befänden sich in Bezug auf z und ζ in der Lage I; das Dreieck (ζ, z, a_h) wird in der durch die angegebene Reihenfolge der Ecken bestimmten Richtung so durchlaufen, dass die von demselben eingeschlossene Fläche zur Linken bleibt. Entsprechend bezeichnen wir die Lage der Punkte a_x zu z und ζ als die Lage II.

Wir könnten nun die Umläufe von z um die Punkte a_h und a_x

so einrichten, dass die Schleifen s_ν, für welche ν weder 0 noch h beziehungsweise $\varkappa$ ist, ganz unberührt bleiben (vergl. den punktirten Umlauf von z um a_1 in der Fig. 11), es ist aber zweckmässiger, solche Umläufe von z zu betrachten, die nur einen der Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma, \bar{l}$ einmal in positivem Sinne überschreiten (vergl. den punktirten Umlauf um a_σ in der Fig. 11).

Nehmen wir also zunächst einen Umlauf von z, der den Querschnitt l_h einmal in positivem Sinne durchkreuzt, so reisst der Punkt z auf seinem Wege die Schleifen

$$s_h, s_{h+1}, \cdots s_i, s_0$$

mit sich, so dass dieselben in die Endlagen

$$s_h^{(h)}, s_{h+1}^{(h)}, \cdots s_i^{(h)}, s_0^{(h)}$$

übergehen. Die Anzahlen, wie oft diese Endlagen die Querschnitte $l_0, l_1, \cdots l_\sigma$ überschreiten, und die Richtungen, in welchen diese Ueberschreitungen erfolgen, bestimmen die Aufeinanderfolge von einfachen

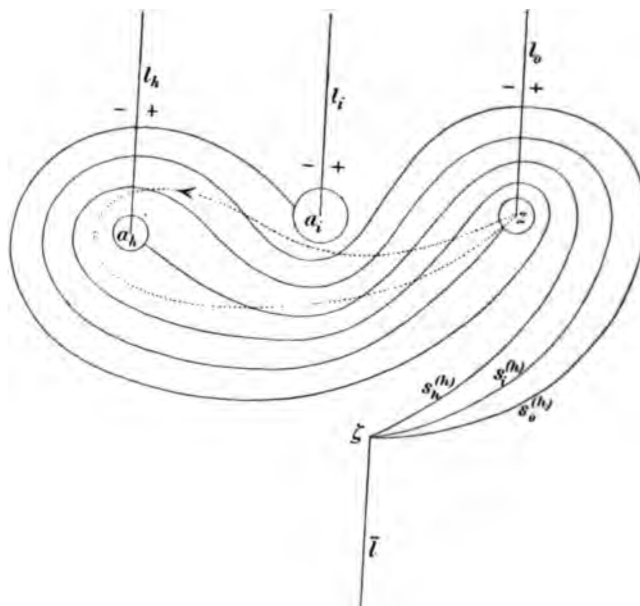


Fig. 12.

Schleifen, durch welche jene Endlagen ersetzt werden können. In der Fig. 12 sind die Endlagen $s_h^{(h)}, s_i^{(h)}, s_0^{(h)}$ der Schleifen s_h, s_i, s_0 verzeichnet, die dem punktirten Umlaufe von z um a_h entsprechen; wir sehen, dass die folgenden Gleichungen bestehen:

$$
\text{(I)} \quad \begin{cases} s_0^{(h)} = s_0 s_h s_0 s_h^{-1} s_0^{-1}, \\ s_\nu^{(h)} = s_0 s_h s_0^{-1} s_h^{-1} s_\nu s_h s_0 s_h^{-1} s_0^{-1} & (\nu = i,\ i-1, \cdots h+1), \\ s_h^{(h)} = s_0 s_h s_0^{-1}. \end{cases}
$$

Die übrigen Schleifen $s_1, \cdots s_{h-1}, s_{i+1}, \cdots s_\sigma$ bleiben ungeändert.

Beschreibt dagegen z einen Umlauf, der den Querschnitt $l_\varkappa$ einmal in positivem Sinne durchkreuzt, so verwandeln sich (vergl. Fig. 13) die Schleifen s_0, s_ν, $s_\varkappa$ beziehungsweise in

$$
\text{(II)} \quad \begin{cases} s_0^{(\varkappa)} = s_\varkappa s_0 s_\varkappa^{-1}, \\ s_\nu^{(\varkappa)} = s_\varkappa s_0 s_\varkappa^{-1} s_0^{-1} s_\nu s_0 s_\varkappa s_0^{-1} s_\varkappa^{-1} & (\nu = i+1,\ i+2, \cdots \varkappa-1), \\ s_\varkappa^{(\varkappa)} = s_\varkappa s_0 s_\varkappa s_0^{-1} s_\varkappa^{-1}, \end{cases}
$$

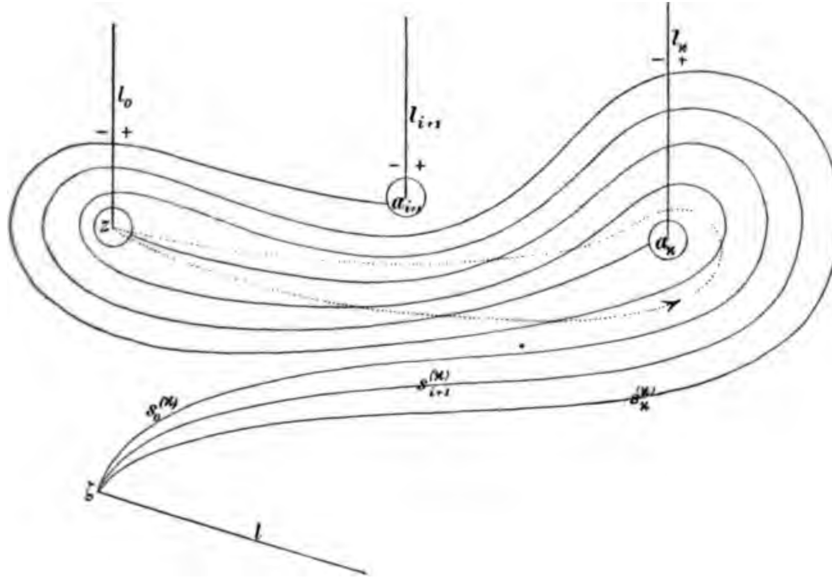


Fig. 13.

während die übrigen ungeändert bleiben. Bemerken wir gleich, dass wir uns den geschlossenen Weg, den z vollzieht, so gelegt denken können, dass sich nur unendlich kleine Theile der Schleifen innerhalb desselben befinden; wir werden demgemäss bei der Untersuchung der Aenderung, welche die Schleifenintegrale erleiden, wenn z Umläufe um die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ vollzieht, von den Aenderungen des Integranden absehen können.

237. Aenderung der Schleifenintegrale bei geschlossenen Umläufen der im Integranden als Parameter auftretenden Variabeln. Bestimmung der Coefficienten der Substitutionen, welche die Lösungen der linearen Differentialgleichung erfahren.

Bezeichnen wir durch ein vorgesetztes Θ_i dasjenige, was aus einer Function wird, wenn die unabhängige Variable einen geschlossenen Weg beschreibt, der den Querschnitt l_i einmal in positivem Sinne überschreitet, so gelten nach den Ergebnissen der vorigen Nummer die folgenden Formeln.

Für $h \leqq i$ ist

$$\Theta_h Z_\beta = \int\limits_{(\dot{s}_0)} w_\beta (z-x)^{\xi-1} dx + \varepsilon \int\limits_{(\dot{s}_h)} w_\beta (z-x)^{\xi-1} dx + \varepsilon \int\limits_{(\dot{s}_0)} \Theta_h w_\beta (z-x)^{\xi-1} dx$$
$$+ \varepsilon^2 \int\limits_{(\dot{s}_h^{-1})} \Theta_h w_\beta (z-x)^{\xi-1} dx + \varepsilon^2 \int\limits_{(\dot{s}_0^{-1})} w_\beta (z-x)^{\xi-1} dx,$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen (17a) der Nr. 233 (S. 417)

$$\Theta_h Z_\beta = Z_\beta + (\varepsilon - \varepsilon^2) \int\limits_{(\dot{s}_h)} w_\beta (z-x)^{\xi-1} dx - \varepsilon \int\limits_{(\dot{s}_0)} (w_\beta - \Theta_h w_\beta)(z-x)^{\xi-1} dx.$$

Denken wir uns also das Integral w_β auf einem in der zerschnittenen x-Ebene verlaufenden Wege nach der Umgebung von a_h fortgesetzt und durch die Elemente $w_{h1}, w_{h2}, \cdots w_{hm}$ des zu a_h gehörigen canonischen Fundamentalsystems dargestellt,

$$w_\beta = \sum_{\lambda=1}^{m} c_{\beta\lambda}^{(h)} w_{h\lambda} \qquad (\beta = 1, 2, \cdots m),$$

so ist (vergl. die Gleichungen (11) und (12) Nr. 235, S. 425)

$$w_\beta - \Theta_h w_\beta = \sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\beta\lambda}^{(h)} (1 - \varepsilon_{h\lambda}) w_{h\lambda},$$

$$\int\limits_{(\dot{s}_h)} w_\beta (z-x)^{\xi-1} dx = \sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\beta\lambda}^{(h)} A_{h\lambda},$$

und wir haben folglich

$$\Theta_h Z_\beta = Z_\beta + \varepsilon \sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\beta\lambda}^{(h)} [(1-\varepsilon) A_{h\lambda} - (1 - \varepsilon_{h\lambda}) Z_{h\lambda}].$$

Gemäss der Gleichung (18) Nr. 233 (S. 418) ist aber

$$(14)\qquad u_{h\lambda} = \int\limits_{(s_h s_0 s_h^{-1} s_0^{-1})} w_{h\lambda}(z-x)^{\xi-1}dx = (1-\varepsilon)A_{h\lambda} - (1-\varepsilon_{h\lambda})Z_{h\lambda},$$

es ergiebt sich also endlich

$$(15)\qquad \Theta_h Z_\beta = Z_\beta + \varepsilon\sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\beta\lambda}^{(h)} u_{h\lambda}.$$

Ferner haben wir

$$(16)\qquad \Theta_h A_{\mu\alpha} = A_{\mu\alpha} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots h-1,\ i+1, \cdots \sigma;\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\mu),$$

$$\Theta_h A_{h\alpha} = \int\limits_{(s_0)} w_{h\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx + \varepsilon\int\limits_{(s_h)} w_{h\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx + \varepsilon\varepsilon_{h\alpha}\int\limits_{(s_0^{-1})} w_{h\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx,$$

also nach einfacher Reduction

$$(17)\qquad \Theta_h A_{h\alpha} = \varepsilon A_{h\alpha} + (1-\varepsilon_{h\alpha})Z_{h\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots \alpha_h).$$

Dagegen ist für $h < i$, wenn ν eine der Zahlen $h+1,\ h+2, \cdots i$ bedeutet,

$$\begin{aligned}\Theta_h A_{\nu\alpha} = & \int\limits_{(s_0)} w_{\nu\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx + \varepsilon\int\limits_{(s_h)} w_{\nu\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx + \varepsilon\int\limits_{(s_0^{-1})} \Theta_h w_{\nu\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx \\ & + \int\limits_{(s_h^{-1})} \Theta_h w_{\nu\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx + \int\limits_{(s_\nu)} w_{\nu\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx + \varepsilon_{\nu\alpha}\int\limits_{(s_h)} w_{\nu\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx \\ & + \varepsilon_{\nu\alpha}\int\limits_{(s_0)} \Theta_h w_{\nu\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx + \varepsilon_{\nu\alpha}\varepsilon\int\limits_{(s_h^{-1})} \Theta_h w_{\nu\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx \\ & + \varepsilon_{\nu\alpha}\varepsilon\int\limits_{(s_0^{-1})} w_{\nu\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx.\end{aligned}$$

Bezeichnen wir also mit $c_{\alpha\lambda}^{(\nu h)}$ die Coefficienten der Uebergangssubstitution, die zu einem zwischen den Punkten a_ν und a_h innerhalb der zerschnittenen x-Ebene verlaufenden Wege gehört (vergl. Nr. 122, Bd. I, S. 443), d. h. setzen wir

$$(18)\qquad w_{\nu\alpha} = \sum_{\lambda=1}^{m} c_{\alpha\lambda}^{(\nu h)} w_{h\lambda} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots m),$$

so folgt ähnlich wie oben für Z_β

$$(19)\qquad \Theta_h A_{\nu\alpha} = A_{\nu\alpha} - (1-\varepsilon_{\nu\alpha})\sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\alpha\lambda}^{(\nu h)} u_{h\lambda} \qquad (\nu = h+1,\ h+2, \cdots i).$$

Wenn wir mit Hülfe der m Schleifenintegrale $A_{\mu\alpha}$ und der sprechenden $Z_{\mu\alpha}$ die m Ausdrücke

$$(20)\qquad u_{\mu\alpha} = (1-\varepsilon)A_{\mu\alpha} - (1-\varepsilon_{\mu\alpha})Z_{\mu\alpha} \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1, 2, \cdots \sigma, \\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\mu\end{pmatrix}$$

bilden, so sind diese nichts anderes als die Doppelschleifenintegra

$$(20\text{a})\qquad u_{\mu\alpha} = \int\limits_{(s_\mu s_0 s_\mu^{-1} s_0^{-1})} w_{\mu\alpha}(z-x)^{\xi-1}dx,$$

und stellen folglich nach den Ergebnissen der Nr. 234 (S. 42 Lösungen der Differentialgleichung (E) dar. Wir wollen gleich Aenderungen zusammenstellen, welche diese Lösungen erfahren, we geschlossene Wege beschreibt, die den Querschnitt l_h einmal in tivem Sinne überschreiten.

Zufolge der Gleichungen (15) ist

$$(21)\qquad \Theta_h Z_{\mu\alpha} = Z_{\mu\alpha} + \varepsilon\sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\alpha\lambda}^{(\mu h)} u_{h\lambda} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots \sigma;\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\mu),$$

wenn wir mit

$$(22)\qquad w_{\mu\alpha} = \sum_{\lambda=1}^{m} c_{\alpha\lambda}^{(\mu h)} w_{h\lambda} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots m)$$

die Uebergangssubstitution der Differentialgleichung (A′) bezeic die zu einem die Punkte a_μ, a_h verbindenden, die Querschnitte überschreitenden Wege gehört. Es ist demnach mit Rücksicht au Gleichungen (16), (17) und (19)

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} \Theta_h u_{h\alpha} = \varepsilon\varepsilon_{h\alpha} u_{h\alpha} & (\alpha = 1, 2, \cdots \alpha_h), \\ \Theta_h u_{\nu\alpha} = u_{\nu\alpha} - (1-\varepsilon_{\nu\alpha})\sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\alpha\lambda}^{(\nu h)} u_{h\lambda} & \begin{pmatrix} h < i;\ \nu = h+1, \cdots i, \\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\nu \end{pmatrix}, \\ \Theta_h u_{\mu\alpha} = u_{\mu\alpha} - \varepsilon(1-\varepsilon_{\mu\alpha})\sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\alpha\lambda}^{(\mu h)} u_{h\lambda} & \begin{pmatrix} \mu = i+1, \cdots \sigma, 1, 2, \cdots h \\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\mu \end{pmatrix} \end{cases}$$

Wir wenden uns zur Aufstellung der analogen Formeln für geschlossenen Umlauf von z, der einen der Querschnitte l_x für einmal in positivem Sinne überschreitet. Aus den Gleichunger (S. 431) ergeben sich in diesem Falle durch ganz ähnliche Rechnu wie die, welche wir vorhin durchzuführen hatten, die folgenden chungen. Zunächst ist

$$(23)\qquad \Theta_x Z_\beta = Z_\beta + \sum_{\lambda=1}^{\alpha_x} c_{\beta\lambda}^{(x)} u_{x\lambda} \qquad (\beta = 1, 2, \cdots m),$$

wenn wir setzen

$$w_\beta = \sum_{\lambda=1}^{m} c_{\beta\lambda}^{(\varkappa)} w_{\varkappa\lambda},$$

und insbesondere

$$(24) \qquad \Theta_\varkappa Z_{\mu\alpha} = Z_{\mu\alpha} + \sum_{\lambda=1}^{\alpha_\varkappa} c_{\alpha\lambda}^{(\mu\varkappa)} u_{\varkappa\lambda} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots \sigma;\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\mu),$$

wenn wiederum

$$(25) \qquad w_{\mu\alpha} = \sum_{\lambda=1}^{m} c_{\alpha\lambda}^{(\mu\varkappa)} w_{\varkappa\lambda} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots m)$$

die zwischen den Punkten a_μ, $a_\varkappa$ vermittelnde Uebergangssubstitution der Differentialgleichung (A′) bedeutet. Dabei möge gleich bemerkt werden, dass die beiden Substitutionen

$$\left(c_{\alpha\lambda}^{(h\varkappa)}\right) \quad \text{und} \quad \left(c_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)}\right) \qquad (\alpha, \lambda = 1, 2, \cdots m)$$

zu einander invers sind.

Ferner haben wir

$$(26) \quad \begin{cases} \Theta_\varkappa A_{\varkappa\alpha} = (1 - \varepsilon_{\varkappa\alpha} + \varepsilon\varepsilon_{\varkappa\alpha}) A_{\varkappa\alpha} + (\varepsilon_{\varkappa\alpha} - \varepsilon_{\varkappa\alpha}^2) Z_{\varkappa\alpha} & (\alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\varkappa), \\ \Theta_\varkappa A_{\nu\alpha} = A_{\nu\alpha} + (1 - \varepsilon_{\nu\alpha}) \sum_{\lambda=1}^{\alpha_\varkappa} c_{\alpha\lambda}^{(\nu\varkappa)} u_{\varkappa\lambda} & \left(\begin{matrix}\varkappa > i+1;\ \nu = i+1, i+2, \cdots \varkappa - 1, \\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\nu\end{matrix}\right), \\ \Theta_\varkappa A_{\mu\alpha} = A_{\mu\alpha} & \left(\begin{matrix}\mu = \varkappa+1, \cdots \sigma, 1, 2, \cdots i, \\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\mu\end{matrix}\right), \end{cases}$$

und für die m Lösungen $u_{\mu\alpha}$ von (E) ergiebt sich endlich

$$(\beta) \quad \begin{cases} \Theta_\varkappa u_{\varkappa\alpha} = \varepsilon\varepsilon_{\varkappa\alpha} u_{\varkappa\alpha} & (\alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\varkappa), \\ \Theta_\varkappa u_{\mu\alpha} = u_{\mu\alpha} - (1 - \varepsilon_{\mu\alpha}) \sum_{\lambda=1}^{\alpha_\varkappa} c_{\alpha\lambda}^{(\mu\varkappa)} u_{\varkappa\lambda} & \left(\begin{matrix}\mu = \varkappa+1, \cdots \sigma, 1, 2, \cdots i, \\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\mu\end{matrix}\right), \\ \Theta_\varkappa u_{\nu\alpha} = u_{\nu\alpha} - \varepsilon(1 - \varepsilon_{\nu\alpha}) \sum_{\lambda=1}^{\alpha_\varkappa} c_{\alpha\lambda}^{(\nu\varkappa)} u_{\varkappa\lambda} & \left(\begin{matrix}\varkappa > i+1;\ \nu = i+1, \cdots \varkappa - 1, \\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\nu\end{matrix}\right). \end{cases}$$

Es erübrigt nun noch, die Aenderungen der Schleifenintegrale anzugeben, die einem Umlaufe von z um den Punkt ζ entsprechen, d. h. einem Umlaufe (dem punktirten in der Fig. 14, S. 436), der den Querschnitt l einmal in positiver Richtung durchkreuzt. In der Fig. 14 sind die Endlagen der Schleifen s_h, $s_\varkappa$ und s_0 nach einem solchen Umlaufe verzeichnet; man erkennt, dass s_h übergeht in

$$\bar{s}_h = s_0^{-1} s_h s_0 \qquad (h = 1, 2, \cdots \sigma),$$

dass dagegen s_0 in seine Ausgangslage zurückkehrt. Ueberdies ist aber noch zu beachten, dass der Integrand der Schleifenintegrale den Factor ε bekommt, weil der Ausgangspunkt ζ der Schleifen innerhalb des

von z beschriebenen Umlaufes liegt. Bezeichnen wir also durch ein vorgesetztes $\overline{\Theta}$ die Aenderung, die unsere Schleifenintegrale erfahren haben, so ist

$$\overline{\Theta} A_{h\alpha}$$
$$= \varepsilon \left\{ \int\limits_{(s_0^{-1})} w_{h\alpha}(z-x)^{\xi-1} dx + \varepsilon^{-1} \int\limits_{(s_h)} w_{h\alpha}(z-x)^{\xi-1} dx + \varepsilon^{-1} \varepsilon_{h\alpha} \int\limits_{(s_0)} w_{h\alpha}(z-x)^{\xi-1} dx \right\},$$

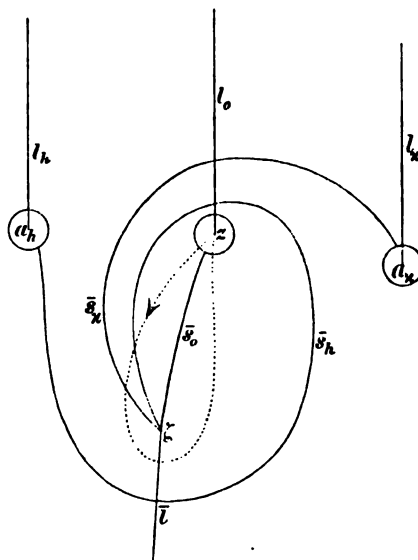


Fig. 14.

oder nach einfacher Reduction

(27) $\overline{\Theta} A_{h\alpha} = A_{h\alpha} - (1 - \varepsilon_{h\alpha}) Z_{h\alpha}$ $(h = 1, 2, \cdots \sigma;\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_h)$,

und ferner

(28) $\overline{\Theta} Z_{h\alpha} = \varepsilon Z_{h\alpha}$ $(h = 1, 2, \cdots \sigma;\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_h)$.

Die Integrale $u_{h\alpha}$ von (E) bleiben bei diesem Umlaufe natürlich ungeändert, wie man auch mit Hülfe der Gleichungen (20), (27), (28) direct verificiren kann.

238. Lineare Combinationen der Schleifenintegrale, die Lösungen der Differentialgleichung liefern. Herstellung eines Fundamentalsystems.

Wir haben in den m Ausdrücken (20) (S. 434) Integrale unserer Differentialgleichung (E) kennen gelernt, die als homogene lineare Verbindungen der Schleifenintegrale

$$A_{i\alpha},\quad Z_\beta \qquad (i = 1, 2, \cdots \sigma;\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_i;\ \beta = 1, 2, \cdots m)$$

dargestellt sind. Wir wollen nun allgemein die Aufgabe behandeln, Systeme von $2m$ Constanten $\gamma_{i\alpha}$, γ_β zu bestimmen, für welche die Summe

$$(29)\qquad u = \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} A_{i\alpha}\gamma_{i\alpha} + \sum_{\beta=1}^{m} Z_\beta \gamma_\beta$$

eine Lösung der Differentialgleichung (E) darstellt.

Zu dem Ende beachten wir, dass zufolge der Gleichung (23) (Nr. 234, S. 421), wenn w eine Lösung der zu (A) adjungirten Differentialgleichung (A′) bedeutet,

$$(30)\qquad E_z\left(\int w(z-x)^{\xi-1}dx\right) = \int d D_x((z-x)^{\xi-1}, w)$$

ist. Der auf der rechten Seite dieser Gleichung auftretende bilineare Differentialausdruck

$$D_x((z-x)^{\xi-1}, w) = \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} (-1)^\lambda \frac{d^\lambda(P_\lambda w)}{dx^\lambda} \frac{d^{\nu-\lambda-1}(z-x)^{\xi-1}}{dx^{\nu-\lambda-1}}$$

hat die Gestalt

$$D_x((z-x)^{\xi-1}, w) = (z-x)^{\xi-m} \sum_{\nu=0}^{m} (z-x)^\nu \sum_{\lambda=0}^{\nu} P_{\nu\lambda}(x) w^{(\lambda)}(x),$$

wo die $P_{\nu\lambda}(x)$ ganze rationale Functionen von x bedeuten, die sich aus den Coefficienten $P_x(x)$ der Differentialgleichung (A) und aus deren Ableitungen zusammensetzen, und $w^{(\lambda)}(x)$ den Werth der λ^{ten} Ableitung des Integrals w im Punkte x darstellt. Es ist folglich nach (30)

$$\begin{aligned} E_z(A_{i\alpha}) &= \int_{(s_i)} d D_x((z-x)^{\xi-1}, w_{i\alpha}) \\ &= (z-\zeta)^{\xi-m} \sum_{\nu=0}^{m-1} (z-\zeta)^\nu \sum_{\lambda=0}^{\nu} P_{\nu\lambda}(\zeta)(\varepsilon_{i\alpha}-1) w_{i\alpha}^{(\lambda)}(\zeta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_z(Z_\beta) &= \int_{(s_0)} d D_x((z-x)^{\xi-1}, w_\beta) \\ &= (z-\zeta)^{\xi-m} \sum_{\nu=0}^{m-1} (\varepsilon-1)(z-\zeta)^\nu \sum_{\lambda=0}^{\nu} P_{\nu\lambda}(\zeta) w_\beta^{(\lambda)}(\zeta), \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} E_z(u) = (z-\zeta)^{\xi-m} &\sum_{\nu=0}^{m-1} (z-\zeta)^\nu \sum_{\lambda=0}^{\nu} P_{\nu\lambda}(\zeta) \\ &\cdot \left\{ \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} \gamma_{i\alpha}(\varepsilon_{i\alpha}-1) w_{i\alpha}^{(\lambda)}(\zeta) + (\varepsilon-1) \sum_{\beta=1}^{m} \gamma_\beta w_\beta^{(\lambda)}(\zeta) \right\}. \end{aligned}$$

Soll dieser Ausdruck identisch, d. h. für jeden Werth von z verschwinden, so muss

$$(31)\qquad \sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{\alpha=1}^{\alpha_i}\gamma_{i\alpha}(\varepsilon_{i\alpha}-1)w_{i\alpha}^{(\lambda)}(\zeta)+(\varepsilon-1)\sum_{\beta=1}^{m}\gamma_\beta w_\beta^{(\lambda)}(\zeta)=0 \qquad (\lambda=0,1,2,\cdots m-1)$$

sein. Dieses System von m linearen homogenen Gleichungen für die $2m$ Unbekannten $\gamma_{i\alpha}$, γ_β ist vom Range m, weil die Determinante

$$\left|(\varepsilon-1)w_\beta^{(\lambda)}(\zeta)\right| \qquad (\beta=1,2,\cdots m;\ \lambda=0,1,\cdots m-1)$$

als Determinante eines Fundamentalsystems in dem regulären Punkte $x=\zeta$ einen von Null verschiedenen Werth hat, sofern ξ keine ganze Zahl, also $\varepsilon \neq 1$ ist. Das System (31) besitzt also (vergl. Nr. 34, Bd. I, S. 113) genau m linear unabhängige Lösungssysteme; die mittelst derselben gebildeten Ausdrücke u stellen folglich ein System linear unabhängiger Lösungen der Differentialgleichung (E) dar (vergl. die analoge Betrachtung in der Nr. 115, Bd. I, S. 416), wenn die $2m$ Schleifenintegrale

$$A_{i\alpha},\ Z_\beta$$

von einander linear unabhängig sind. Dies ist im Allgemeinen (nämlich allemal, wenn die Differentialgleichung (E) irreductibel ist) der Fall, wie wir hier nicht näher ausführen wollen; wir haben also in der That aus den gedachten Schleifenintegralen ein Fundamentalsystem von (E) zusammengesetzt.

Denken wir uns die Integrale $w_{i\alpha}$ durch das Fundamentalsystem

$$w_1,\ w_2,\ \cdots w_m$$

von (A') dargestellt,

$$w_{i\alpha}=\sum_{\beta=1}^{m}\delta_\beta^{(i\alpha)}w_\beta \qquad (i=1,2,\cdots\sigma;\ \alpha=1,2,\cdots\alpha_i)$$

und nehmen in den Gleichungen (31)

$$\gamma_\beta=\gamma\,\delta_\beta^{(\varkappa\nu)} \qquad (\beta=1,2,\cdots m),$$

wo $\varkappa$ eine bestimmte der Zahlen $1, 2, \cdots \sigma$, ν eine bestimmte Zahlen $1, 2, \cdots \alpha_\varkappa$, γ eine Constante bedeutet, dann erhält das System (31) die Form

$$\sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{\alpha=1}^{\alpha_i}\gamma_{i\alpha}(\varepsilon_{i\alpha}-1)w_{i\alpha}^{(\lambda)}(\zeta)+\gamma(\varepsilon-1)w_{\varkappa\nu}^{(\lambda)}(\zeta)=0,$$

und diese Gleichungen werden offenbar durch die Werthe

$$\gamma_{i\alpha} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq \varkappa, \ \alpha \neq \nu,$$

$$\gamma_{\varkappa\nu} = 1 - \varepsilon; \quad \gamma = -(1 - \varepsilon_{\varkappa\nu})$$

erfüllt, denen das Integral

$$u_{\varkappa\nu} = (1 - \varepsilon) A_{\varkappa\nu} - (1 - \varepsilon_{\varkappa\nu}) Z_{\varkappa\nu}$$

der Differentialgleichung (E) entspricht. Es kommen also auf diese Weise für

$$\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma; \quad \nu = 1, 2, \cdots \alpha_\varkappa$$

die über die σ Doppelschleifen

$$(a_\varkappa, z) = s_\varkappa s_0 s_\varkappa^{-1} s_0^{-1}$$

erstreckten Integrale zum Vorschein.

Wenn $\varepsilon \neq 1$, d. h. ξ keine ganze Zahl ist, so sind diese m Integrale $u_{\varkappa\nu}$ auch linear unabhängig. Es bilden nämlich die m Coefficientensysteme $\gamma_{i\alpha}$, γ_β, die zu denselben führen, ein System von $m \cdot 2m$ Grössen, in welchem die aus den m^2 Grössen $\gamma_{i\alpha}$ gebildete Determinante den Werth

$$(\varepsilon - 1)^m$$

hat; diese m Systeme $\gamma_{i\alpha}$, γ_β sind also (vergl. Nr. 34, Bd. I, S. 113) für $\varepsilon \neq 1$ linear unabhängig.

Ist $\varepsilon = 1$ und ξ eine negative ganze Zahl oder Null, so sind in (31) die $\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_m$ willkürlich, d. h. wir haben in

$$Z_1, \ Z_2, \cdots Z_m$$

ein Fundamentalsystem von (E). Für $\xi = 0$ ist (E) nichts anderes als die mit der unabhängigen Variabeln z geschriebene adjungirte Differentialgleichung von (A) (Nr. 234, S. 422). In diesem Falle sind die Z_β einfach die Darstellungen der $w_\beta(z)$ durch das Cauchy'sche Integral

$$w_\beta(z) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} Z_\beta = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{(s_0)}^{z} w_\beta(x)(z - x)^{-1} dx.$$

Wenn ξ gleich der negativen ganzen Zahl $-\nu$ ist, so haben wir

$$\frac{d^\nu w_\beta(z)}{dz^\nu} = \frac{(-1)^{\nu+1} \nu!}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{(s_0)}^{z} w_\beta(x)(z - x)^{-\nu-1} dx,$$

und (E) ist demnach die mit der unabhängigen Variabeln z geschriebene Differentialgleichung, der die ν^{ten} Ableitungen der Integrale der zu (A) adjungirten Differentialgleichung genügen.

Die letztere Bemerkung ist noch einer wesentlichen Verallgemeinerung fähig, die uns zu wichtigen Folgerungen Veranlassung geben wird.

deutet A eine[...] . 234 (S. 421) erfüllt ist, [...]ng (A'), so ist

$$u = \int_{(A)} w(z-x)^{\xi-1}\,dx$$

Lösung von (E). Differentiiren wir dieselbe ν-mal nach z, indem unter dem Integralzeichen differentiiren, so kommt

$$\frac{d^\nu u}{dz^\nu} = \int_{(A)} w(\xi-1)(\xi-2)\cdots(\xi-\nu)(z-x)^{\xi-\nu-1}\,dx;$$

s ist folglich die ν^{te} Ableitung der Lösung u von (E) eine Lösung derjenigen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, die wir erhalten, wenn wir in (E) an die Stelle von ξ setzen $\xi-\nu$.

Wir wollen im Folgenden, wenn es sich als nöthig erweist, den Coefficienten der Differentialgleichung (E) noch das zweite Argument ξ hinzufügen und statt (E) auch (E_ξ) schreiben, so dass also die Bezeichnung

$$(E_\xi) \qquad E_z(u;\xi) = Q_m(z,\xi)\frac{d^m u}{dz^m} + \cdots + Q_0(z,\xi)u = 0$$

zu gelten hat. Es lässt sich dann direct zeigen, dass die Differentialgleichung

$$(E_{\xi+1}) \qquad E_z(U;\xi+1) = Q_m(z,\xi+1)\frac{d^m U}{dz^m} + \cdots + Q_0(z,\xi+1)U = 0$$

so beschaffen ist, dass die Ableitungen ihrer Lösungen

$$(32) \qquad u = \frac{dU}{dz}$$

die Differentialgleichung (E_ξ) befriedigen. In der That folgt, wenn wir (E_ξ) nach z differentiiren und beachten, dass $Q_0(z,\xi)$ eine von z unabhängige Grösse ist, für U die Gleichung

$$Q_m(z,\xi)\frac{d^m U}{dz^m} + \sum_{\nu=0}^{m-1}\left[Q'_{\nu+1}(z,\xi) + Q_\nu(z,\xi)\right]\frac{d^\nu U}{dz^\nu} = 0,$$

und diese ist mit ($E_{\xi+1}$) identisch, wie man mit Hülfe der Formel

$$Q_\nu(x,\xi) = (-1)^\nu \sum_{\varkappa=\nu}^{m} \frac{(\xi-1)(\xi-2)\cdots(\xi-\varkappa)}{(\xi-1)(\xi-2)\cdots(\xi-\nu)}\,\frac{P_\varkappa^{(\varkappa-\nu)}(x)}{(\varkappa-\nu)!}$$

239. Differentialgleichungen, die zu derselben Classe gehören.

Betrachtet man allgemein die Differentialgleichung

$$(\mathrm{E}_{\xi+\nu}) \qquad E_z(\mathfrak{U}, \xi + \nu) = 0,$$

wo ν eine positive ganze Zahl bedeutet, so sind ihre Lösungen in der Form

$$\mathfrak{U} = \int_{(A)}^{z} w\,(z - x)^{\xi+\nu-1}\,dx$$

darstellbar, und die ν^{ten} Ableitungen dieser Lösungen genügen der Differentialgleichung (E_ξ), d. h. es ist

$$u = \frac{d^\nu \mathfrak{U}}{dz^\nu}.$$

Daraus folgt, dass alle Differentialgleichungen (E_ξ), (E_η), in denen sich ξ und η nur durch ganze Zahlen unterscheiden, nothwendig zur selben Classe gehören.

Von der Thatsache ausgehend, dass die m Integrale $u_{i\alpha}$ ein Fundamentalsystem von (E_ξ) darstellen, kann man dies auch aus den Formeln (α) und (β) der Nr. 237 (S. 434, 435) erschliessen. In der That hat die Differentialgleichung (E_ξ) für jedes ξ die singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \infty$. Die Formeln (α), (β), welche die Substitutionen darstellen, die ein Fundamentalsystem von (E_ξ) erfährt, wenn z Umläufe um diese singulären Stellen beschreibt, bleiben ungeändert, wenn man ξ um ganze Zahlen vermehrt oder vermindert, da sie das ξ nur in der Form

$$\varepsilon = e^{2\pi\xi\sqrt{-1}}$$

enthalten. Da (E_ξ) überdies zur Fuchs'schen Classe gehört, so folgt hieraus gemäss den Sätzen der Nr. 222 (S. 366) die Richtigkeit unserer Behauptung.

Die Beziehung zwischen den abhängigen Variabeln der Differentialgleichungen (E_ξ) und $(\mathrm{E}_{\xi+1})$ kann man auch leicht in der Form darstellen, dass U durch u und seine Ableitungen ausgedrückt erscheint. Es ist nämlich nach (32)

$$\frac{d^{m-1}u}{dz^{m-1}} = \frac{d^m U}{dz^m},$$

also mit Benutzung der Differentialgleichung $(\mathrm{E}_{\xi+1})$

$$\frac{d^{m-1}u}{dz^{m-1}} = -\left\{\frac{Q_{m-1}(z,\xi+1)}{Q_m(z,\xi+1)}\frac{d^{m-2}u}{dz^{m-2}} + \cdots + \frac{Q_1(z,\xi+1)}{Q_m(z,\xi+1)}u + \frac{Q_0(z,\xi+1)}{Q_m(z,\xi+1)}U\right\},$$

und hieraus folgt, wenn wir den constanten Factor $Q_0(z, \xi + 1)$ unterdrücken,

$$(33) \qquad -U = Q_m(z, \xi + 1)\frac{d^{m-1}u}{dz^{m-1}} + Q_{m-1}(z, \xi + 1)\frac{d^{m-2}u}{dz^{m-2}} + \cdots + Q_1(z, \xi + 1)u.$$

Gehen wir statt von der Differentialgleichung (A) von einer mit (A) zur selben Art gehörigen Differentialgleichung (B) aus, so gehören (Nr. 174, S. 154) auch die adjungirten Differentialgleichungen (A′) und (B′) zu einer und derselben Art. Die abhängige Variable $\mathfrak{w}$ der Differentialgleichung (B′) wird also durch w und dessen Ableitungen in der Form

$$(34) \qquad \mathfrak{w} = g_0 w + g_1 \frac{dw}{dx} + \cdots + g_{m-1}\frac{d^{m-1}w}{dx^{m-1}}$$

dargestellt, wo die $g_0, g_1, \cdots g_{m-1}$ (von z unabhängige) rationale Functionen von x bedeuten. Wir fragen nun: wie müssen diese rationalen Functionen beschaffen sein, damit auch die Differentialgleichung (E), deren Euler'sche Transformirte (A′) ist, mit der Differentialgleichung

$$(F) \qquad F_z(\mathfrak{u}) = 0,$$

deren Euler'sche Transformirte durch (B′) dargestellt wird, zur selben Art gehöre? Es handelt sich dann um die Untersuchung der Ausdrücke

$$\int_{(A)}^{z} \mathfrak{w}(z - x)^{\eta - 1} dx,$$

wo $\mathfrak{w}$ durch die Gleichung (34) gegeben und die Differenz $\eta - \xi$ eine positive ganze Zahl ist.

Bezeichnen wir die den $w_{i\alpha}, w_{\beta}$ entsprechenden Integrale von (B′) durch $\mathfrak{w}_{i\alpha}, \mathfrak{w}_{\beta}$ und setzen

$$\mathfrak{u}_{i\alpha} = \int_{(z_i z_0 z_i^{-1} z_0^{-1})}^{z} \mathfrak{w}_{i\alpha}(z - x)^{\eta - 1} dx,$$

so befriedigen diese Ausdrücke bei geeigneter Wahl von η die Differentialgleichung (F), und es werden die Substitutionen, welche die $\mathfrak{u}_{i\alpha}$ bei Umläufen von z um die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ erleiden, mit den entsprechenden Substitutionen der $u_{i\alpha}$ übereinstimmen, wenn

1) die Differentialgleichungen (A′) und (B′) nicht nur zur selben Art, sondern zur selben Classe gehören,

2) die den Integralen

$$w_{i\alpha} \qquad (\alpha = \alpha_i + 1, \cdots m;\ i = 1, 2, \cdots \sigma)$$

von (A′) entsprechenden Integrale $\mathfrak{w}_{i\alpha}$ von (B′) in der Umgebung von $x = a_i$ auch regulär sind.

In diesem Falle lässt sich nämlich zunächst jedes über einen beliebigen geschlossenen Weg A erstreckte Integral

$$\int\limits_{(A)}^{\bullet} \mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1}\,dx$$

aus Integralen von der Form

$$\int\limits_{(a_i)}^{\bullet} \mathfrak{w}_{i\alpha}(z-x)^{\eta-1}\,dx, \quad \int\limits_{(x_0)}^{\bullet} \mathfrak{w}_{\beta}(z-x)^{\eta-1}\,dx \qquad \begin{pmatrix} \alpha=1,2,\cdots\alpha_i \\ i=1,2,\cdots\sigma \\ \beta=1,2,\cdots m \end{pmatrix}$$

zusammensetzen. Wir bemerken gleich, dass dies im Allgemeinen nicht möglich wäre, wenn die Differentialgleichung (B′) ausser den $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ noch singuläre Stellen enthielte, in deren Umgebung die Integrale $\mathfrak{w}$ zwar eindeutig wären, aber wie rationale Functionen unendlich würden, denn dann wäre das über einen geschlossenen Weg, der einen solchen Unendlichkeitspunkt umschliesst, erstreckte Integral

$$\int \mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1}\,dx$$

im Allgemeinen von Null verschieden. Es würde nur dann verschwinden, wenn das Cauchy'sche Résidu von

$$\mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1}$$

in Bezug auf jene Unendlichkeitsstelle gleich Null wäre. Dann könnte aber im Allgemeinen $\mathfrak{w}$ nicht mehr von z unabhängig sein; wir beschränken uns deshalb auf den Fall, wo (B′) und (A′) zur selben Classe gehören.

Ferner sind, wenn die Bedingungen 1), 2) erfüllt sind, die Uebergangssubstitutionen, welche die Integralsysteme

$$\mathfrak{w}_{i\alpha}, \quad \mathfrak{w}_{\varkappa\alpha} \qquad (i \neq \varkappa,\ \alpha=1,2,\cdots m)$$

mit einander verbinden, dieselben, wie die für die entsprechenden Lösungen von (A′) bestehenden, so dass also in der That die Formeln (α), (β) der Nr. 237 (S. 434, 435) die Aenderungen der $\mathfrak{u}_{i\alpha}$ bei Umläufen von z wiedergeben. Da endlich die wesentlich singulären Stellen von (F) keine anderen sein können wie eben die $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \infty$, so gehören, wenn die Bedingungen 1), 2) erfüllt sind, (E) und (F) zur selben Classe.

Dazu ist jedoch noch Folgendes zu bemerken.

Im Allgemeinen wird die Differentialgleichung (B′) ausser den wesentlich singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \infty$ noch gewisse ausserwesentlich singuläre Punkte $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$ enthalten. Für (A) und (A′) hatten wir durch die den singulären Punkten $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ auferlegten Bedingungen das Auftreten von ausserwesentlichen singulären Stellen

ausgeschlossen. Der Coefficient der m^{ten} Ableitung in (B') wird also im Allgemeinen von höherem als dem m^{ten} Grade, etwa vom Grade

$$\overline{m} > m$$

sein; entsprechend wird also die Differentialgleichung (F), deren Euler'sche Transformirte (B') ist, nicht von der m^{ten}, sondern von der $\overline{m}^{ten}$ Ordnung und in den $\mathfrak{u}_{i\alpha}$ für η der Werth $\xi + \overline{m} - m$ zu nehmen sein.

Aber die m Integrale $\mathfrak{u}_{i\alpha}$ von (F) sind so beschaffen, dass sie sich bei allen Umläufen von z in lineare homogene Functionen ihrer selbst verwandeln; sie genügen folglich nach einem wiederholt angewandten Principe einer homogenen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung der Fuchs'schen Classe

$$(\overline{\mathrm{F}}) \qquad \overline{F}_z(\mathfrak{u}) = 0,$$

die ihre sämmtlichen Integrale mit (F) gemein hat. Die linke Seite von (F) ist demnach in der Form

$$F_z(\mathfrak{u}) = G\overline{F}_z(\mathfrak{u})$$

darstellbar, wo G einen homogenen linearen Differentialausdruck von der Ordnung $\overline{m} - m$ mit rationalen Coefficienten bedeutet; in diesem Falle ist also (F) reductibel.

Aehnliches gilt offenbar, wenn die Differentialgleichung (A), von der wir ausgingen, so beschaffen ist, dass ihre adjungirte (A') ausserwesentliche singuläre Stellen besitzt. In diesen Fällen werden wir dann nicht (F) selbst, sondern die Differentialgleichung m^{ter} Ordnung ($\overline{\mathrm{F}}$) als diejenige ansehen, deren Euler'sche Transformirte durch (B') gegeben wird. Man erkennt auch leicht, dass die Art und Weise, wie wir in dem Falle, wo der unendlich ferne Punkt keine Unbestimmtheitsstelle der Differentialgleichung (A) war, die Differentialgleichung (𝔄) der Nr. 233 (S. 415) durch (E) ersetzten, sich in den hier dargelegten Gedankengang einfügt. Unter Festhaltung der bisherigen Annahmen über die Beschaffenheit von (A) wird stets, wenn die Bedingungen 1), 2) erfüllt sind, ($\overline{\mathrm{F}}$) mit (E) zur selben Classe gehören.

240. Besondere Fälle von Differentialgleichungen derselben Classe.

Die Bedingungen 1), 2) sind offenbar erfüllt, wenn in der Beziehung (34) die $g_0, g_1, \cdots g_{n-1}$ ganze rationale Functionen bedeuten; wir wollen uns die Aufgabe stellen, in diesem besonderen Falle aus der als gegeben zu betrachtenden Beziehung (34) die Beziehung zwischen den abhängigen Variabeln u und $\mathfrak{u}$ von (E) und ($\overline{\mathrm{F}}$) herzuleiten.

Sei $\nu_\varkappa$ der Grad der ganzen Function $g_\varkappa$, dann ist, wenn wir nach
enzen von $x - z$ entwickeln,

$$g_\varkappa(x) = \sum_{i=0}^{\nu_\varkappa} \frac{g_\varkappa^{(i)}(z)}{i!}(x-z)^i \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots m-1),$$

ergiebt sich, indem wir beide Seiten der Gleichung (34) mit

$$(z-x)^{\eta-1}dx$$

tipliciren und auf einem Wege A, für den die Gleichung (27) der
234 (S. 421) erfüllt ist, integriren,

$$\int\limits_{(A)} \mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1}dx = \sum_{\varkappa=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{\nu_\varkappa} \frac{g_\varkappa^{(i)}(z)}{i!}(-1)^i \int\limits_{(A)} \frac{d^\varkappa w}{dx^\varkappa}(z-x)^{\eta+i-1}dx.$$

Nun folgt aber aus der partiellen Integrationsformel (Nr. 20,
I, S. 54) für ein beliebiges ζ

$$\int\limits_{(A)} \frac{d^\varkappa w}{dx^\varkappa}(z-x)^{\zeta-1}dx = \int\limits_{(A)} d\sum_{h=0}^{\varkappa-1}(-1)^h \frac{d^h(z-x)^{\zeta-1}}{dx^h}\,\frac{d^{\varkappa-h-1}w}{dx^{\varkappa-h-1}}$$
$$+(-1)^\varkappa \int\limits_{(A)} w\,\frac{d^\varkappa}{dx^\varkappa}[(z-x)^{\zeta-1}]dx;$$

nn also, wie wir voraussetzen können, der Integrationsweg A so
wählt ist, dass längs desselben fortgesetzt sowohl w als auch

$$(z-x)^{\zeta-1}$$

ihren Ausgangswerthen zurückkehren (dies ist z. B. für die Doppel-
leifen

$$s_i s_0 s_i^{-1} s_0^{-1} \qquad (i = 1, 2, \cdots \sigma)$$

ts der Fall), so fällt das erste Integral auf der rechten Seite weg,
l wir erhalten

$$\int\limits_{(A)} \frac{d^\varkappa w}{dx^\varkappa}(z-x)^{\zeta-1}dx = (\zeta-1)(\zeta-2)\cdots(\zeta-\varkappa)\int\limits_{(A)} w(z-x)^{\zeta-\varkappa-1}dx.$$

Es ist folglich

$$) \quad \int\limits_{(A)} \mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1}dx$$

$$\sum_{\varkappa=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{\nu_\varkappa}(-1)^i \frac{(\eta+i-1)\cdots(\eta+i-\varkappa)}{1\cdot 2\cdots i}\,g_\varkappa^{(i)}(z)\int\limits_{(A)} w(z-x)^{\eta+i-\varkappa-1}dx;$$

eichnen wir also den grössten Werth, den die ganze Zahl

$$\eta - \xi + i - \varkappa \qquad (i = 0, 1, \cdots \nu_\varkappa;\ \varkappa = 0, 1, \cdots m-1)$$

anzunehmen vermag, durch ν und setzen wie oben (S. 441)

$$\int\limits_{(A)} w(z-x)^{\xi+\nu-1}dx = \mathfrak{U},$$

so erhalten wir aus (35), wenn wir rechter Hand zusammenziehen und mit Hülfe der Differentialgleichung $(E_{\xi+\nu})$, der $\mathfrak{U}$ genügt, die Ableitungen höherer als $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung wegschaffen,

$$(36)\qquad \int\limits_{(A)} \mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1}dx = R_0\,\mathfrak{U} + R_1\frac{d\mathfrak{U}}{dz} + \cdots + R_{m-1}\frac{d^{m-1}\mathfrak{U}}{dz^{m-1}},$$

wo $R_0, R_1, \cdots R_{m-1}$ rationale Functionen von z bedeuten, deren Nenner nur für $a_1, a_2, \cdots a_\alpha$ verschwinden können, und die sich aus den $g_x^{(i)}(z)$, aus den Coefficienten

$$Q_i(z, \xi+\nu) \qquad (i=0, 1, \cdots m)$$

der Differentialgleichung $(E_{\xi+\nu})$ und deren Ableitungen in einfacher Weise zusammensetzen; besonders zu bemerken ist, dass diese $R_0, R_1, \cdots R_{m-1}$ von der speciellen Wahl des Integrationsweges A unabhängig sind.

Nun können wir durch wiederholte Anwendung der Formel (33) $\mathfrak{U}$ und seine Ableitungen durch das entsprechende Integral

$$u = \int\limits_{(A)} w(z-x)^{\xi-1}dx$$

von (E) darstellen; dies in (36) eingesetzt giebt dann die explicite Darstellung von

$$\mathfrak{u} = \int\limits_{(A)} \mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1}dx$$

durch u und dessen $m-1$ erste Ableitungen, und damit zugleich die gesuchte Beziehung, die den Uebergang von (E) zu $(\bar{\text{F}})$ vermittelt.

Die eben angedeutete Rechnung kann in genau derselben Weise durchgeführt werden, wenn η gleich einer von ξ um eine beliebige ganze Zahl verschiedenen Grösse genommen wird. Die Ausdrücke $\mathfrak{u}$ befriedigen dann eine mit $(\bar{\text{F}})$ zu derselben Classe gehörige Differentialgleichung m^{ter} Ordnung.

Mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung betrachten wir noch den besonderen Fall

$$(37)\qquad \mathfrak{w} = g_0(x)\,w,$$

wo $g_0(x)$ eine ganze rationale Function von höchstens $(\sigma-1)^{\text{tem}}$ Grade ist. Setzen wir

$$\text{(38)}\qquad \int\limits_{(A)} w(z-x)^{\xi+\sigma-2}dx = \mathfrak{U}^{(\sigma-1)},$$

so ist

$$\int\limits_{(A)} w(z-x)^{\xi+\sigma-i-2}dx = \frac{1}{(\xi+\sigma-2)\cdots(\xi+\sigma-i-1)}\frac{d^i\,\mathfrak{U}^{(\sigma-1)}}{dz^i};$$

also haben wir, wenn wir in $\mathfrak{u}$ einfach ξ an die Stelle von η setzen,

$$\text{(39)}\qquad \mathfrak{u} = \int\limits_{(A)} g_0(x)w(z-x)^{\xi-1}dx = (-1)^{\sigma-1}\frac{g_0^{(\sigma-1)}(z)}{(\sigma-1)!}\,\mathfrak{U}^{(\sigma-1)}$$

$$+(-1)^{\sigma-2}\frac{g_0^{(\sigma-2)}(z)}{(\sigma-2)!}\,\frac{\dfrac{d\mathfrak{U}^{(\sigma-1)}}{dz}}{\xi+\sigma-2}+\cdots+g_0(z)u;$$

hierin sind dann noch für $\mathfrak{U}^{(\sigma-1)}$ und seine Ableitungen die Ausdrücke derselben durch u und dessen Ableitungen zu setzen.

Drittes Kapitel.

241. **Behandlung einer beliebigen Differentialgleichung der Fuc schen Classe. Die Coefficienten der Uebergangssubstitutioner Reihenentwickelungen der Integrale.**

Wir wollen jetzt von einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ganzen rationalen Coefficienten

$$(1) \qquad \partial_x(\mathfrak{y}) = \sum_{\varkappa=0}^{n} p_\varkappa(x) \frac{d^\varkappa \mathfrak{y}}{dx^\varkappa} = 0$$

ausgehen, in welcher der Coefficient der n^{ten} Ableitung $p_n(x)$ ganze rationale Function vom Grade $m > n$ sein möge. Wir ge von derselben zu einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung über, in wir z. B. setzen

$$(2) \qquad \mathfrak{y} = \frac{d^{m-n} y}{dx^{m-n}}, \quad D_x(y) = \partial_x(\mathfrak{y}),$$

dann sei

$$(\text{A}) \qquad D_x(y) = \sum_{\varkappa=0}^{m} P_\varkappa(x) \frac{d^\varkappa y}{dx^\varkappa} = 0$$

eine Differentialgleichung von der in den vorhergehenden Numm vorausgesetzten Beschaffenheit. Wir haben jetzt

$$P_{\varkappa+m-n}(x) = p_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n),$$

$$P_\lambda(x) = 0 \qquad (\lambda < m - n).$$

Die Differentialgleichungen (1) und (A) gehören offenbar gleichze zur Fuchs'schen Classe; wir nehmen an, dass dies der Fall sei.

Zufolge des Reciprocitätssatzes (Nr. 21, Bd. I, S. 59) hat n dann zwischen den adjungirten Differentialausdrücken von $\partial_x(\mathfrak{y})$ u $D_x(y)$ die Beziehung

$$(3) \qquad D_x'(w) = (-1)^{m-n} \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} \partial_x'(w),$$

und die Beziehung von Lagrange nimmt die Gestalt an

$$f \partial_x\left(\frac{d^{m-n} g}{dx^{m-n}}\right) - (-1)^{m-n} g \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} \partial_x'(f) = \frac{d}{dx} D_x(g, f).$$

Da nun direct, wenn der zu $\partial_x(\mathfrak{y})$ gehörige begleitende bilineare Differentialausdruck durch $\partial_x(g, f)$ bezeichnet wird,

$$f\partial_x\left(\frac{d^{m-n}g}{dx^{m-n}}\right) - \frac{d^{m-n}g}{dx^{m-n}}\partial_x'(f) = \frac{d}{dx}\partial_x\left(\frac{d^{m-n}g}{dx^{m-n}}, f\right)$$

ist, so haben wir, wenn wir f durch eine willkürliche Lösung w der Differentialgleichung

$$(A') \qquad D_x'(w) = 0$$

ersetzen,

$$(4) \qquad \frac{d}{dx}D_x(g, w) = \frac{d}{dx}\partial_x\left(\frac{d^{m-n}g}{dx^{m-n}}, w\right) + \frac{d^{m-n}g}{dx^{m-n}}(c_0 + c_1 x + \cdots + c_{m-n-1}x^{m-n-1}),$$

wo $c_0, c_1, \cdots c_{m-n-1}$ Integrationsconstanten bedeuten, die sämmtlich gleich Null zu nehmen sind, wenn die Function w auch der Differentialgleichung

$$(5) \qquad \partial_x'(w) = 0$$

Genüge leistet.

Sei wie in den vorhergehenden Nummern

$$p_n(x) = P_m(x) = \prod_{i=1}^{\sigma}(x - a_i)^{\alpha_i}, \qquad \sum_{i=1}^{\sigma}\alpha_i = m,$$

und mögen

$$r_{i1}, r_{i2}, \cdots r_{i\alpha_i}, 0, 1, \cdots n - \alpha_i - 1$$

die Wurzeln der zu $x = a_i$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von (1) bedeuten; dann sind die nicht nothwendig ganzzahligen Wurzeln der entsprechenden determinirenden Fundamentalgleichung für die adjungirten Differentialgleichungen von (1) und (A)

$$\sigma_{i\alpha} = -r_{i\alpha} + n - \alpha_i - 1 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots \alpha_i),$$

zu denen für die Differentialgleichung (5) noch die ganzzahligen Wurzeln

$$0, 1, \cdots n - \alpha_i - 1,$$

für die Differentialgleichung (A') ausser diesen noch

$$n - \alpha_i, \cdots m - \alpha_i - 1$$

hinzutreten. Diejenigen Elemente

$$w_{i\alpha} = (x - a_i)^{\sigma_{i\alpha}}\mathfrak{P}_{i\alpha}(x \mid a_i) \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots \alpha_i)$$

des zum Punkte $x = a_i$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems, die zu den Wurzeln

$$\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \cdots \sigma_{i\alpha_i}$$

der determinirenden Fundamentalgleichung als Exponenten gehören, sind für die Differentialgleichungen (A′) und (5) dieselben.

Diese Bemerkungen in Verbindung mit der aus der Gleichung (2) und aus dem Satze von der Vertauschung von Parameter und Argument folgenden Gleichung

$$D_z((z-x)^{\xi-1}) = (\xi-1)\cdots(\xi+n-m)(-1)^{n-m}\partial_x((z-x)^{\xi+n-m-1})$$
$$= E_z((z-x)^{\xi-1})$$

genügen, um zu zeigen, dass die Differentialgleichungen (1) und (A) im Wesentlichen auf dieselbe Differentialgleichung (E) führen, d. h. also, dass (5) und (A′) beide die Integration von (E) nach der Methode von Euler bewirken.

Die Uebergangssubstitution, die zu einem die Punkte a_μ, $a_\varkappa$ verbindenden ganz in der zerschnittenen x-Ebene verlaufenden Wege in Bezug auf die Differentialgleichung (A′) gehört, sei (vergl. Nr. 237, Gleichung (25), S. 435)

$$(6) \qquad w_{\mu\alpha} = \sum_{\lambda=1}^{m} c_{\alpha\lambda}^{(\mu\varkappa)} w_{\varkappa\lambda} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots m),$$

dann müssen die den Werthen $\alpha = 1, 2, \cdots n$ entsprechenden Gleichungen des Systems (6) die zu demselben Wege gehörige Uebergangssubstitution von (5) darstellen. Es sind folglich für $\alpha \leqq n$ die

$$c_{\alpha,n+1}^{(\mu\varkappa)}, c_{\alpha,n+2}^{(\mu\varkappa)}, \cdots c_{\alpha,m}^{(\mu\varkappa)}$$

gleich Null. In den Formeln (α), (β) der Nr. 237 (S. 434, 435), die uns die Fundamentalsubstitutionen des Fundamentalsystems $u_{i\alpha}$ von (E) liefern, kommen nur diejenigen Coefficienten der Uebergangssubstitutionen vor, für welche $\alpha \leqq \alpha_\mu$, $\lambda \leqq \alpha_\varkappa$ ist, d. h. nur die

$$c_{\alpha\lambda}^{(\mu\varkappa)} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\mu;\ \lambda = 1, 2, \cdots \alpha_\varkappa),$$

diese sind also als bekannt anzusehen, wenn man die Uebergangssubstitutionen der Differentialgleichung (5) kennt.

Da zufolge der Formeln (α), (β)

$$\Theta_\varkappa u_{\varkappa\alpha} = \varepsilon\varepsilon_{\varkappa\alpha} u_{\varkappa\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\varkappa)$$

ist, so sind die

$$u_{\varkappa 1}, u_{\varkappa 2}, \cdots u_{\varkappa\alpha_\varkappa}$$

Elemente des zum singulären Punkte $z = a_\varkappa$ gehörigen canonische[n] Fundamentalsystems der Differentialgleichung (E). Nehmen wir für die in der Umgebung von $a_\varkappa$ gelegene Stelle $b_\varkappa$ und beschränken ebenfalls auf die Umgebung des Punktes $a_\varkappa$, bezeichnen wir ferner durc[h]

$$(a_\varkappa, z) = s_\varkappa s_0 s_\varkappa^{-1} s_0^{-1}$$

die von $b_\varkappa$ aus um die Punkte $a_\varkappa$ und z herum gelegte Doppelschleife, so können wir in

$$u_{\varkappa\alpha} = \int\limits_{(a_\varkappa, z)} w_{\varkappa\alpha} (z - x)^{\xi - 1} dx$$

für $w_{\varkappa\alpha}$ seine in der Umgebung von $x = a_\varkappa$ gültige Entwickelung einsetzen und gliedweise integriren. Wenn

(7) $$w_{\varkappa\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu (x - a_\varkappa)^{\nu + \sigma_{\varkappa\alpha}}, \qquad \delta_0 \neq 0$$

ist, so finden wir demgemäss

(8) $$u_{\varkappa\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu \int\limits_{(a_\varkappa, z)} (x - a_\varkappa)^{\nu + \sigma_{\varkappa\alpha}} (z - x)^{\xi - 1} dx.$$

Machen wir in dem unter dem Summenzeichen auftretenden Integrale die Substitution

$$x - a_\varkappa = (z - a_\varkappa) t,$$

so ergiebt sich, da für $x = a_\varkappa$, $t = 0$ und für $x = z$, $t = 1$ wird,

(9) $$\int\limits_{(a_\varkappa, z)} (x - a_\varkappa)^{\nu + \sigma_{\varkappa\alpha}} (z - x)^{\xi - 1} dx$$
$$= (z - a_\varkappa)^{\nu + \sigma_{\varkappa\alpha} + \xi} \int\limits_{(0, 1)} t^{\nu + \sigma_{\varkappa\alpha}} (1 - t)^{\xi - 1} dt,$$

wo $(0, 1)$ eine um die Punkte $0, 1$ der t-Ebene herum gelegte Doppelschleife bedeutet.

242. Euler'sche Integrale erster Gattung. Die determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichung (E). Beziehungen zwischen den Coefficienten der Uebergangssubstitutionen.

Als wir in der Nr. 116 (Bd. I, S. 420 ff.) die analoge Betrachtung für die Laplace'sche Transformirte einer linearen Differentialgleichung durchführten, ergab sich an Stelle des hier auftretenden Integrales

(10) $$\int\limits_{(0, 1)} t^{\nu + \sigma_{\varkappa\alpha}} (1 - t)^{\xi - 1} dt$$

das Integral (a. a. O. Gleichung (53))

$$\int t^{\varrho_\varkappa + \nu} e^{-t} dt,$$

erstreckt über eine von $t = \infty$ ausgehende, längs der realen t-Axe verlaufende, um $t = 0$ herum gelegte Schleife, und wir sahen, dass sich dieses Integral durch das sogenannte Euler'sche Integral zweiter Gattung, welches für Werthe von ϱ, deren realer Theil positiv ist, durch die Formel

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\varrho - 1} dt = \Gamma(\varrho)$$

definirt wird, darstellen lässt in der Form

$$\int t^{\varrho_\varkappa + \nu} e^{-t} dt = (e^{2\pi i \varrho_\varkappa} - 1)\,\Gamma(\varrho_\varkappa + \nu + 1), \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Aehnlich können wir hier das Integral (10) darstellen durch das Euler'sche Integral erster Gattung

$$\int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \mathrm{B}(p, q).$$

In dieser Formel muss, damit das Integral einen Sinn habe, sowohl p als auch q einen positiven realen Theil besitzen. Unter dieser Voraussetzung lässt sich nämlich das Integral über die Doppelschleife (0, 1)

$$\int_{(0,1)} t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$$

als ein Aggregat von geradlinigen, zwischen den Punkten 0 und 1 er-streckten Integralen darstellen, wenn wir uns den Punkt τ, von welche aus die um die Punkte 0, 1 herum zu legenden Schleifen ausgehe auf der realen Axe der t-Ebene zwischen 0 und 1 angenommen un die Schleifenwege selbst längs der realen Axe verlaufend denke Es ist dann offenbar

$$\int_{(0,1)} t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \int_1^0 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt + e^{2\pi i p} \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}$$
$$+ e^{2\pi i (p+q)} \int_1^0 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt + e^{2\pi i q} \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} d$$

d. h. also, wenn wir zusammenziehen und voraussetzen, dass in d ersten Integrale auf der rechten Seite der Integrand real positiv genommen werde,

$$(11) \qquad \int_{(0,1)} t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = -(1 - e^{2\pi i p})(1 - e^{2\pi i q})\,\mathrm{B}(p, q).$$

Diese Gleichung kann dann als Definition der Function $\mathrm{B}(p, q)$ willkürliche Werthenpaare p, q angesehen werden.

Das Integral (10) erhält also den Werth

$$(1-\varepsilon_{\varkappa\alpha})(\varepsilon-1)\mathrm{B}(\sigma_{\varkappa\alpha}+\nu+1,\xi),$$

und wir finden demnach mit Rücksicht auf die Gleichungen (8) und (9) für $u_{\varkappa\alpha}$ die Entwickelung

$$(12)\qquad u_{\varkappa\alpha}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu(1-\varepsilon_{\varkappa\alpha})(\varepsilon-1)\mathrm{B}(\sigma_{\varkappa\alpha}+\nu+1,\xi)(z-a_\varkappa)^{\sigma_{\varkappa\alpha}+\xi+\nu}.$$

Hieraus folgt, dass $u_{\varkappa\alpha}$ zum Exponenten $\sigma_{\varkappa\alpha}+\xi$ gehört; die zum Punkte $z=a_\varkappa$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (E) besitzt demnach die Wurzeln

$$(13)\qquad \sigma_{\varkappa\alpha}+\xi \qquad (\alpha=1,2,\cdots\alpha_\varkappa).$$

Ferner muss diese Gleichung durch die ganzen Zahlen

$$0,\ 1,\ \cdots m-\alpha_\varkappa-1$$

befriedigt werden, da der Coefficient der m^{ten} Ableitung in (E) den linearen Factor $z-a_\varkappa$ nur zur $\alpha_\varkappa^{\text{ten}}$ Potenz enthält; es sind also auf diese Weise die sämmtlichen Lösungen der determinirenden Fundamentalgleichungen von (E), soweit dieselben sich auf die im Endlichen gelegenen singulären Punkte beziehen, bekannt.

Wir bezeichnen mit

$$u_{\varkappa,\alpha_\varkappa+1},\ \cdots u_{\varkappa m}$$

die zu den Exponenten $0, 1, \cdots m-\alpha_\varkappa-1$ gehörigen Elemente des dem Punkte $z=a_\varkappa$ entsprechenden canonischen Fundamentalsystems, und es möge

$$(14)\qquad u_{\varkappa\alpha}=\sum_{\lambda=1}^{m}\gamma_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)}u_{h\lambda} \qquad (\alpha=1,2,\cdots m;\ \varkappa\neq h)$$

die Uebergangssubstitution darstellen, welche einem zwischen den singulären Punkten $a_\varkappa$, a_h ganz innerhalb der durch die Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_\sigma$ zerschnittenen z-Ebene verlaufenden Wege entspricht. Dann ist

$$\Theta_h u_{h\alpha}=\varepsilon\varepsilon_{h\alpha}u_{h\alpha} \qquad (\alpha=1,2,\cdots\alpha_h),$$

$$\Theta_h u_{h\beta}=u_{h\beta} \qquad (\beta=\alpha_h+1,\cdots m),$$

also haben wir

$$(15)\qquad u_{\varkappa\alpha}-\Theta_h u_{\varkappa\alpha}=\sum_{\lambda=1}^{\alpha_h}\gamma_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)}(1-\varepsilon\varepsilon_{h\lambda})u_{h\lambda} \qquad (\varkappa\neq h).$$

Vergleichen wir diese Gleichungen für $\alpha=1,2,\cdots\alpha_\varkappa$ mit den aus den Umlaufssubstitutionen (α), (β) der Nr. 237 (S. 434, 435) sich ergebenden Formeln.

Um die Vorstellung zu fixiren, wollen wir annehmen, der Punkt z befinde sich bei der durch die Fig. 11 (S. 429) dargestellten Lage ausserhalb des durch l_1, s_1, s_σ, l_σ begrenzten Ebenentheiles, so dass also $i = \sigma$ zu nehmen ist. Dann ist zufolge der Formeln (α)

$$(16)\quad \begin{cases} \Theta_h u_{h\alpha} = \varepsilon\varepsilon_{h\alpha} u_{h\alpha} & (\alpha = 1, 2, \cdots \alpha_h), \\ \Theta_h u_{\varkappa\alpha} = u_{\varkappa\alpha} - (1 - \varepsilon_{\varkappa\alpha}) \sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)} u_{h\lambda} & (\varkappa = h+1, \cdots \sigma;\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\varkappa), \\ \Theta_h u_{\varkappa\alpha} = u_{\varkappa\alpha} - \varepsilon(1 - \varepsilon_{\varkappa\alpha}) \sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)} u_{h\lambda} & (\varkappa = 1, 2, \cdots h-1;\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\varkappa), \end{cases}$$

und folglich

$$(17)\quad \begin{cases} u_{\varkappa\alpha} - \Theta_h u_{\varkappa\alpha} = (1 - \varepsilon_{\varkappa\alpha}) \sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)} u_{h\lambda} & (\varkappa > h), \\ u_{\varkappa\alpha} - \Theta_h u_{\varkappa\alpha} = \varepsilon(1 - \varepsilon_{\varkappa\alpha}) \sum_{\lambda=1}^{\alpha_h} c_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)} u_{h\lambda} & (\varkappa < h). \end{cases}$$

Wir finden also durch Vergleichung mit (15), wenn wir beachten, dass die

$$u_{h\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots \alpha_h)$$

linear unabhängig sind,

$$(18)\quad \begin{cases} (1 - \varepsilon_{\varkappa\alpha}) c_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)} = (1 - \varepsilon\varepsilon_{h\lambda}) \gamma_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)} & (\varkappa > h), \\ \varepsilon(1 - \varepsilon_{\varkappa\alpha}) c_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)} = (1 - \varepsilon\varepsilon_{h\lambda}) \gamma_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)} & (\varkappa < h) \\ (\alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\varkappa;\ \lambda = 1, 2, \cdots \alpha_h). \end{cases}$$

Aus diesen Formeln lassen sich diejenigen Coefficienten der Uebergangssubstitution (14) berechnen, für welche

$$\alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\varkappa; \quad \lambda = 1, 2, \cdots \alpha_h$$

ist; die Anzahl derselben ist also $\alpha_h \alpha_\varkappa$.

Betrachtet man die zur Substitution (14) inverse

$$u_{h\lambda} = \sum_{\alpha=1}^{m} \gamma_{\lambda\alpha}^{(h\varkappa)} u_{\varkappa\alpha} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots m),$$

so ergiebt sich genau ebenso

$$(19)\quad \begin{cases} (1 - \varepsilon_{h\lambda}) c_{\lambda\alpha}^{(h\varkappa)} = (1 - \varepsilon\varepsilon_{\varkappa\alpha}) \gamma_{\lambda\alpha}^{(h\varkappa)} & (h > \varkappa), \\ \varepsilon(1 - \varepsilon_{h\lambda}) c_{\lambda\alpha}^{(h\varkappa)} = (1 - \varepsilon\varepsilon_{\varkappa\alpha}) \gamma_{\lambda\alpha}^{(h\varkappa)} & (h < \varkappa) \\ (\lambda = 1, 2, \cdots \alpha_h;\ \alpha = 1, 2, \cdots \alpha_\varkappa); \end{cases}$$

beachtet man dann, dass ebenso wie die Systeme

$$\left(\gamma_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)}\right), \quad \left(\gamma_{\lambda\alpha}^{(h\varkappa)}\right) \qquad (\alpha, \lambda = 1, 2, \cdots m)$$

auch die Systeme

$$\left(c_{\alpha\lambda}^{(\varkappa h)}\right), \quad \left(c_{\lambda\alpha}^{(h\varkappa)}\right) \qquad (\alpha, \lambda = 1, 2, \cdots m)$$

zu einander inverse Substitutionen darstellen, so erkennt man, dass die Gleichungssysteme (18), (19) eigenthümliche Relationen zwischen den Coefficienten der Uebergangssubstitutionen liefern. Wir werden auf diese Relationen in einem sogleich näher zu bezeichnenden speciellen Falle zurückzukommen haben.

243. Die Tissot-Pochhammer'sche Differentialgleichung. Substitutionen, die Umläufen um die singulären Punkte entsprechen. Differentialgleichungen, die zur selben Classe gehören. Die Fundamentalsubstitutionen sind von den singulären Punkten unabhängig.

Der besondere Fall, auf dessen genauere Discussion wir jetzt eingehen wollen, steht zu den hier durchgeführten allgemeinen Betrachtungen in einer ähnlichen Beziehung, wie die in der Nr. 114 (Bd. I, S. 409ff.) behandelte Laplace'sche Differentialgleichung zu der allgemeinen Theorie der Laplace'schen Transformirten.

Wir nehmen nämlich die Ordnung n der Differentialgleichung (1) (Nr. 241, S. 448) gleich Eins, dann muss, damit diese Gleichung

$$\text{(I)} \qquad p_1(x)\frac{d\mathfrak{y}}{dx} + p_0(x)\mathfrak{y} = 0$$

der Fuchs'schen Classe angehört, die ganze Function $p_1(x)$ lauter einfache lineare Factoren enthalten. Wir haben also

$$\sigma = m, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 1$$

und folglich

$$\text{(1)} \qquad P_m(x) = p_1(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_m).$$

Die ganze Function

$$P_{m-1}(x) = p_0(x)$$

ist vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade; sei in Partialbrüche zerlegt

$$\text{(2)} \qquad \frac{P_{m-1}(x)}{P_m(x)} = \sum_{\varkappa=1}^{m} \frac{\beta_\varkappa}{x - a_\varkappa},$$

dann lautet die allgemeine Lösung der zu (I) adjungirten Differentialgleichung

$$\text{(I')} \qquad -\frac{d}{dx}(P_m w) + P_{m-1} w = 0,$$

wenn wir von einer multiplicativen willkürlichen Constanten absehen,

$$\text{(3)} \qquad w_{i1} = (x - a_1)^{\beta_1 - 1}(x - a_2)^{\beta_2 - 1}\cdots(x - a_m)^{\beta_m - 1} = w_1 \quad (i = 1, 2, \cdots m),$$

st folglich

$$\sigma_{i1} = \beta_i - 1, \quad \varepsilon_{i1} = \varepsilon_i = e^{2\pi\beta_i\sqrt{-1}}.$$

e Coefficienten der Differentialgleichung (E), deren Euler'sche
ormirte durch (I') dargestellt wird, ergeben sich aus den For
(γ) der Nr. 238 (S. 440) nach leichten Umformungen in d
lt

$$Q_\nu(z) = \frac{(-1)^{m-\nu-1}}{(\xi-1)\cdots(\xi-m+1)} \cdot \{(\xi-\nu-1)_{m-\nu} P_m^{(m-\nu)}(z) + (\xi-\nu-1)_{m-\nu-1} P_{m-1}^{(m-\nu-1)}(\ldots$$

r nennen die Differentialgleichung (E), deren Coefficienten
iese Ausdrücke gegeben werden, die Tissot-Pochhamme
Differentialgleichung, weil sie zuerst von Herrn Pochhamme
gestellt worden ist, nachdem Tissot bereits früher eine Diff
gleichung von ähnlicher Gestalt untersucht hatte.

Auf Grund der vorhergehenden allgemeinen Betrachtunge
wir die Integration der Tissot-Pochhammer'schen Differ
chung als vollzogen ansehen; wir stellen zunächst die Re
dieselbe zusammen.

Jeder der im Endlichen gelegenen singulären Punkte
von (E) ist ein einfacher singulärer Punkt im Sinne
(Bd. I, S. 401); die zu $z = a_\kappa$ gehörige determinirende
gleichung hat die Wurzeln

$$\beta_\kappa + \xi - 1,\ 0,\ 1, \ldots m - 2.$$

Wir setzen der Einfachheit wegen voraus, dass weder
ganze Zahlen sind. Dann ist

$$u_{\kappa 1} = u_\kappa = \int_{(s_\kappa s_0 s_\kappa^{-1} s_0^{-1})} w_1 (z-x)^{\xi-1} dx$$

das zum Exponenten $\beta_\kappa + \xi - 1$ gehörige Element
hörigen canonischen Fundamentalsystems, und die

$$u_1, u_2, \ldots u_m$$

constituiren ein Fundamentalsystem für die Diffe

Wenn wir die Fundamentalsubstitutionen de

$$u_1, u_2, \ldots u_m$$

aufstellen wollen, so müssen wir die Uebergang
kennen. Diese sind aber in unserem Falle d
wir haben nämlich

$$c_{11}^{(\kappa h)} = c_{11}^{(h\kappa)} = 1 \qquad (h, \kappa = 1, 2, \ldots$$

Demnach lautet zufolge der Gleichungen (16) der Nr. 242 (S. 454) die dem Umlaufe um a_h entsprechende Substitution

$$(6)\qquad \begin{cases} \Theta_h u_h = \varepsilon\varepsilon_h u_h, \\ \Theta_h u_x = u_x - (1-\varepsilon_x)u_h & (x = h+1, \cdots m), \\ \Theta_h u_x = u_x - \varepsilon(1-\varepsilon_x)u_h & (x = 1, 2, \cdots h-1). \end{cases}$$

Bezeichnet wie im allgemeinen Falle

$$\left(\gamma_{\alpha\lambda}^{(xh)}\right)$$

die zwischen den singulären Punkten a_x und a_h vermittelnde Uebergangssubstitution von (E), so ist zufolge der Gleichungen (18), (19) der Nr. 242 (S. 454)

$$(7)\qquad \gamma_{11}^{(xh)}\gamma_{11}^{(hx)} = \frac{\varepsilon(1-\varepsilon_x)(1-\varepsilon_h)}{(1-\varepsilon\varepsilon_x)(1-\varepsilon\varepsilon_h)} \qquad (x \gtrless h);$$

dies sind in unserem besonderen Falle die a. a. O. erwähnten Relationen.

Aus den allgemeinen Erörterungen der Nr. 239 (S. 442 ff.) folgt ebenso wie aus dem blossen Anblicke der Umlaufssubstitutionen (6), dass wir Differentialgleichungen (E) erhalten, die zu einer und derselben Classe gehören, wenn wir die

$$\beta_1,\ \beta_2, \cdots \beta_m,\ \xi$$

um ganze Zahlen vermehren oder vermindern. Multipliciren wir ferner w_1 mit einer willkürlichen (von z unabhängigen) ganzen rationalen Function $g_0(x)$, so genügen die

$$\int\limits_{(s_x s_0 s_x^{-1} s_0^{-1})} g_0(x)\, w_1 (z-x)^{\xi-1} dx \qquad (x = 1, 2, \cdots m)$$

ebenfalls einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, die mit der zu w_1 gehörigen Differentialgleichung (E) zur selben Classe gehört.

Mit anderen Worten: Bedeutet $r(x)$ irgend eine rationale Function, die, abgesehen von einer ganzzahligen Potenz von $z - x$ als Factor, von z unabhängig ist und nur für Punkte aus der Reihe $a_1, a_2, \cdots a_m, z, \infty$ unendlich wird, so befriedigen die Ausdrücke

$$\mathfrak{u}_x = \int\limits_{(s_x s_0 s_x^{-1} s_0^{-1})} r(x)\, w_1 (z-x)^{\xi-1} dx \qquad (x = 1, 2, \cdots m)$$

eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, die mit der Differentialgleichung (E), deren Lösungen die $u_1, u_2, \cdots u_m$ sind, zur selben Classe gehört.

Bedeutet $r(x)$ eine beliebige rationale Function, die, ab
von einer ganzzahligen Potenz von $(z-x)$ als Factor von z una
ist und noch in den von $a_1, a_2, \cdots a_m, z, \infty$ verschiedenen
$b_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots\tau)$ unendlich wird, so ist die entsprechende Tissot
hammer'sche Differentialgleichung von höherer als der m^{ten} (
aber reductibel, denn sie besitzt neben den $u_1, \cdots u_m$ noch die I
zu Lösungen, welche über einfache die $b_\varkappa$ umschliessende Schl
streckt, also in der Form

$$(z-b_\varkappa)^{\xi-\gamma_\varkappa} g_\varkappa(z) \qquad (\varkappa=1,2,\cdots\tau),$$

wo die $\gamma_\varkappa$ ganze positive Zahlen, die $g_\varkappa(z)$ ganze rationale Fu
bedeuten, darstellbar sind.

Die Gleichungen (6) lehren ferner, dass das Fundament
$u_1, u_2, \cdots u_m$ der Differentialgleichung (E) so beschaffen ist, da
Fundamentalsubstitutionen von den in den Coefficienten von (
tretenden Parametern $a_1, a_2, \cdots a_m$ unabhängig sind. Nach den
schen Sätzen der Nr. 228 (S. 397) müssen sich folglich die Abl
der $u_1, u_2, \cdots u_m$ nach irgend einem der $a_\varkappa$ in der Form

$$\frac{\partial u_i}{\partial a_\varkappa} = \overset{(\varkappa)}{R}_0 u_i + \overset{(\varkappa)}{R}_1 \frac{du_i}{dz} + \cdots + \overset{(\varkappa)}{R}_{m-1} \frac{d^{m-1} u_i}{dz^{m-1}} \qquad (i=1,2,\cdots$$

darstellen lassen, wo die $\overset{(\varkappa)}{R}_0, \overset{(\varkappa)}{R}_1, \cdots \overset{(\varkappa)}{R}_{m-1}$ rationale Functione
bedeuten. Dies lässt sich nach den oben gemachten Beme
sofort bestätigen, wenn man bedenkt, dass

$$(8) \qquad \frac{\partial}{\partial a_\varkappa} \int_{(\varDelta)} \prod_{\lambda=1}^{m} (x-a_\lambda)^{\beta_\lambda - 1} (z-x)^{\xi-1} dx$$
$$= (1-\beta_\varkappa) \int_{(\varDelta)} \prod_{\lambda=1}^{m} (x-a_\lambda)^{\bar\beta_\lambda - 1} (z-x)^{\xi-1} dx$$

ist, wo $(\varDelta)$ irgend eine der Doppelschleifen

$$s_i s_0 s_i^{-1} s_0^{-1} = (a_i, z)$$

bedeutet und

$$\bar\beta_\lambda = \beta_\lambda \quad \text{für} \quad \lambda \neq \varkappa, \quad \bar\beta_\varkappa = \beta_\varkappa - 1$$

gesetzt wurde. Aus (8) folgt nämlich, dass die

$$\frac{\partial u_i}{\partial a_\varkappa} \qquad (i=1,2,\cdots m)$$

eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung befriedigen, die mit

selben Classe gehört. Wir werden aus dieser Eigenschaft von (E) in einem wichtigen Specialfalle, der uns sehr bald beschäftigen wird, weitere Folgerungen zu ziehen haben.

244. Besondere Fälle der Tissot-Pochhammer'schen Differentialgleichung. Gauss'sche Differentialgleichung. Darstellung ihrer Lösungen durch bestimmte Integrale. Beziehungen zu der Darstellung durch Gauss'sche Reihen.

Wenn die Grössen

$$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m, \xi$$

positive reale Theile haben, so ist

$$\int w_1 (z-x)^{\xi-1} dx$$

in den Punkten $a_1, a_2, \cdots a_m, z$ endlich. Wir können dann die über die Doppelschleifen erstreckten Integrale durch andere Integrale darstellen, die zwischen den Punkten $a_\varkappa$ und z auf directem Wege erstreckt sind; wir verstehen dabei unter einem „directen Wege" einen Weg, der in der durch die Querschnitte

$$l_0, l_1, \cdots l_m$$

zerschnittenen x-Ebene verläuft. Es ist nämlich

$$\int\limits_{(a_i, z)} w_1(z-x)^{\xi-1} dx = \int\limits_z^{a_i} w_1(z-x)^{\xi-1} dx + \varepsilon_i \int\limits_{a_i}^z w_1(z-x)^{\xi-1} dx$$

$$+ \varepsilon\varepsilon_i \int\limits_z^{a_i} w_1(z-x)^{\xi-1} dx + \varepsilon \int\limits_{a_i}^z w_1(z-x)^{\xi-1} dx,$$

also haben wir

$$(9) \qquad \int\limits_{(a_i, z)} w_1(z-x)^{\xi-1} dx = (1-\varepsilon)(1-\varepsilon_i) \int\limits_z^{a_i} w_1(z-x)^{\xi-1} dx.$$

Diese Umformung ist derjenigen ganz analog, die wir in der Nr. 242 (S. 452) für das Euler'sche Integral erster Gattung ausgeführt haben; in der That geht ja auch das Euler'sche Integral erster Gattung aus unserem allgemeinen Integrale

$$\int\limits_{(a_i, z)} w_1(z-x)^{\xi-1} dx$$

hervor, wenn wir $m = 1$, $a_1 = 0$ und $z = 1$ wählen.

Wir können also, wenn die realen Theile der $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m$ positiv sind, die m directen Integrale

$$(10) \qquad \int_z^{a_\varkappa} w_1 (z-x)^{\xi-1}\,dx = [z, a_\varkappa] \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots m)$$

als ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (E) ansehen. Die diesem Fundamentalsysteme entsprechenden Fundamentalsubstitution... lauten dann

$$(11) \qquad \begin{cases} \Theta_h[z, a_h] = \varepsilon\varepsilon_h[z, a_h], \\ \Theta_h[z, a_\varkappa] = [z, a_\varkappa] - (1-\varepsilon_h)[z, a_h] & (\varkappa > h), \\ \Theta_h[z, a_\varkappa] = [z, a_\varkappa] - \varepsilon(1-\varepsilon_h)[z, a_h] & (\varkappa < h). \end{cases}$$

Es mögen nun einige besonders wichtige Specialfälle der Tisso... Pochhammer'schen Differentialgleichung genauer betrachtet werde...

Der Fall $m = 1$ bietet kein weiteres Interesse dar; dagegen füh... der Fall $m = 2$ auf eine uns wohlbekannte Gleichung, nämlich a... die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe.

Setzen wir nämlich für $m = 2$

$$(12) \quad a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ \alpha = 1 - \xi,\ \beta = 2 - \xi - \beta_1 - \beta_2,\ \gamma = 2 - \xi - \beta \ldots$$

so liefern die Formeln (5) (S. 456) nach Unterdrückung des constant... Factors $(\xi - 1)^{-1}$,

$$(13) \qquad Q_2 = z(1-z), \quad Q_1 = \gamma - (\alpha + \beta + 1)z, \quad Q_0 = -\alpha\beta,$$

so dass sich also in der That die Differentialgleichung (G) der Nr. 7... (Bd. I, S. 252) ergiebt; nur haben wir hier z als unabhängige und u als abhängige Variable.

Wir gewinnen hierdurch sofort ein für die Theorie der Differentialgleichung (G) bedeutsames Resultat. Es stellen nämlich die beiden bestimmten Integrale

$$u_1 = \int_{(0,z)} x^{\alpha-\gamma}(x-1)^{\gamma-\beta-1}(z-x)^{-\alpha}\,dx,$$

$$u_2 = \int_{(1,z)} x^{\alpha-\gamma}(x-1)^{\gamma-\beta-1}(z-x)^{-\alpha}\,dx$$

ein Fundamentalsystem von

$$(\mathrm{G}) \qquad z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]\frac{du}{dz} - \alpha\beta u = 0$$

dar.

Wenn die realen Theile von $\alpha - \gamma + 1$ und $1 - \alpha$ positiv sin... so ist

$$(14)\quad u_1 = (1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)\int\limits_z^0 x^{\alpha-\gamma}(x-1)^{\gamma-\beta-1}(x-z)^{-\alpha}dx,$$

und wenn die realen Theile von $\gamma - \beta$ und $1 - \alpha$ positiv sind, so haben wir

$$(15)\quad u_2 = (1-\varepsilon)(1-\varepsilon_2)\int\limits_z^1 x^{\alpha-\gamma}(x-1)^{\gamma-\beta-1}(z-x)^{-\alpha}dx,$$

dabei ist jetzt

$$\varepsilon = e^{-2\pi\alpha\sqrt{-1}},\quad \varepsilon_1 = e^{2\pi(\alpha-\gamma)\sqrt{-1}},\quad \varepsilon_2 = e^{2\pi(\gamma-\beta)\sqrt{-1}}.$$

Machen wir in diesen directen Integralen noch die Substitution

$$(16)\qquad x = \frac{1}{t},$$

so erhalten wir dieselben in der gewöhnlichen Form

$$\int\limits_z^0 x^{\alpha-\gamma}(x-1)^{\gamma-\beta-1}(z-x)^{-\alpha}dx = \int\limits_\infty^{\frac{1}{z}} t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(zt-1)^{-\alpha}dt,$$

$$\int\limits_z^1 x^{\alpha-\gamma}(x-1)^{\gamma-\beta-1}(z-x)^{-\alpha}dx = \int\limits_1^{\frac{1}{z}} t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(zt-1)^{-\alpha}dt,$$

wie sie im Wesentlichen schon von Euler aufgestellt worden sind.

Da das Integral u_1 in der Umgebung von $z=0$ zum Exponenten

$$\beta_1 + \xi - 1 = 1 - \gamma$$

und das Integral u_2 in der Umgebung von $z = 1$ zum Exponenten

$$\beta_2 + \xi - 1 = \gamma - \beta - \alpha$$

gehört, so schliessen wir, dass u_1 mit dem zum Exponenten $1-\gamma$ gehörigen Elemente (Nr. 71, Bd. I, S. 255, Gleich. (19))

$$u_{02} = z^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ z),$$

des canonischen Fundamentalsystems für $z=0$ und u_2 mit dem zum Exponenten $\gamma-\alpha-\beta$ gehörigen Elemente (Nr. 72, Bd. I, S. 259)

$$u_{12} = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-z)$$

des canonischen Fundamentalsystems für $z=1$, abgesehen von je einem constanten Factor, übereinstimmen muss, vorausgesetzt natürlich, dass die Reihen, welche die Integrale u_{02}, u_{12} in der Umgebung von $z=0$ beziehungsweise $z=1$ darstellen, einen Sinn haben. Um diese constanten Factoren zu bestimmen, bilden wir nach Nr. 242 (S. 453)

...enentwickelungen von u_1 beziehungsweise u_2 ...
... $= 0$ beziehungsweise $z = 1$.
...s ist in der Umgebung von $x = 0$

$$(x-1)^{\gamma-\beta-1} = (-1)^{\gamma-\beta-1} x^{\alpha-\gamma}(1-(\gamma-\beta-1)x+\cdots),$$

haben wir nach Gleichung (12) der Nr. 242 (S. 453)

$$u_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\gamma-\beta+\nu-1}(\gamma-\beta-1)_\nu (1-\varepsilon_1)(\varepsilon-1) \cdot \mathrm{B}(\alpha-\gamma+\nu+1, 1-\alpha) z^{1-\gamma+\nu},$$

...nd da nach einer bekannten Formel

$$\mathrm{B}(p+\nu, q) = \frac{p(p+1)\cdots(p+\nu-1)}{(p+q)(p+q+1)\cdots(p+q+\nu-1)}\mathrm{B}(p,q) \tag{17}$$

ist, so folgt mit Rücksicht auf die Definition von $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ (N...
Bd. I, S. 254),

$$u_1 = (-1)^{\gamma-\beta-1}(1-\varepsilon_1)(\varepsilon-1)\mathrm{B}(\alpha-\gamma+1, 1-\alpha) \cdot F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, z) z^{1-\gamma},$$

d. h. es ist

$$u_1 = (-1)^{\gamma-\beta-1}(1-\varepsilon_1)(\varepsilon-1)\mathrm{B}(\alpha-\gamma+1, 1-\ldots \tag{18}$$

Analog ergiebt sich

$$u_2 = (1-\varepsilon_2)(\varepsilon-1)\mathrm{B}(\gamma-\beta, 1-\alpha)u_{12}. \tag{19}$$

245. Euler's Darstellung der Gauss'schen Reihe d... bestimmtes Integral. Uebergangssubstitutionen für die ... Differentialgleichung; Relationen zwischen den Coeffici... Substitutionen.

Aus den Integralen u_1, u_2 lassen sich andere Integr... setzen, welche die übrigen der in der Nr. 74 (Bd. I, S. 265 f... vierundzwanzig Lösungen der Differentialgleichung (G) ... wollen des historischen Interesses wegen dasjenige be... aufzufinden suchen, welches die in der Umgebung ... die Gauss'sche Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z)$$

dargestellte Lösung liefert.

Die Lage der Punkte

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \infty, \ldots$$

... der x-Ebene werde durch die Fig. 15 veransc...

die Fundamentalsubstitutionen, welche das Integralsystem u_1, u_2 erfährt, wenn z die Querschnitte l_1, l_2 je einmal in positivem Sinne überschreitet,

$$(20)\begin{cases}\Theta_1 u_1 = \varepsilon\varepsilon_1 u_1,\\ \Theta_1 u_2 = u_2 - (1-\varepsilon_2)u_1;\end{cases}$$

$$(21)\begin{cases}\Theta_2 u_1 = u_1 - \varepsilon(1-\varepsilon_1)u_2,\\ \Theta_2 u_2 = \varepsilon\varepsilon_2 u_2.\end{cases}$$

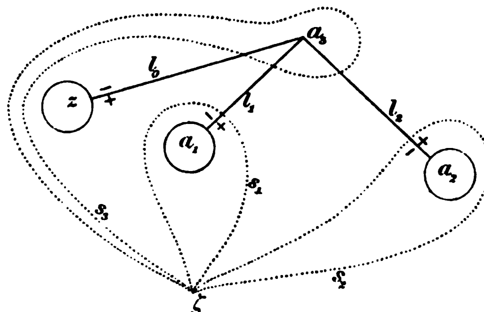


Fig. 15.

Es handelt sich um die Aufstellung eines Integrals

$$\bar{u} = c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

für welches, wie für

$$u_{01} = F(\alpha, \beta, \gamma, z),$$

die Gleichung

$$\Theta_1 \bar{u} = \bar{u}$$

besteht. Es muss also nach (20)

$$c_1\varepsilon\varepsilon_1 u_1 + c_2 u_2 - c_2(1-\varepsilon_2)u_1 = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

sein, und hieraus folgt, da u_1, u_2 ein Fundamentalsystem constituiren,

$$c_1 : c_2 = \varepsilon_2 - 1 : 1 - \varepsilon\varepsilon_1,$$

d. h. wenn wir durch c eine willkürliche Constante bezeichnen,

$$(21\text{a})\qquad \bar{u} = c((\varepsilon_2 - 1)u_1 + (1 - \varepsilon\varepsilon_1)u_2).$$

Um diese Lösung in der Form eines bestimmten Integrals zu erhalten, müssen wir ausser den von einem Punkte ζ um a_1, a_2 herum gelegten Schleifen s_1, s_2 noch die von ζ aus um $a_3 = \infty$ herum gelegte Schleife s_3 betrachten (in der Figur punktirt). Es ist dann

$$(22)\qquad \int\limits_{(s_3)} w_1(z-x)^{\xi-1}dx = \int\limits_{(s_3)} W dx$$

$$= -\left\{\varepsilon^{-1}\int\limits_{(s_0)} W dx + \varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-1}\int\limits_{(s_1)} W dx + \varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1}\int\limits_{(s_2)} W dx\right\},$$

wenn wir setzen

$$(23)\qquad W = w_1(z-x)^{\xi-1} = x^{\alpha-\gamma}(x-1)^{\gamma-\beta-1}(z-x)^{-\alpha}.$$

Ferner ist das über die Doppelschleife

$$s_3 s_2 s_3^{-1} s_2^{-1},$$

die in unserem Falle, wo die Fundamentalsubstitutionen von w_1 mit einander vertauschbar sind (vergl. Nr. 233, S. 418), einen brauchbaren Integrationsweg darstellt, erstreckte Integral

$$(24)\qquad \int\limits_{(s_3 s_2 s_3^{-1} s_2^{-1})}^{e} W dx = (1-\varepsilon_2)\int\limits_{(s_3)}^{e} W dx - (1-\varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1})\int\limits_{(s_2)} W dx,$$

denn wir haben offenbar für einen Umlauf um $a_3 = \infty$

$$\Theta_3 W = \varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1} W.$$

Setzt man in (24) für das über s_3 erstreckte Integral seinen Werth aus (22) ein, so folgt nach einfacher Reduction mit Rücksicht auf die Definition von u_1, u_2

$$\int\limits_{(s_3 s_2 s_3^{-1} s_2^{-1})}^{e} W dx = \frac{1}{(1-\varepsilon)\varepsilon\varepsilon_1}\left((1-\varepsilon\varepsilon_1)u_2 - (1-\varepsilon_2)u_1\right),$$

wir können folglich nach (21a)

$$(25)\qquad \int\limits_{(s_3 s_2 s_3^{-1} s_2^{-1})}^{e} W dx = \bar{u}$$

setzen. Unter der Voraussetzung, dass die realen Theile der Grössen β und $\gamma-\beta$ positiv sind, besitzt das Integral

$$\int W dx$$

in den Punkten $x=\infty$ und $x=1$ endliche Werthe; es ist also in diesem Falle

$$\bar{u} = (1-\varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1})(\varepsilon_2-1)\int\limits_{\infty}^{1} W dx,$$

und wenn wir wieder durch die Gleichung (16) eine neue Integration variable einführen,

$$(26)\quad \bar{u} = (1-\varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1})(\varepsilon_2-1)\int\limits_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(zt-1)^{-\alpha}$$

Dieses Integral kann sich von u_{01} nur durch einen constanten Fac- unterscheiden; um diesen zu bestimmen, bilden wir den Werth von für $z=0$. Es ist

$$(\bar{u})_{z=0} = (1-\varepsilon^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1})(\varepsilon_2-1)(-1)^{\alpha}\mathrm{B}(\beta,\gamma-\beta),$$

und da u_{01} für $z=0$ den Werth 1 annimmt, haben wir folglich der Umgebung von $z=0$

$$(27)\qquad \int\limits_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}dt = \mathrm{B}(\beta,\gamma-\beta)F(\alpha,\beta,\gamma,z).$$

Diese Gleichung ist bereits von Euler (in den Institutiones calculi integralis) gegeben worden (vergl. Nr. 233, S. 415), und gewöhnlich wird auch das auf der linken Seite stehende bestimmte Integral zum Ausgangspunkte für die Integration der Differentialgleichung (G) durch Quadraturen gewählt. Auf die Darstellung der übrigen Lösungen von (G) durch bestimmte Integrale gehen wir nicht näher ein, sie kann auf ähnlichem Wege erhalten werden, wie die von u_{01}, u_{02}, u_{12}, die wir kennen gelernt haben.

Die Integrale u_1, u_2 und die durch die Formeln (20), (21) gegebenen Fundamentalsubstitutionen derselben haben unbeschränkte Gültigkeit auch in allen denjenigen Fällen, wo einzelne der Reihenentwickelungen der Nr. 74 versagen. Mit Hülfe derselben lassen sich die Uebergangssubstitutionen, die in der Nr. 129 (Bd. I) nur unter der Annahme, dass keine der Grössen

$$1-\gamma,\quad \gamma-\alpha-\beta,\quad \alpha-\beta$$

eine ganze Zahl sei, aufgestellt worden sind, auch in diesen Ausnahmefällen bestimmen. Um die Formeln der Nr. 129 zu verificiren, hat man die Darstellung der Function $\mathrm{B}(p,q)$ durch das Euler'sche Integral zweiter Gattung

$$\Gamma(p)=\Pi(p-1)$$

zu berücksichtigen; es ist nämlich

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{28}$$

Wir begnügen uns damit, auf die Bedeutung der Relation (7) (Nr. 243, S. 457) dadurch hinzuweisen, dass wir dieselbe mit Hülfe jener Formeln in dem Falle der Differentialgleichung (G) in expliciter Form aufschreiben.

Es kommen dabei die zwischen den Punkten $z=0$ und $z=1$ vermittelnden Uebergangssubstitutionen in Betracht, die in der Nr. 129 (Bd. I, S. 481, Gleich. (6), (7) und S. 483) aufgestellt worden sind. Es ist zufolge derselben

$$u_{12}=f(1-\alpha,\,1-\beta,\,\gamma-\alpha-\beta+1)u_{02}+\mathfrak{P}_1(z-1),$$
$$u_{02}=f(1-\alpha,\,1-\beta,\,2-\gamma)u_{12}+\mathfrak{P}(z),$$

wo $\mathfrak{P}_1(z-1)$, $\mathfrak{P}(z)$ in der Umgebung von $z=1$ beziehungsweise $z=0$ reguläre Functionen bedeuten. Also ist in der Bezeichnung der vorhergehenden Nummern

$$\begin{cases}\gamma_{11}^{(12)}=cf(1-\alpha,\,1-\beta,\,2-\gamma),\\ \gamma_{11}^{(21)}=\frac{1}{c}f(1-\alpha,\,1-\beta,\,\gamma-\alpha-\beta+1),\end{cases} \tag{29}$$

wo gemäss den Gleichungen (18), (19)

$$c = (-1)^{\gamma-\beta-1} \frac{(1-\varepsilon_2)\,\mathrm{B}(\gamma-\beta,\,1-\alpha)}{(1-\varepsilon_1)\,\mathrm{B}(\alpha-\gamma+1,\,1-\alpha)}$$

zu nehmen ist. Zufolge der Relation (7) (S. 457) muss sein

$$\gamma_{11}^{(12)}\gamma_{11}^{(21)} = \frac{\varepsilon(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}{(1-\varepsilon\varepsilon_1)(1-\varepsilon\varepsilon_2)},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\varepsilon = e^{-2\pi\alpha\sqrt{-1}}, \quad \varepsilon_1 = e^{2\pi(\alpha-\gamma)\sqrt{-1}}, \quad \varepsilon_2 = e^{2\pi(\gamma-\beta)\sqrt{-1}}$$

ausgerechnet,

$$(30) \qquad \gamma_{11}^{(12)}\gamma_{11}^{(21)} = -\frac{\sin\pi(\gamma-\alpha)\cdot\sin\pi(\gamma-\beta)}{\sin\pi(1-\gamma)\cdot\sin\pi(\gamma-\alpha-\beta)}.$$

Zufolge der Definitionsgleichung (Nr. 129, Bd. I, S. 479)

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}$$

ist aber nach (29)

$$\gamma_{11}^{(12)}\gamma_{11}^{(21)} = \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\gamma-1)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)\,\Gamma(\gamma-\beta)},$$

und dies mit (30) verglichen führt auf die bekannte Relation

$$(31) \qquad \Gamma(1-p)\,\Gamma(p) = \frac{\pi}{\sin\pi p}.$$

Die Beziehungen (7) (S. 457) und allgemein die sich aus d Gleichungen (18), (19) der Nr. 242 (S. 454) ergebenden Rel tionen können also gleichsam als eine Verallgemeinerung d Relation (31) angesehen werden.

Viertes Kapitel.

246. Fälle, wo die Euler'sche Transformirte der Tissot-Pochhammer'schen Differentialgleichung ein algebraisches Integral besitzt. Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln gewisser specieller und der allgemeinen Abel'schen Integrale.

Schon Euler selbst, nach ihm besonders Pfaff und ebenso fast alle Analysten, die sich mit dem Studium der Differentialgleichung (G) und ihrer Lösungen beschäftigt haben, wandten der Frage ein besonderes Interesse zu, in welchen Fällen sich die Integrale von (G) auf „bekannte Functionen" reduciren lassen. Seit der Zeit Euler's und Pfaff's hat sich der Kreis der als bekannt anzusehenden Functionen wesentlich erweitert, insbesondere sind wir, Dank der Arbeiten Abel's und seiner Nachfolger, in der Lage, die Integrale algebraischer Functionen in gewissem Sinne als bekannte Functionen ansehen zu dürfen. Nun soll es sich nicht etwa darum handeln, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen sich die Lösungen der Differentialgleichung (G) durch Abel'sche Integrale darstellen lassen, sondern vielmehr darum, einen anderen Zusammenhang zwischen der Theorie dieser Integrale und der Differentialgleichung (G), beziehungsweise der allgemeinen Tissot-Pochhammer'schen Differentialgleichung zu erörtern.

Die Form des Integrals w_1 der Euler'schen Transformirten der Tissot-Pochhammer'schen Differentialgleichung legt es nahe, diejenigen Fälle genauer zu betrachten, in welchen der Ausdruck

$$(1)\qquad \int w_1 (z-x)^{\xi-1}\,dx = \int (z-x)^{\xi-1} \prod_{\varkappa=1}^{m} (x-a_\varkappa)^{\beta_\varkappa - 1}\,dx$$

ein Abel'sches Integral wird. Dies ist offenbar stets der Fall, wenn die Grössen

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots \beta_m,\ \xi$$

reale rationale Zahlen sind, denn dann genügt

$$(2)\qquad W = (z-x)^{\xi-1}(x-a_1)^{\beta_1-1}\cdots(x-a_m)^{\beta_m-1}$$

einer algebraischen Gleichung von der Form

(3) $$W^n = R(x),$$

wo n das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner d $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m, \xi$ und $R(x)$ eine rationale Function von x Der Punkt z spielt die Rolle eines Verzweigungspunkt durch die Gleichung (3) definirte algebraische Function wenn wir wie immer voraussetzen, dass ξ keine ganze Zahl

Wir können uns W in die Form gesetzt denken .

$$W = \psi(x)(z-x)^{\frac{r_0}{n}}(x-a_1)^{\frac{r_1}{n}}(x-a_2)^{\frac{r_2}{n}}\cdots(x-a_n$$

wo $\psi(x)$ eine rationale Function von x und die

$$r_0,\ r_1,\ r_2,\ \cdots r_m$$

positive ganze Zahlen bedeuten, die kleiner sind als n. Sei

$$\frac{r_\nu}{n} = \frac{\bar{r}_\nu}{n_\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots m),$$

wo die ganzen Zahlen $\bar{r}_\nu$ und n_ν keinen gemeinsamen Theil dann ist der Punkt z ein Verzweigungspunkt von der Ordn

$$n\left(1 - \frac{1}{n_0}\right),$$

der Punkt a_x ein solcher von der Ordnung

$$n\left(1 - \frac{1}{n_x}\right) \qquad (x = 1, 2, \cdots m),$$

und der Punkt $x = \infty$ ein Verzweigungspunkt von der (

$$n\left(1 - \frac{1}{n_{m+1}}\right),$$

wenn n_{m+1} den Nenner des auf seine reducirte Form geb Bruches

$$\sum_{\nu=0}^{m}\frac{r_\nu}{n} - \left[\sum_{\nu=0}^{m}\frac{r_\nu}{n}\right]$$

bedeutet, wo durch die eckige Klammer die grösste deutet wird, die in der eingeklammerten Grösse er Gesammtzahl v der einfachen Verzweigungspunkte uns Function ist demnach

$$v = n\sum_{\nu=0}^{m+1}\left(1 - \frac{1}{n_\nu}\right);$$

die bekannte Riemann'sche Beziehung

$$v - 2n = 2p - 2$$

giebt also für den Rang p (das Geschlecht nach Clebsch) der algebraischen Gleichung (3) den schon von Abel aufgestellten Ausdruck

$$(4) \qquad p = \frac{1}{2} n \sum_{\nu=0}^{m+1} \left(1 - \frac{1}{n_\nu}\right) - (n-1).$$

Denken wir uns nun die n-blättrige Riemann'sche Fläche F construirt, in welcher W eine eindeutige Function des Ortes ist, so ist dieselbe $(2p+1)$-fach zusammenhängend und kann durch ein System von $2p$ Querschnitten (vergl. z. B. Nr. 187, S. 213) in eine einfach zusammenhängende zerlegt werden. Die $2p$ über diese Querschnitte hin erstreckten Integrale

$$\int W dx$$

liefern dann die Periodicitätsmoduln des Abel'schen Integrals (1), und es ist leicht einzusehen, dass diese $2p$ bestimmten Integrale sich als lineare homogene Functionen der m über die Doppelschleifen

$$s_\varkappa s_0 s_\varkappa^{-1} s_0^{-1}$$

erstreckten Integrale

$$u_\varkappa = \int\limits_{(s_\varkappa s_0 s_\varkappa^{-1} s_0^{-1})} W dx$$

darstellen lassen mit Coefficienten, die rational mit ganzzahligen Coefficienten aus den Grössen

$$\varepsilon, \ \varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_m$$

zusammengesetzt sind. Die Doppelschleifen sind geschlossene Wege in der Riemann'schen Fläche F. Wir haben also den Satz:

Wenn das Integral der Euler'schen Transformirten der zu einem rationalen Werthe von ξ gehörigen Tissot-Pochhammer'schen Differentialgleichung (E) eine algebraische Function von x ist, so befriedigen die Periodicitätsmoduln des Abel'schen Integrals (1), als Functionen des Verzweigungspunktes z aufgefasst, die Differentialgleichung (E).

Aus dem Satze der Nr. 243 (S. 457) folgt ferner:

Bedeutet $r(x)$ irgend eine rationale Function von x, die, abgesehen von einer Potenz von $z - x$ als Factor, von z unabhängig ist und nur für Punkte aus der Reihe

$$a_1, \ a_2, \cdots a_m, \ z, \ \infty$$

unendlich wird, so befriedigen die Periodicitätsmoduln des Abel'schen Integrals

$$\int r(x)\, W dx$$

als Functionen von z eine Differentialgleichung, die mit (E) zur selben Classe gehört.

Wenn die rationalen Zahlen $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m, \xi$ wesentlich positive Werthe haben, so können wir nach den Ergebnissen der Nr. 244 (S. 459 ff.) an Stelle der über die Doppelschleifen erstreckten Integrale $u_\varkappa$ die auf directem Wege genommenen Integrale

$$\int_z^{a_\varkappa} W dx = [z, a_\varkappa]$$

einführen. Aus diesen setzen sich dann die auf directem Wege zwischen irgend zweien der Verzweigungspunkte $a_1, a_2, \cdots a_m, z$ erstreckten Integrale zusammen; z. B. hat man

$$[a_\varkappa, a_{\varkappa+1}] = \int_{a_\varkappa}^{a_{\varkappa+1}} W dx = [z, a_\varkappa] - [z, a_{\varkappa+1}].$$

Die Fundamentalsubstitutionen, welche die Integrale $[z, a_\varkappa]$ erfahren, wenn z die Querschnitte $l_1, l_2, \cdots l_m$ überschreitet, werden durch die Formeln (11) der Nr. 244 (S. 460) gegeben. Dieselben sind zuerst von Herrn Broecker aufgestellt worden.

Die an der binomischen Gleichung (3) beobachtete Erscheinung, dass die Periodicitätsmoduln gewisser zu derselben gehöriger Abel-scher Integrale als Functionen eines Verzweigungspunktes eine lineare Differentialgleichung befriedigen, ist ein besonderer Fall eines allgemeinen von Herrn Fuchs aufgestellten Satzes über die Periodicitätsmoduln der zu einem beliebigen algebraischen Gebilde

$$\text{(I)} \qquad F(s, x) = 0$$

gehörigen Integrale.

Bedeute nämlich

$$U = \int \frac{\varphi(s, x)}{\frac{\partial F}{\partial s}}\, dx$$

etwa ein zu dem algebraischen Gebilde (I) gehöriges Integral ers– Gattung, so kann man dasselbe als Function eines Verzweigun– punktes z der durch (I) definirten algebraischen Function s von studiren. Bei geeigneter Wahl der rationalen Function $\varphi(s, x)$ Ortes der zu (I) gehörigen Riemann'schen Fläche T lässt sich da– wie Herr Fuchs gezeigt hat, jede Ableitung von U nach z in der Fo–

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \chi_\lambda(s, x) + \delta_{\lambda 1} t_1 + \delta_{\lambda 2} t_2 + \cdots + \delta_{\lambda p} t_p + \gamma_{\lambda 1} U_1 + \gamma_{\lambda 2} U_2 + \cdots + \gamma_{\lambda p} U_p \quad (\lambda = 1, 2, \cdots)$$

darstellen, wo p den Rang des algebraischen Gebildes (I),

$$U_1, \; U_2, \cdots U_p$$

ein System linear unabhängiger Integrale erster Gattung,

$$t_1, \; t_2, \cdots t_p$$

gewisse Integrale zweiter Gattung, $\chi_\lambda(s, x)$ eine rationale Function des Ortes auf der Fläche T und die $\delta_{\lambda\varkappa}$, $\gamma_{\lambda\varkappa}$ Constanten bedeuten, die sich rational zusammensetzen lassen aus den Coefficienten von

$$\varphi(s, x), \quad F(s, x)$$

und deren Ableitungen nach z, ferner aus z und dem zu $x = z$ gehörigen Werthe s_z von s, sowie endlich aus den Coefficienten der Integranden der $U_1, U_2, \cdots U_p$ und den Unendlichkeitsstellen der $t_1, t_2, \cdots t_p$.

Denken wir uns nun die $(2p + 1)$-fach zusammenhängende Fläche T durch $2p$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende zerschnitten und mögen

$$K_1, \; K_2, \cdots K_{2p}$$

die Periodicitätsmoduln von U an jenen $2p$ Querschnitten sein. Ebenso sollen

$$T_{i1}, \; T_{i2}, \cdots T_{i,2p}$$

die entsprechenden Periodicitätsmoduln von t_i und

$$K_{i1}, \; K_{i2}, \cdots K_{i,2p}$$

die analogen Grössen für U_i bedeuten. Dann ist nach (II), da das über eine geschlossene Curve in der Fläche T erstreckte Integral

$$\int d\chi_\lambda(s, x)$$

verschwindet,

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial^2 K_\nu}{\partial z^2} = \sum_{i=1}^{p} \delta_{\lambda i} T_{i\nu} + \sum_{i=1}^{p} \gamma_{\lambda i} K_{i\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots 2p).$$

Bildet man diese Gleichungen für $\lambda = 0, 1, \cdots 2p$ und eliminirt für jeden Werth von ν die Grössen

$$T_{1\nu}, \cdots T_{p\nu}, \quad K_{1\nu}, \cdots K_{p\nu},$$

so erhält man eine Gleichung von der Form

$$\beta_{2p} \frac{d^{2p} K}{dz^{2p}} + \beta_{2p-1} \frac{d^{2p-1} K}{dz^{2p-1}} + \cdots + \beta_0 K = 0,$$

...h die $2p$ Grössen

$$K_1, \; K_2, \; \ldots \; K_{2p}$$

...ligt wird. Die Coefficienten dieser linearen homogenen Diffe-
...lgleichung $2p^{\text{ter}}$ Ordnung setzen sich rational zusammen aus den
...icienten von

$$\varphi(s, x), \quad F(s, x)$$

... deren Ableitungen nach z.

Für besondere Formen der algebraischen Gleichung (I) sind die
...h aus (III) für $\lambda = 0, 1, \ldots 2p$ ergebenden Gleichungen nicht sämmt-
...ch von einander unabhängig; dann ergiebt sich eine lineare Diffe-
...entialgleichung von niedrigerer als der $2p^{\text{ten}}$ Ordnung, die durch die
$2p$ Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung U befriedigt wird.
Dies ist z. B. stets der Fall, wenn die Gleichung (I) eine binomische ist.

247. Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale. Fundamentalsubstitutionen. Differential... gleichungen, die zu derselben Classe gehören. Unabhängigkeit de... Fundamentalsubstitutionen von den singulären Punkten.

In dem besonderen Falle, wo die Gleichung (I) ein hyperellip... tisches Gebilde darstellt, hat Herr Fuchs die lineare Differentia... gleichung, der die Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung a... Functionen eines Verzweigungspunktes genügen, explicite aufgestel... und die Fundamentalsubstitutionen derselben angegeben. Wir woll... diese Differentialgleichung herleiten, indem wir die für die allgeme... binomische Gleichung (3) erlangten Resultate specialisiren.

Wir nehmen zu dem Ende in der Differentialgleichung (I′) Nr. 243 (S. 455)

$$\beta_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}, \; \ldots \; \beta_m = \frac{1}{2},$$

während wir ξ vorläufig noch beliebig lassen, dabei aber im Au... halten, dass, wenn ξ gleich einem ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}$ gen... wird, der Ausdruck

$$(z - x)^{\xi - 1} w_1 = (x - a_1)^{-\frac{1}{2}} (x - a_2)^{-\frac{1}{2}} \ldots (x - a_m)^{-\frac{1}{2}} (z - \ldots$$

einer quadratischen Gleichung mit dem Verzweigungspunkte und somit zu einem hyperelliptischen Gebilde Veranlassung

Es ist in diesem Falle (vergl. die Gleichungen (1), (2) d... S. 455)

$$P_m(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_m),$$

$$\frac{P_{m-1}(x)}{P_m(x)} = \frac{1}{2} \sum_{\varkappa=1}^{m} \frac{1}{x - a_\varkappa},$$

wir haben also

$$P_{m-1}(x) = \frac{1}{2} P_m'(x).$$

Die Coefficienten der Differentialgleichung (E_ξ), die durch die Ausdrücke

(5)
$$\int_{(A)} \frac{(z-x)^{\xi-1} dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)}}$$

befriedigt wird, lauten demnach (Gleichung (5), Nr. 243, S. 456)

(6)
$$Q_\nu(z, \xi) = \frac{(-1)^{m-\nu-1}\left(\xi - \frac{m}{2} - \frac{\nu}{2}\right)}{(\xi-1)(\xi-2)\cdots(\xi-\nu)\, 1\cdot 2 \cdots (m-\nu)} P_m^{(m-\nu)}(z)$$
$$(\nu = 0, 1, \cdots m).$$

Insbesondere ergeben sich für $\xi = \frac{1}{2}$ die Coefficienten der Differentialgleichung

$$\left(E_{\frac{1}{2}}\right) = (E)$$

in der Form

(7)
$$Q_\nu\left(z, \frac{1}{2}\right) = Q_\nu(z) = \frac{2^{\nu-1}(-1)^m(1-m-\nu)}{1\cdot 3 \cdots (2\nu-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(m-\nu)} P_m^{(m-\nu)}(z),$$

und diese Differentialgleichung (E) wird befriedigt durch die Periodicitätsmoduln

(8)
$$\int_{(A)} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)\cdots(x-a_m)(z-x)}}$$

des zu dem hyperelliptischen Gebilde

(9)
$$s^2 = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)(z-x)$$

gehörigen Integrales erster Gattung

(10)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)\cdots(x-a_m)(z-x)}}.$$

Dabei ist (wie auch stets bisher) vorausgesetzt, dass die Verzweigungspunkte

$$a_1, a_2, \cdots a_m$$

des hyperelliptischen Gebildes (9) von z unabhängige Grössen sind; ferner wollen wir annehmen, dass der Punkt $x = \infty$ eine Verzweigungsstelle der algebraischen Function s von x, d. h. dass m eine gerade Zahl sei. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnten wir z. B. den Ausdruck

$$\bar{x} = \frac{1}{x - a_1}$$

als neue unabhängige Variable einführen und erhielten dann für die Periodicitätsmoduln (8) eine lineare Differentialgleichung von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Als Fundamentalsystem von (E) können wir die auf directem Wege erstreckten Integrale

$$(11) \qquad v_\varkappa = [z, a_\varkappa] = \int_z^{a_\varkappa} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)\cdots(x-a_m)(z-x)}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots m)$$

nehmen. Die Fundamentalsubstitutionen derselben lauten dann zufolge der Gleichungen (11) der Nr. 244 (S. 460)

$$(12) \qquad \begin{cases} \Theta_h v_h = v_h, \\ \Theta_h v_\varkappa = v_\varkappa - 2 v_h & (\varkappa > h), \\ \Theta_h v_\varkappa = v_\varkappa + 2 v_h & (\varkappa < h). \end{cases}$$

Wir sehen, dass die Substitutionen, die das Fundamentalsystem

$$v_1, \; v_2, \; \cdots \; v_m$$

bei Umläufen der Variabeln z erfährt, ganzzahlige Coefficienten und die Determinante Eins besitzen.

Betrachten wir neben dem Integrale (10) irgend ein zu dem hyperelliptischen Gebilde (8) gehöriges Integral

$$(13) \qquad \int \frac{R(x)\,dx}{s},$$

wo $R(x)$ eine rationale Function von x bedeutet, welches keine logarithmische Unendlichkeitsstelle hat, und folglich in der durch die

$$2p = m$$

canonischen Querschnitte zerschnittenen Riemann'schen Fläche des Gebildes (9) eindeutig ist, so sind die Résidus von

$$\frac{R(x)}{s}$$

für diejenigen Unendlichkeitsstellen von $R(x)$, die nicht zu den Verzweigungspunkten von s gehören, gleich Null, und die Coefficienten von $R(x)$ hängen folglich im Allgemeinen noch von z ab. Wenn insbesondere $R(x)$, abgesehen von einer ganzzahligen Potenz von z als Factor, von z unabhängig ist und für keinen von den Verzweigungsstellen von s verschiedenen Punkt unendlich wird, so genügen nach dem Satze der Nr. 246 (S. 469) die Periodicitätsmoduln des Integrals

(13) einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, die mit der Differentialgleichung (E) zur selben Classe gehört. Es ist dann

$$\frac{R(x)}{s} = g(x)(x - a_1)^{\beta_1 - 1}(x - a_2)^{\beta_2 - 1} \cdots (x - a_m)^{\beta_m - 1}(z - x)^{\xi - 1},$$

wo $g(x)$ eine von z unabhängige ganze Function, $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m, \xi$ Zahlen bedeuten, die sich von $\frac{1}{2}$ nur durch ganze Zahlen unterscheiden. Wir können in diesem Falle nach der in der Nr. 240 (S. 446) dargelegten Methode die Differentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln des Integrals (13) genügen, ohne Schwierigkeit herstellen, und den Ausdruck der abhängigen Variabeln dieser Differentialgleichung durch die abhängige Variable von (E) und deren Ableitungen angeben.

Wir können also sagen: Die Periodicitätsmoduln eines Integrals erster Gattung

$$\int \frac{g(x)\,dx}{s},$$

wo $g(x)$ eine ganze rationale Function vom Grade $p - 1$ mit willkürlichen (aber von z unabhängigen) Coefficienten bedeutet, genügen einer Differentialgleichung, die mit (E) zur selben Classe gehört. Die Differentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln eines Integrals zweiter Gattung genügen, gehört mit (E) zur selben Classe, wenn der Integrand, abgesehen von einer Potenz von $z - x$ als Factor, von z unabhängig ist und die Unendlichkeitsstellen des Integrals mit Punkten aus der Reihe

$$a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_m,\ z,\ \infty$$

übereinstimmen.

Wenn wir in dem hyperelliptischen Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x - a_1) \cdots (x - a_m)(x - a_{m+1})}}, \quad m = 2p$$

die Verzweigungspunkte $a_1, a_2, \cdots a_m, a_{m+1}$ als von einander unabhängige Variable auffassen, so befriedigen die Periodicitätsmoduln desselben, oder wie wir lieber sagen wollen, m linear unabhängige der über die Doppelschleifen

$$(a_i, a_\varkappa) = s_i s_\varkappa s_i^{-1} s_\varkappa^{-1} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots m+1;\ i \gtrless \varkappa)$$

erstreckten Integrale

$$u_1,\ u_2,\ \cdots\ u_m,$$

als Functionen irgend eines a_ν aufgefasst, eine lineare homogene Differentialgleichung (E_ν) von der Form (E). Die Coefficienten von (E_ν) hängen von den singulären Punkten

$$a_1, \cdots a_{\nu-1}, a_{\nu+1}, \cdots a_{m+1}$$

als Parameter ab, dagegen sind die Fundamentalsubstitutionen, die das Fundamentalsystem

$$u_1, u_2, \cdots u_m$$

erleidet, wenn a_ν Umläufe um diese singulären Punkte vollzieht, von diesen Parametern unabhängig, sie haben nämlich ganzzahlige Coefficienten.

Auf Grund der Fuchs'schen Sätze der Nr. 228 (S. 397) folgt hieraus, wie wir bereits in der Nr. 243 (S. 458) für die allgemeine Tissot-Pochhammer'sche Differentialgleichung hervorgehoben haben, dass die $u_\varkappa$ ein System von Gleichungen

$$(14)\qquad \frac{\partial u_\varkappa}{\partial a_\lambda} = R_{\lambda 0} u_\varkappa + R_{\lambda 1} \frac{\partial u_\varkappa}{\partial a_\nu} + \cdots + R_{\lambda, m-1} \frac{\partial^{m-1} u_\varkappa}{\partial a_\nu^{m-1}} \qquad (\lambda \neq \nu)$$

befriedigen, wo die $R_{\lambda 0}, R_{\lambda 1}, \cdots R_{\lambda, m-1}$ rationale Functionen von a_ν bedeuten. Da aber die Substitutionen, welche die $u_1, u_2, \cdots u_m$ erfahren, wenn irgend ein $a_\varkappa$ einen geschlossenen Umlauf vollzieht, von allen übrigen $a_1, a_2, \cdots a_{m+1}$ unabhängig sind, so folgt, wenn wir aus den Gleichungen (14) für $\varkappa = 1, 2, \cdots m$ die

$$(15)\qquad R_{\lambda 0}, R_{\lambda 1}, \cdots R_{\lambda, m-1}$$

ausrechnen, mit Rücksicht auf den Umstand, dass die $u_1, u_2, \cdots u_m$ und ihre sämmtlichen Ableitungen nach den $a_1, a_2, \cdots a_{m+1}$ keine Stellen der Unbestimmtheit besitzen können, dass die Coefficienten (15) rationale Functionen aller

$$a_1, a_2, \cdots a_{m+1}$$

sein müssen (vergl. Nr. 230, S. 403 ff.).

Die Gleichungen (14) stellen folglich ein System linearer homogener partieller Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten dar, denen die $u_1, u_2, \cdots u_m$ Genüge leisten. Mit speciellen Fällen solcher partieller Differentialgleichungen haben sich die Herren Appell, Picard und Horn beschäftigt, auf die allgemeine Theorie derselben bezieht sich eine Abhandlung von Herrn Fuchs in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1891.

248. Legendre'sche Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrals erster Gattung. Darstellung der Periodicitätsmoduln.

Ehe wir auf eine weitere Untersuchung der Periodicitätsmoduln des allgemeinen hyperelliptischen Integrals eingehen, beschäftigen wir

uns mit dem einfachsten und auch vom historischen Standpunkte aus besonders interessanten Falle $m = 2$, d. h. mit dem Falle des elliptischen Integrals.

Wir werden alsdann $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ setzen, so dass also zunächst die Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrals erster Gattung

$$\text{(I)} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}$$

zu behandeln sind. Da $m = 2$ ist, haben wir es mit einem besonderen Falle der Differentialgleichung (G) der Gauss'schen Reihe zu thun, und zwar ist (vergl. Nr. 244, S. 460)

$$\alpha = 1 - \xi = \frac{1}{2}, \quad \beta = 2 - \xi - \beta_1 - \beta_2 = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 2 - \xi - \beta_1 = 1,$$

also lauten die Coefficienten

$$Q_2 = z(1-z), \quad Q_1 = 1 - 2z, \quad Q_0 = -\frac{1}{4},$$

d. h. wir haben die zuerst von Legendre aufgestellte Differentialgleichung

$$\text{(L)} \qquad z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + (1-2z)\frac{du}{dz} - \frac{1}{4}u = 0,$$

die durch die bestimmten Integrale

$$u_1 = \int\limits_{(0,z)} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}, \quad u_2 = \int\limits_{(1,z)} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}$$

befriedigt wird. Die Fundamentalsubstitutionen, welche u_1, u_2, beziehungsweise die auf directem Wege erstreckten Integrale (vergl. Nr. 244, S. 461)

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} [z, 0] = \frac{1}{4} u_1 = \int\limits_z^0 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}, \\ [z, 1] = \frac{1}{4} u_2 = \int\limits_z^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}} \end{cases}$$

erfahren, wenn z einfache Umläufe um die Punkte 0, 1 vollzieht, lauten (Nr. 245, S. 463)

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \Theta_1 u_1 = u_1, & \Theta_1 u_2 = u_2 - 2u_1, \\ \Theta_2 u_1 = u_1 + 2u_2, & \Theta_2 u_2 = u_2. \end{cases}$$

Es möge zunächst der Zusammenhang der u_1, u_2 mit den Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrals erster Gattung genau festgestellt werden.

Sei ein elliptisches Integral erster Gattung mit dem Modul

(3) $$z = \varkappa^2$$

in der Legendre-Jacobi'schen Normalform

(4) $$\int^{\cdot} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-zy^2)}}$$

vorgelegt; setzt man mit Jacobi die beiden „completten Integral

(5) $$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-zy^2)}} = K, \\ \displaystyle\int_1^{\frac{1}{\sqrt{z}}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-zy^2)}} = K'i \qquad (i=\sqrt{-1}), \end{cases}$$

so sind $4K$ und $2K'i$ die Periodicitätsmoduln des Integrals (4). Substitution

$$y^2 = t$$

verwandelt das Integral (4) in

$$\frac{1}{2}\int^{\cdot} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-zt)}}$$

und die Integrale (5) in

(6) $$\begin{cases} K = \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-zt)}}, \\ K'i = \displaystyle\frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{z}} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-zt)}}. \end{cases}$$

Setzt man hierin ferner

$$t = \frac{1}{x},$$

so kommt

(7) $$\begin{cases} K = \displaystyle\frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}}, \\ K'i = \displaystyle\frac{1}{2}\int_z^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}}. \end{cases}$$

Bei der durch die Fig. 15 (Nr. 245, S. 463) angedeuteten besteht zwischen dem in der Nr. 245 (S. 464) definirten Integral

$$\bar{u} = -4\int_{\infty}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}$$

und u_1 die Beziehung

$$\bar{u} = -u_1,$$

so dass also mit Rücksicht auf (1)

$$u_1 = 4\int_{\infty}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}, \quad u_2 = 4\int_{z}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}$$

gefunden wird. Wir haben demnach

$$(8) \qquad u_1 = \pm 8iK, \quad u_2 = \pm 8K',$$

wo jetzt noch die Vorzeichen $\pm$ in geeigneter Weise zu fixiren sind.

In der Theorie der elliptischen Functionen werden die Functionen K und $K'i$ so definirt, dass für Werthe des Moduls z, die zwischen 0 und 1 liegen, K sowohl wie K' real positiv sind; dann ist nämlich der rein imaginäre Quotient

$$\tau = \frac{K'i}{K}$$

so beschaffen, dass sein Coefficient von i einen positiven Werth hat. Es ist für unsere Zwecke am nützlichsten, wenn wir die Definition der K und $K'i$ dadurch geben, dass wir diese Functionen durch die zu den singulären Punkten 0, 1, ∞ gehörigen canonischen Fundamentalsysteme darstellen.

Da für die Differentialgleichung (L) die Grössen

$$1-\gamma, \quad \gamma-\alpha-\beta, \quad \alpha-\beta$$

gleich Null sind, treten in den Entwickelungen der Integrale in der Umgebung der Stellen 0, 1, ∞ nothwendig Logarithmen auf. Nach den Formeln der Nummern 71, 72 (Bd. I, S. 253 ff., 259 ff.) haben wir für $z = 0$ die Integrale

$$u_{01} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right),$$

$$u_{02} = F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right) + F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right)\log z,$$

woselbst

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty}\left\{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2\lambda-1}{2\cdot 4\cdots 2\lambda}\right\}^2 z^\lambda$$

und (vergl. Nr. 71, Bd. I, S. 257)

$$F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right) = 4\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left\{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2\lambda-1}{2\cdot 4\cdots 2\lambda}\right\}^2 \sum_{\nu=1}^{2\lambda}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\, z^\lambda$$

zu nehmen ist.

Analog ist für $z = 1$

$$u_{11} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-z\right),$$

$$u_{12} = F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-z\right) + F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-z\right) \log(1 -$$

und für $z = \infty$

$$u_{\infty 1} = z^{-\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{z}\right),$$

$$u_{\infty 2} = z^{-\frac{1}{2}} \left\{F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{z}\right) + F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{z}\right) \log \frac{1}{z}\right\}.$$

Zufolge der Formeln (2) und (8) kann sich K von u_{01} u von u_{11} nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Um Factoren zu bestimmen, setzen wir zuvörderst in K für z den Null ein; dann reducirt sich K auf

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Wir wählen das positive Vorzeichen, so dass also

$$\lim_{z=0} K(z) = K(0) = \frac{\pi}{2}$$

wird. Dann ist

$$(9) \qquad K(z) = \frac{\pi}{2} u_{01} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right),$$

und wir sehen, dass die so definirte Function wirklich für reale \ von z, die zwischen 0 und 1 liegen, real positiv ist.

Da sich die Differentialgleichung (L) nicht verändert, wei an Stelle von z setzen $1 - z$, oder in der Sprache der Theo elliptischen Functionen, wenn wir an Stelle des Moduls x^2 dei plementären Modul

$$x'^2 = 1 - x^2$$

nehmen, so schliessen wir, dass K' sich von dem Integrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-(1-z)t)}}$$

nur durch einen constanten Factor unterscheiden kann. In de ergiebt sich aus der zweiten der Gleichungen (6) durch die Subst

$$t' = \frac{1-zt}{1-z},$$

$$2K'i = \int_0^1 \frac{dt'}{\sqrt{t'(t'-1)(1-(1-z)t')}}.$$

Wir wählen die Vorzeichen so, dass

$$(10) \qquad 2K'(z) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-(1-z)t)}} = 2K(1-z)$$

ist, dann haben wir also

$$\lim_{z=1} K'(z) = K(0) = \frac{\pi}{2},$$

und folglich

$$(11) \qquad K'(z) = K(1-z) = \frac{\pi}{2} u_{11} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-z\right),$$

es ist demnach, wie wir verlangten, für ein reales zwischen 0 und 1 gelegenes z auch K' real positiv.

249. Fundamentalsubstitutionen der Legendre'schen Differentialgleichung. Darstellung von K und $K'i$ durch die canonischen Fundamentalsysteme.

Wenn wir uns $K'(z)$ durch das Fundamentalsystem u_{01}, u_{02} dargestellt denken

$$(12) \qquad 2K'(z) = c_1 u_{01} + c_2 u_{02},$$

so gelangen wir zu einer interessanten, zuerst von Legendre gegebenen Entwickelung dieses Integrals in der Umgebung von $z = 0$. Es ist

$$(13) \qquad 2K'(z) = -\int_1^z \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-z)}} = -\int_1^z \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}},$$

setzen wir also

$$A = \int_1^z \frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}\, dx, \quad B = \int_1^z \frac{dx}{\sqrt{x(x-z)}},$$

so ist

$$(14) \qquad 2K'(z) = -(A+B).$$

Durch elementare Rechnung ergiebt sich

$$B = \log\left(1 - \sqrt{1-z}\right) - \log\left(1 + \sqrt{1-z}\right),$$

und wenn wir in der Umgebung von $z = 0$ entwickeln,

$$B = -2\log 2 + \mathfrak{P}(z) + \log z,$$

wo $\mathfrak{P}(z)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von z fortschreitende Reihe bedeutet, die für $z = 0$ verschwindet. Das Integral A reducirt sich für $z = 0$ auf

$$\int_1^0 \frac{dx}{(1+\sqrt{1-x})\sqrt{1-x}} = -2\log 2,$$

so dass sich also

$$\lim_{z=0} (A + B - \log z) = -4 \log 2$$

und demnach mit Rücksicht auf (14)

(14a) $$\lim_{z=0} (2K'(z) + \log z) = 4 \log 2$$

ergiebt. Addiren wir nun auf beiden Seiten der Gleichung (12) $\log z$ hinzu und setzen dann $z = 0$, so erhalten wir zufolge der Darstellung von u_{01}, u_{02}

(15) $$4 \log 2 = c_1 + (c_2 + 1) \lim_{z=0} \log z,$$

wenn wir in dem Ausdrucke von u_{02} den Werth von $\log z$ so wählen, dass derselbe für positives z zwischen 0 und 1 real ist. Aus (15) folgt

$$c_1 = 4 \log 2, \quad c_2 = -1,$$

wir haben also die Darstellung

(16) $$2K'(z) = 4 \log 2 \cdot u_{01} - u_{02},$$

worin jetzt auch u_{02} eine eindeutig festgelegte Bedeutung besitzt.

Zufolge der Gleichung (10) ist

$$K(z) = K'(1 - z),$$

wir können also der Gleichung (16) die daraus durch Vertauschung von z mit $1 - z$ hervorgehende Gleichung

(16a) $$2K(z) = 4 \log 2 \cdot u_{11} - u_{12}$$

an die Seite stellen.

Nun ist für einen Umlauf von z, der den Querschnitt l_1 einm in positivem Sinne überschreitet,

$$\Theta_1 u_{02} = u_{02} + 2\pi i u_{01},$$

folglich haben wir nach (9) und (16)

$$\Theta_1 (K'i) = K'i + 2K,$$

und daraus folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (2), dass wir in (

$$u_1 = 8iK$$

zu setzen haben, da nach (13)

$$u_2 = 8K'$$

zu nehmen ist. Die Gleichungen (2) liefern dann sofort die d Umlaufe um $z = 1$ entsprechende Fundamentalsubstitution von K u $K'i$; wir stellen beide Substitutionen zusammen:

$$
(17) \quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} \Theta_1 K &= K, \\ \Theta_1(K'i) &= K'i + 2K, \end{aligned}\right\} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ \left.\begin{aligned} \Theta_2 K &= K - 2Ki, \\ \Theta_2(K'i) &= K'i, \end{aligned}\right\} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}
$$

Wir geben nun noch die Darstellung von K und K' durch die Integrale $u_{\infty 1}$, $u_{\infty 2}$.

Sei

$$
K(z) = \alpha u_{\infty 1} + \beta u_{\infty 2},
$$
$$
K'(z) i = \gamma u_{\infty 1} + \delta u_{\infty 2},
$$

dann wissen wir zunächst, dass bei einem einfachen positiven Umlaufe um $z = \infty$ die Integrale K, $K'i$ die Substitution

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}
$$

erfahren müssen. Andererseits verwandeln sich $u_{\infty 1}$, $u_{\infty 2}$ bei einem solchen Umlaufe in

$$
-u_{\infty 1}, \quad -(u_{\infty 2} + 2\pi i u_{\infty 1});
$$

wir erhalten demgemäss die Gleichungen

$$
(18) \quad \begin{cases} \alpha + \gamma + \pi i \beta = 0, \\ \qquad \beta + \delta \quad = 0. \end{cases}
$$

Führen wir in den Integralen

$$
K(z) = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}}, \quad K'(z) = \frac{1}{2} \int_z^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}
$$

die Grösse $\frac{1}{x}$ als neue Integrationsvariable ein, so ergiebt sich

$$
K(z) = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{\frac{1}{z}} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)\left(x-\frac{1}{z}\right)}} + \int_{\frac{1}{z}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)\left(x-\frac{1}{z}\right)}} \right\},
$$

$$
K'(z) = -\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{z}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)\left(\frac{1}{z}-x\right)}}.
$$

Nun ist aber (vergl. die Gleichungen (1), (8) und (9)) offenbar

$$\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{z}} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)\left(x-\frac{1}{z}\right)}} = \varepsilon_1 \frac{\pi}{2} u_{\infty 1}, \quad \varepsilon_1 = \pm 1,$$

und ebenso folgt, wenn wir in (13) und (16) an Stelle von z setzen

$$\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{z}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)\left(\frac{1}{z}-x\right)}} = 2 \log 2 \cdot u_{\infty 1} - \frac{1}{2} u_{\infty 2},$$

also

$$\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{z}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)\left(x-\frac{1}{z}\right)}} = \varepsilon_2 i \left(2 \log 2 \cdot u_{\infty 1} - \frac{1}{2} u_{\infty 2}\right), \quad \varepsilon_2 = \pm$$

Wir finden folglich

$$K(z) = \left(\varepsilon_1 \frac{\pi}{2} + \varepsilon_2 2 i \log 2\right) u_{\infty 1} - \frac{\varepsilon_2 i}{2} u_{\infty 2},$$
$$K'(z) i = - 2 i \log 2 \cdot u_{\infty 1} + \frac{i}{2} u_{\infty 2},$$

d. h. es ist

$$\gamma = - 2 i \log 2, \quad \delta = \frac{i}{2},$$

und da die Gleichungen (18) hiernach

$$\beta = - \frac{i}{2}, \quad \alpha = - \frac{\pi}{2} + 2 i \log 2,$$

also für die zu bestimmenden Vorzeichen

$$\varepsilon_1 = - 1, \quad \varepsilon_2 = 1$$

ergeben, so haben wir die gesuchte Darstellung

$$(19) \quad \begin{cases} K(z) = \left(- \frac{\pi}{2} + 2 i \log 2\right) u_{\infty 1} - \frac{i}{2} u_{\infty 2}, \\ K'(z) i = - 2 i \log 2 \cdot u_{\infty 1} + \frac{i}{2} u_{\infty 2}. \end{cases}$$

250. Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln des elliptisc Integrals zweiter Gattung. Darstellung der Classenbeziehung zu Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln des Integrals er Gattung. Die Legendre'sche Relation.

Indem wir nun dazu übergehen, die Differentialgleichung für Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrals zweiter Gattung als F tionen des Moduls $\varkappa^2 = z$ aufzustellen, bemerken wir, dass in

Litteratur verschiedene Normalintegrale zweiter Gattung betrachtet worden sind.

Legendre hat das Normalintegral

$$\int \frac{(1-zy^2)\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-zy^2)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-zy^2)}} - z\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-zy^2)}}$$

und dem entsprechend als Periodicitätsmoduln die Integrale

$$\int_0^1 \frac{(1-zy^2)\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-zy^2)}}, \quad \int_1^{\frac{1}{\sqrt{z}}} \frac{(1-zy^2)\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-zy^2)}},$$

die sich durch die Substitution

$$y^2 = \frac{1}{x}$$

in Integrale von der Form

$$v = -\frac{1}{2}\int_{(A)} x^{-\frac{3}{2}}(x-1)^{-\frac{1}{2}}(x-z)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

verwandeln. Für dieselben ist also

$$\beta_1 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}, \quad \xi = \frac{3}{2},$$

und die entsprechende Differentialgleichung, wie sie von Legendre aufgestellt worden ist, lautet demnach

$$z(1-z)\frac{d^2v}{dz^2} + (1-z)\frac{dv}{dz} + \frac{1}{4}v = 0.$$

Nur hat Legendre hier ebenso wie für (L) die unabhängige Variable

$$\varkappa = \sqrt{z},$$

so dass bei ihm die Gleichungen die Form haben

$$(1-\varkappa^2)\frac{d^2u}{d\varkappa^2} + \frac{1-3\varkappa^2}{\varkappa}\frac{du}{d\varkappa} - u = 0,$$

$$(1-\varkappa^2)\frac{d^2v}{d\varkappa^2} + \frac{1-\varkappa^2}{\varkappa}\frac{dv}{d\varkappa} + v = 0.$$

Spätere Autoren pflegten

$$\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-zy^2)}}$$

als Normalintegral zweiter Gattung zu nehmen; die Periodicitätsmoduln desselben sind in der Form

$$\bar{v} = \int\limits_{(A)} x^{-\frac{3}{2}} (x-1)^{-\frac{1}{2}} (x-z)^{-\frac{1}{2}} dx$$

enthalten. Man hat also

$$\beta_1 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}, \quad \xi = \frac{1}{2}$$

und somit die Differentialgleichung

$$z(1-z)\frac{d^2\bar{v}}{dz^2} + (2-3z)\frac{d\bar{v}}{dz} - \frac{3}{4}\bar{v} = 0.$$

Wir wollen entsprechend der Normalform (I) (Nr. 248, S. 477) des elliptischen Integrals erster Gattung die von Herrn **Fuchs** benutzte Normalform

(II) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}$$

des Integrals zweiter Gattung zu Grunde legen, die sich auch den Festsetzungen, wie sie Herr **Weierstrass** und **Riemann** für die hyperelliptischen beziehungsweise **Abel**'schen Integrale getroffen haben, am besten anpasst.

Die Integrale der Form

$$\mathfrak{u} = \int\limits_{(A)} \frac{x\,dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}} = \int\limits_{(A)} x^{\frac{1}{2}} (x-1)^{-\frac{1}{2}} (z-x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

genügen, da

$$\beta_1 = \frac{3}{2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}, \quad \xi = \frac{1}{2}; \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = 0$$

ist, der Differentialgleichung

(L′) $$z(1-z)\frac{d^2\mathfrak{u}}{dz^2} - z\frac{d\mathfrak{u}}{dz} + \frac{1}{4}\mathfrak{u} = 0,$$

von der wir ebenso, wie von den beiden vorhin aufgestellten Differentialgleichungen für v und $\bar{v}$ wissen, dass sie mit (L) zur selben Classe gehören muss. Wir stellen zunächst die Beziehung her, die $\mathfrak{u}$ mit der abhängigen Variabeln u von (L) verknüpft.

Nach der in der Nr. 240 (S. 445 ff.) dargelegten Methode haben wir zu diesem Ende die Differentialgleichung für

$$\mathfrak{u}^{(1)} = \int\limits_{(A)} \frac{(z-x)^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{x(x-1)}}$$

aufzustellen. Dieselbe lautet, da

$$\beta_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}, \quad \xi = \frac{3}{2}$$

ist, wie folgt:

$$z(1-z)\frac{d^2\mathfrak{u}^{(1)}}{dz^2}-\frac{1}{4}\mathfrak{u}^{(1)}=0.$$

Da in unserem Falle die ganze Function $g_0(x)$ einfach gleich x ist, so haben wir, nach Gleichung (39) der Nr. 240 (S. 447),

$$\mathfrak{u}=zu-\mathfrak{U}^{(1)}.$$

Ferner ist

$$u=\int_{(A)}^{z}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}=2\frac{d\mathfrak{U}^{(1)}}{dz},$$

also folgt

$$\frac{du}{dz}=2\frac{d^2\mathfrak{U}^{(1)}}{dz^2}=\frac{-1}{2(z-1)z}\mathfrak{U}^{(1)},$$

wir finden also

(20) $$\mathfrak{u}=zu+2z(z-1)\frac{du}{dz}.$$

Setzen wir nunmehr

(20a) $$\begin{cases} J=zK+2z(z-1)\dfrac{dK}{dz}, \\ J'=zK'+2z(z-1)\dfrac{dK'}{dz}, \end{cases}$$

so sind die so definirten Lösungen von (L') (vergl. die Gleichungen (7), (13))

$$J=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}},\quad J'=\frac{1}{2}\int_1^{z}\frac{x\,dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}$$

die den K, K' entsprechenden aliquoten Theile von Periodicitätsmoduln des Integrales (II). Zwischen den vier Grössen

$$K,\ K',\ J,\ J'$$

besteht nun eine höchst wichtige Beziehung, die wir jetzt herleiten wollen.

Bilden wir die Determinante des Fundamentalsystems K, K' der Differentialgleichung (L), so ist

$$\begin{vmatrix} K & \dfrac{dK}{dz} \\ K' & \dfrac{dK'}{dz} \end{vmatrix} = c\cdot e^{-\int\frac{1-2z}{z(1-z)}dz}=\frac{c}{z(1-z)},$$

wo c eine Constante bedeutet. Um diese zu bestimmen, ersetzen wir K, K' z. B. durch ihre Ausdrücke in den u_{01}, u_{02}, dann kommt

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\pi}{2}u_{01} & \dfrac{\pi}{2}\dfrac{du_{01}}{dz} \\ \log 4\cdot u_{01}-\dfrac{u_{02}}{2} & \log 4\dfrac{du_{01}}{dz}-\dfrac{1}{2}\dfrac{du_{02}}{dz} \end{vmatrix}=\frac{c}{z(1-z)},$$

oder nach einfacher Reduction

$$(21)\qquad \frac{\pi}{4}\begin{vmatrix} u_{01} & \frac{d u_{01}}{dz} \\ z u_{02} & z\frac{d u_{02}}{dz} \end{vmatrix} = \frac{c}{z-1}.$$

Nun ist aber

$$\lim_{z=0} u_{01} = 1, \quad \lim_{z=0} \frac{d u_{01}}{dz} = \frac{1}{4},$$

$$\lim_{z=0} z u_{02} = 0, \quad \lim_{z=0} z\frac{d u_{02}}{dz} = 1,$$

wir finden also, indem wir in (21) z gleich Null nehmen,

$$c = -\frac{\pi}{4},$$

d. h. wir haben die Gleichung

$$(22)\qquad K\frac{dK'}{dz} - K'\frac{dK}{dz} = \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{z(z-1)}.$$

Führen wir hierin an Stelle von z

$$\varkappa = \sqrt{z}$$

als unabhängige Variable ein, so ergiebt sich die von Legendre fundene Beziehung

$$(22\text{a})\qquad \varkappa(1-\varkappa^2)\left[K\frac{dK'}{d\varkappa} - K'\frac{dK}{d\varkappa}\right] = -\frac{\pi}{2}.$$

Aus den Gleichungen (20a) folgt

$$\frac{dK}{dz} = \frac{1}{2z(z-1)}J - \frac{z}{2z(z-1)}K,$$

$$\frac{dK'}{dz} = \frac{1}{2z(z-1)}J' - \frac{z}{2z(z-1)}K',$$

dies in (22) eingesetzt, liefert die gesuchte Beziehung

$$(23)\qquad KJ' - JK' = \frac{\pi}{2},$$

die wir als die Legendre'sche Relation bezeichnen wollen, ob sie der Form nach nicht ganz mit der von Legendre aufgeste Gleichung übereinstimmt, in welcher nämlich an Stelle von J, J' Periodicitätsmoduln des Legendre'schen Normalintegrals zweiter tung (S. 485) auftreten.

Fünftes Kapitel.

251. Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale. Die Haedenkamp-Fuchs'sche Relation.

In einer Abhandlung „Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid" (Crelle's Journal, Bd. 19, S. 309 ff.) bemerkt Jacobi, dass er mit Hülfe einer daselbst auseinandergesetzten „merkwürdigen analytischen Substitution" u. a. „die berühmte von Legendre entdeckte Relation .... auf alle Abel'schen (will sagen hyperelliptischen) Integrale ausgedehnt habe". Im 22. Bande desselben Journals hat Haedenkamp eine Relation zwischen den Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung entwickelt, die wahrscheinlich mit der, die Jacobi im Sinne hatte, übereinstimmt. Herr Fuchs hat dann im 71. Bande der erwähnten Zeitschrift die Haedenkamp'sche Relation von einem Fehler gereinigt und in neue, elegante Form gesetzt, indem er sich einer Methode bediente, von der diejenige, die wir zur Ableitung der Legendre'schen Relation benützt haben, eine specielle Anwendung darstellt.

Betrachten wir nämlich wie in der Nr. 247 die Differentialgleichung (E), der die Periodicitätsmoduln des hyperelliptischen Integrales erster Gattung

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)\cdots(x-a_m)(z-x)}} \qquad (m \equiv 0 \bmod 2)$$

Genüge leisten, so stellen z. B. die Integrale

$$u_{0,\varkappa+1} = \int_{a_\varkappa}^{a_{\varkappa+1}} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_m)}} \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots m-1),$$

wo der Gleichmässigkeit wegen $z = a_0$ gesetzt wurde, ein Fundamentalsystem von (E) dar, und es ist folglich die Determinante dieses Fundamentalsystems

$$\left|\frac{d^\lambda u_{0\varkappa}}{dz^\lambda}\right|_{\binom{\varkappa=1,2,\cdots m}{\lambda=0,1,\cdots m-1}} = D(u_{01}, u_{02}, \cdots u_{0m}) = \text{const.}\, e^{-\int \frac{Q_{m-1}(z)}{Q_m(z)} dz},$$

wo nach Gleichung (7) der Nr. 247 (S. 4 ι ɔ)

$$\frac{Q_{m-1}(z)}{Q_m(z)} = (m-1)\frac{d\log P_m(z)}{dz}$$

ist, so dass also

(24) $$D(u_{01}, u_{02}, \cdots u_{0m}) = \frac{\text{const.}}{[P_m(z)]^{m-1}}$$

gefunden wird.

Nun gehören die Differentialgleichungen ($E^{(\lambda)}$), die durch Periodicitätsmoduln der Integrale

$$\int \frac{x^\lambda dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)(z-x)}} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots m-1)$$

befriedigt werden, nach dem Theoreme der Nr. 247 (S. 475) mit (zur selben Classe; es ist also:

(25) $$u_\lambda = \int\limits_{(A)} \frac{x^\lambda dx}{\sqrt{(x-a_1)\cdots(x-a_m)(x-z)}} = r_{\lambda 0}u_0 + r_{\lambda 1}\frac{du_0}{dz} + \cdots + r_{\lambda, m-1}\frac{d^{m-1}u_0}{dz^{m-1}},$$

wenn wir setzen

$$u_0 = \int\limits_{(A)} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)\cdots(x-a_m)(x-z)}},$$

und durch $r_{\lambda 0}, r_{\lambda 1}, \cdots r_{\lambda, m-1}$ gewisse wohlbestimmte rationale Fr tionen von z bezeichnen. Setzen wir in (25) der Reihe nach für u_0 Integrale

$$u_{01}, u_{02}, \cdots u_{0m}$$

und bezeichnen die entsprechenden auf den linken Seiten steh(Integrale von ($E^{(\lambda)}$) durch

$$u_{\lambda x} = \int\limits_{a_{x-1}}^{a_x} \frac{x^\lambda dx}{\sqrt{(x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_m)}} \qquad (x = 1, 2, \cdots m),$$

so können wir, da, wie leicht zu beweisen ist, die Determinant

$$|r_{\lambda x}| \qquad (\lambda, x = 1, 2, \cdots m-1)$$

nicht identisch verschwindet, die

$$\frac{du_{0x}}{dz}, \cdots \frac{d^{m-1}u_{0x}}{dz^{m-1}}$$

als lineare homogene Functionen der

$$u_{0x}, u_{1x}, \cdots u_{m-1, x}$$

mit in z rationalen Coefficienten ausrechnen. Tragen wir diese Werthe in die Determinante auf der linken Seite von (24) ein, so ergiebt sich

$$R(z)\,\underset{\begin{pmatrix}\lambda=0,1,\cdots m-1\\ \varkappa=1,2,\cdots m\end{pmatrix}}{|u_{\lambda\varkappa}|} = \frac{\text{const.}}{[P_m(z)]^{m-1}},$$

wo $R(z)$ eine rationale Function bedeutet. Herr Fuchs zeigt nun zunächst, dass $R(z)$ sich von

$$\frac{\text{const.}}{[P_m(z)]^{m-1}}$$

nur durch einen numerischen, d. h. von den $a_1, a_2, \cdots a_m, z$ unabhängigen Factor unterscheidet und findet dann durch Specialisirung

$$(26)\qquad \underset{\begin{pmatrix}\lambda=0,1,\cdots m-1\\ \varkappa=1,2,\cdots m\end{pmatrix}}{|u_{\lambda\varkappa}|} = \frac{(-1)^{\frac{m}{4}}(2\pi)^{\frac{m}{2}}}{1\cdot 3\cdots(m-3)(m-1)}.$$

Dies ist die gesuchte Relation; für $m=2$ reducirt sie sich auf die Legendre'sche

$$\begin{vmatrix} \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}} & \int\limits_1^z \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}} \\ \int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}} & \int\limits_1^z \frac{x\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}} \end{vmatrix} = 2\pi i,$$

die mit unserer Gleichung (23) übereinstimmt, wenn man die hier benutzten Integrale durch die K, K', J, J' ausdrückt.

252. Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung vom Range Zwei. Fundamentalsubstitutionen. Reductibilität der zweiten Associirten.

Für die Theorie der hyperelliptischen Functionen ist die Relation (26) von geringerer Wichtigkeit als gewisse andere Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln, die Herr Weierstrass entdeckt hat und von denen wir schon wiederholt andeutungsweise gesprochen haben. Wir wollen in dem (nächst dem Falle des elliptischen Integrals) einfachsten Falle $m=4$ diese Relationen herleiten, indem wir uns einer Methode bedienen, die Herr Fuchs angegeben hat, und bei welcher sich die gedachten Relationen als Consequenzen aus dem Fuchs'schen Satze der Nr. 230 (S. 403) ergeben.

Die Differentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln des hyperelliptischen Integrals erster Gattung

(1) $$\int^{z} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(z-x)}},$$

d. h. die Integrale von der Form

$$u = \int_{(A)}^{z} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(z-x)}}$$

Genüge leisten, lautet zufolge der Gleichung (7) der Nr. 247 (S. 473), wenn wir

(2) $$P_4(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4) = \psi(x)$$

setzen, wie folgt:

(E) $$\psi(z)\frac{d^4u}{dz^4} + 3\psi'(z)\frac{d^3u}{dz^3} + \frac{25}{8}\psi''(z)\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{5}{4}\psi^{(3)}(z)\frac{du}{dz} + \frac{15}{128}\psi^{(4)}(z)u = 0.$$

Die Integrale

$$\mathfrak{u} = \int_{(A)}^{z} \frac{x\,dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}},$$

unter denen die Periodicitätsmoduln des zweiten von (1) unabhängigen Integrals erster Gattung

$$\int^{z} \frac{x\,dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}}$$

enthalten sind, befriedigen, wie wir wissen, eine Differentialgleichung, die mit (E) zur selben Classe gehört; wir wollen den Ausdruck von $\mathfrak{u}$ durch u und seine Ableitungen herstellen.

Es ist zunächst (vergl. Nr. 240, S. 447)

(3) $$\mathfrak{u} = zu - \mathfrak{U}^{(1)},$$

wenn wir setzen

$$\mathfrak{U}^{(1)} = \int_{(A)}^{z} \frac{(z-x)\,dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}}.$$

Da für dieses letztere Integral ξ den Werth $\frac{3}{2}$ hat, so genügt dasselbe der Differentialgleichung ($E_{\frac{3}{2}}$), deren Coefficienten nach der Formel (6) der Nr. 247 (S. 473) wie folgt lauten:

$$Q_4\left(z, \frac{3}{2}\right) = -\frac{8}{3}\psi(z),\quad Q_3\left(z, \frac{3}{2}\right) = -\frac{16}{3}\psi'(z),\quad Q_2\left(z, \frac{3}{2}\right) = -3\psi''(z),$$

$$Q_1\left(z, \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{3}\psi^{(3)}(z),\quad Q_0\left(z, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{48}\psi^{(4)}(z) = \frac{1}{2};$$

also haben wir, da

$$u = \frac{1}{2}\frac{d\mathfrak{U}^{(1)}}{dz}$$

für $\mathfrak{U}^{(1)}$ den Ausdruck

$$-\mathfrak{U}^{(1)} = -\frac{8}{3}\psi(z)\frac{d^3u}{dz^3} - \frac{16}{3}\psi'(z)\frac{d^2u}{dz^2} - 3\psi''(z)\frac{du}{dz} - \frac{1}{3}\psi^{(3)}(z)u,$$

folglich nach (3)

$$\mathfrak{u} = \left[z - \frac{1}{3}\psi^{(3)}(z)\right]u - 3\psi''(z)\frac{du}{dz} - \frac{16}{3}\psi'(z)\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{8}{3}\psi(z)\frac{d^3u}{dz^3}.$$

Zufolge des Fuchs'schen Satzes der Nr. 230 (S. 403) ist die ite associirte Differentialgleichung von (E) reductibel. Wir können mit Hülfe der Fundamentalsubstitutionen von (E) in folgender :se verificiren.

Betrachten wir das Fundamentalsystem

$$v_\varkappa = \int_z^{a_\varkappa} \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

(E), so lauten nach den Formeln (12) der Nr. 247 (S. 474) die ıdamentalsubstitutionen für dasselbe:

$$\begin{array}{llll}
{}_1 = v_1, & \Theta_1 v_2 = v_2 - 2v_1, & \Theta_1 v_3 = v_3 - 2v_1, & \Theta_1 v_4 = v_4 - 2v_1, \\
{}_1 = v_1 + 2v_2, & \Theta_2 v_2 = v_2, & \Theta_2 v_3 = v_3 - 2v_2, & \Theta_2 v_4 = v_4 - 2v_2, \\
v_1 = v_1 + 2v_3, & \Theta_3 v_2 = v_2 + 2v_3, & \Theta_3 v_3 = v_3, & \Theta_3 v_4 = v_4 - 2v_3, \\
v_1 = v_1 + 2v_4, & \Theta_4 v_2 = v_2 + 2v_4, & \Theta_4 v_3 = v_3 + 2v_4, & \Theta_4 v_4 = v_4,
\end{array}$$

h. wir haben

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

raus finden wir sofort die entsprechenden Fundamentalsubstitutionen, zu dem Fundamentalsysteme

$$v_1 v_2' - v_2 v_1' = \omega_1, \quad v_1 v_3' - v_3 v_1' = \omega_2, \quad v_1 v_4' - v_4 v_1' = \omega_3,$$
$$v_2 v_3' - v_3 v_2' = \omega_4, \quad v_2 v_4' - v_4 v_2' = \omega_5, \quad v_3 v_4' - v_4 v_3' = \omega_6$$

zweiten Associirten von (E) gehören, indem wir gemäss dem :e der Nr. 168 (S. 130) die zweiten Associirten der Substitutionen A_2, A_3, A_4 bilden. Bezeichnen wir dieselben durch B_1, B_2, B_3, B_4, ist also

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der blosse Anblick dieser Substitutionen lehrt, dass das Inte

(5) $$\bar{\omega} = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6$$

der zweiten Associirten von (E) bei den Umläufen von z um die sin-lären Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 ungeändert bleibt; $\bar{\omega}$ ist also eine eind-tige Function, und da die Differentialgleichung (E) zur Fuchs'sch Classe gehört, $\bar{\omega}$ also keine Stelle der Unbestimmtheit besitzen kan so ist es eine rationale Function von z. Damit ist die Reductibili der zweiten Associirten von (E) direct in Evidenz gesetzt.

Zwischen den $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_6$ besteht überdies die in der Nr. 1' (S. 139) allgemein abgeleitete identische Beziehung (γ)

(6) $$\omega_1\omega_6 - \omega_2\omega_5 + \omega_3\omega_4 = 0.$$

Bezeichnen wir die den Integralen v_1, v_2, v_3, v_4 entsprecher Lösungen der Differentialgleichung für $\mathfrak{u}$ durch

$$\mathfrak{v}_\varkappa = \int_z^{a_\varkappa} \frac{x\,dx}{\sqrt{\psi(x)}\,(z-x)} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

und untersuchen die Differentialgleichung sechster Ordnung, d Ausdrücke

(7) $$v_i\mathfrak{v}_\varkappa - v_\varkappa\mathfrak{v}_i \qquad (i, \varkappa = 1, 2, 3, 4;\ i < \varkappa)$$

Genüge leisten, so wissen wir nach den Ergebnissen der (S. 154), dass diese Differentialgleichung

(8) $$\chi_0(z)\frac{d^6\mathfrak{w}}{dz^6} + \chi_1(z)\frac{d^5\mathfrak{w}}{dz^5} + \cdots + \chi_6(z)\mathfrak{w} = 0$$

mit der zweiten Associirten von (E) zur selben Art gehören gehört aber offenbar mit dieser zweiten Associirten sogar Classe; denn da die Differentialgleichung, der $\mathfrak{u}$ genügt, m

selben Classe gehört, stimmen die singulären Stellen der $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3, \mathfrak{v}_4$ mit denen der v_1, v_2, v_3, v_4 überein; die Differentialgleichung (8) kann demnach keine anderen wesentlichen singulären Stellen haben wie die zweite Associirte von (E), d. h. keine anderen als die Stellen

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4, \; \infty.$$

Da die zweite associirte Differentialgleichung von (E) reductibel ist, so ist auch die ganze zweite associirte Art der durch (E) bestimmten Art reductibel; die Differentialgleichung (8) ist also jedenfalls reductibel. Dies folgt auch schon daraus, dass, wenn wir setzen

$$v_1\mathfrak{v}_2 - v_2\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{w}_1, \quad v_1\mathfrak{v}_3 - v_3\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{w}_2, \quad v_1\mathfrak{v}_4 - v_4\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{w}_3,$$

$$v_2\mathfrak{v}_3 - v_3\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{w}_4, \quad v_2\mathfrak{v}_4 - v_4\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{w}_5, \quad v_3\mathfrak{v}_4 - v_4\mathfrak{v}_3 = \mathfrak{w}_6,$$

das dem Integrale $\overline{\varpi}$ der zweiten Associirten von (E) entsprechende Integral

$$\overline{\mathfrak{w}} = \mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2 + \mathfrak{w}_3 + \mathfrak{w}_4 - \mathfrak{w}_5 + \mathfrak{w}_6$$

von (8) offenbar auch eine rationale Function von z sein muss.

Wir werden beweisen, dass dieses Integral $\overline{\mathfrak{w}}$ von (8) identisch verschwindet, so dass also (8) in Wirklichkeit nicht von der sechsten, sondern nur von der fünften Ordnung ist.

Zu dem Ende stellen wir uns zuvörderst die Entwickelungen der Integrale von (E) in der Umgebung der singulären Stellen her.

253. Entwickelungen für die Lösungen der Differentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln des Integrals erster Gattung genügen, in der Umgebung der singulären Punkte.

Nach den allgemein für die Tissot-Pochhammer'sche Differentialgleichung gefundenen Resultaten (Nr. 243, S. 456) sind die Wurzeln der zu $z = a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von (E)

$$0, \; 1, \; 2, \; 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4),$$

und (S. 453) das Integral $v_\varkappa$ gehört zum Exponenten 0. Aus der Form der Fundamentalsubstitutionen $A_\varkappa$ folgt demgemäss, dass die v_1, v_2, v_3, v_4 für jeden der singulären Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 als ein canonisches Fundamentalsystem aufgefasst werden können, und dass in der Umgebung von $z = a_1$

$$v_1 = \mathfrak{P}_{11}(z \mid a_1), \qquad v_2 = \mathfrak{P}_{12}(z \mid a_1) - \frac{v_1}{\pi i} \log (z - a_1),$$

$$v_3 = \mathfrak{P}_{13}(z \mid a_1) - \frac{v_1}{\pi i} \log (z - a_1), \quad v_4 = \mathfrak{P}_{14}(z \mid a_1) - \frac{v_1}{\pi i} \log (z - a_1),$$

in der Umgebung von $z = a_2$

$$v_1 = \mathfrak{P}_{21}(z \mid a_2) + \frac{v_2}{\pi i} \log(z - a_2), \qquad v_2 = \mathfrak{P}_{22}(z \mid a_2),$$

$$v_3 = \mathfrak{P}_{23}(z \mid a_2) - \frac{v_2}{\pi i} \log(z - a_2), \qquad v_4 = \mathfrak{P}_{24}(z \mid a_2) - \frac{v_2}{\pi i} \log(z - a_2),$$

in der Umgebung von $z = a_3$

$$v_1 = \mathfrak{P}_{31}(z \mid a_3) + \frac{v_3}{\pi i} \log(z - a_3), \qquad v_2 = \mathfrak{P}_{32}(z \mid a_3) + \frac{v_3}{\pi i} \log(z - a_3),$$

$$v_3 = \mathfrak{P}_{33}(z \mid a_3), \qquad v_4 = \mathfrak{P}_{34}(z \mid a_3) - \frac{v_3}{\pi i} \log(z - a_3),$$

in der Umgebung von $z = a_4$

$$v_1 = \mathfrak{P}_{41}(z \mid a_4) + \frac{v_4}{\pi i} \log(z - a_4), \qquad v_2 = \mathfrak{P}_{42}(z \mid a_4) + \frac{v_4}{\pi i} \log(z - a_4),$$

$$v_3 = \mathfrak{P}_{43}(z \mid a_4) + \frac{v_4}{\pi i} \log(z - a_4), \qquad v_4 = \mathfrak{P}_{44}(z \mid a_4)$$

sein muss, wo die $\mathfrak{P}_{\lambda\varkappa}$ gewöhnliche Potenzreihen ihrer Argumente bedeuten, und

$$\mathfrak{P}_{11}(a_1 \mid a_1), \quad \mathfrak{P}_{22}(a_2 \mid a_2), \quad \mathfrak{P}_{33}(a_3 \mid a_3), \quad \mathfrak{P}_{44}(a_4 \mid a_4)$$

jedenfalls von Null verschieden sind.

Um die Darstellung in der Umgebung von $z = \infty$ zu finden, bemerken wir, dass die v_1, v_2, v_3, v_4 bei einem Umlaufe um $z = \infty$ die Substitution

$$(9) \qquad A_5 = A_1^{-1} A_2^{-1} A_3^{-1} A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = (a_{i\varkappa}) \quad {\scriptstyle (i,\,\varkappa = 1,\,2,\,3,\,4)}$$

erfahren. Die zugehörige Fundamentalgleichung

$$| a_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}\omega | = 0 \qquad {\scriptstyle (i,\,\varkappa = 1,\,2,\,3,\,4)}$$

hat, wie man sofort übersieht, die Wurzel

$$\omega = -1,$$

und das System

$$(a_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}(-1)) \qquad {\scriptstyle (i,\,\varkappa = 1,\,2,\,3,\,4)}$$

ist vom Range 1. Das System

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist vom Range Null und das Gleiche gilt von allen folgenden Potenzen. In der Bezeichnung der Nr. 37 (Bd. I, S. 124 ff.) ist also

$$\omega_\alpha = -1,\quad \tau_{\alpha 1} = \varrho_{\alpha 1} = 3,\quad \tau_{\alpha 2} = 4,\quad \tau_{\alpha 3} = 4,\ \cdots.$$

Es muss folglich $\omega = -1$ eine vierfache Wurzel der Fundamentalgleichung sein ($\lambda = 4$), und da ferner

$$\varrho_{\alpha 2} = \tau_{\alpha 2} - \tau_{\alpha 1} = 1,\quad \varrho_{\alpha 3} = \tau_{\alpha 3} - \tau_{\alpha 2} = 0$$

ist, so besteht das canonische Fundamentalsystem für $z = \infty$ nach der in der erwähnten Nummer aufgestellten Regel aus einer Gruppe von zwei Elementen und zwei Gruppen von je einem Elemente.

Das Integral

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4$$

wird sich bei einem Umlaufe um $z = \infty$ mit -1 multipliciren, wenn

$$(10)\qquad c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

ist, und es giebt drei linear unabhängige Integrale von dieser Beschaffenheit, die also in der Umgebung von $z = \infty$ in Reihenform darstellbar sind. Ein viertes Integral enthält in der Umgebung von $z = \infty$ einen Logarithmus. Diese Resultate gelten nicht nur für die Differentialgleichung (E), sondern auch für jede mit (E) zur selben Art gehörige Differentialgleichung.

Bestimmen wir nach der Regel der Nr. 59 (Bd. I, S. 211) die zu $z = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung von (E), so lautet dieselbe

$$\varrho(\varrho+1)(\varrho+2)(\varrho+3) - 12\varrho(\varrho+1)(\varrho+2) + \frac{75}{2}\varrho(\varrho+1) - 30\varrho + \frac{45}{16} = 0;$$

ihre Wurzeln sind

$$\frac{1}{2},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{5}{2},$$

also gehören zu den Exponenten $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ in Reihenform darstellbare Integrale und zum Exponenten $\frac{3}{2}$ noch ein mit Logarithmen behaftetes. Das zum Exponenten $\frac{3}{2}$ gehörige und in Reihenform darstellbare Integral können wir durch ein ähnliches Verfahren erhalten, wie in der Nr. 245 (S. 463) das daselbst betrachtete Integral $\bar{u}$.

Bei der durch die Fig. 16 (S. 498) angedeuteten Lage stellt sich das Integral

$$u_5 = \int \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}},$$

erstreckt über eine um die Punkte z und $a_5 = \infty$ herumgelegte Doppelschleife

$$s_5 s_0 s_5^{-1} s_0^{-1} = (\infty, z),$$

wie folgt dar:

$$u_5 = u_1 - u_2 + u_3 - u_4,$$

oder, da ja

$$u_5 = 4\int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}}$$

ist, das Integral erstreckt auf directem Wege, d. h. in der durch Schnitte

$$l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4,\ l_0$$

zerschnittenen Fläche, so haben wir

(11) $$v_5 = -\int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}} = \int_\infty^z \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}} = v_4 - v_3 + v_2 -$$

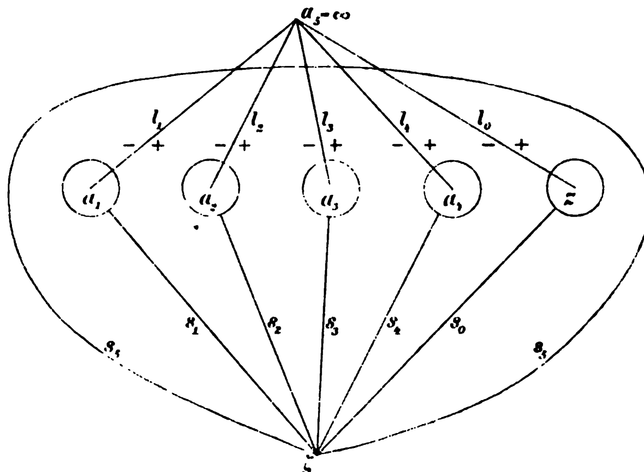


Fig. 16.

Hieraus erkennen wir, dass das Integral v_5 als Element des zu $z =$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems angesehen werden k denn die Bedingung (10) ist für dasselbe erfüllt. Nach der Metl der Nr. 242 (S. 453) können wir auch leicht die Entwickelung v_5 in der Umgebung von $z = \infty$ angeben.

Denken wir uns nämlich ζ und z in der Umgebung von $x =$ gelegen, so können wir in u_5 den Integranden nach fallenden Pote von x entwickeln. Sei

$$\frac{1}{\sqrt{\psi(x)}} = \frac{1}{x^2}\left(\delta_0 + \frac{\delta_1}{x} + \frac{\delta_2}{x^2} + \cdots\right), \quad \delta_0 = 1,$$

dann haben wir

$$u_5 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu \int\limits_{(\infty, z)} \frac{(z-x)^{-\frac{1}{2}}}{x^{\nu+2}}\, dx,$$

und wenn wir die Substitution

$$\frac{1}{x} = \frac{t}{z}$$

machen, wodurch sich das über die Doppelschleife (∞, z) erstreckte Integral in ein über die Doppelschleife $(0, 1)$ der t-Ebene erstrecktes verwandelt, welches sich in der Form

$$\int\limits_{(\infty, z)} \frac{(z-x)^{-\frac{1}{2}}}{x^{\nu+2}}\, dx = \frac{-4i}{z^{\nu+\frac{3}{2}}} \mathrm{B}\left(\nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

darstellen lässt, so ergiebt sich

$$u_5 = -z^{-\frac{3}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{4i\delta_\nu \mathrm{B}\left(\nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)}{z^\nu}$$

und folglich

$$v_5 = z^{-\frac{3}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{i\delta_\nu \mathrm{B}\left(\nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)}{z^\nu}.$$

Nun ist aber (vergl. Nr. 244, S. 462) für positiv ganzzahliges ν

$$\mathrm{B}(p+\nu, q) = \frac{p(p+1)\cdots(p+\nu-1)}{(p+q)(p+q+1)\cdots(p+q+\nu-1)} \mathrm{B}(p, q),$$

also hat man

$$\mathrm{B}\left(\nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdots 2\nu+1}{2\cdot 4\cdots 2\nu+2} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

und da

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(1)} = \pi$$

ist, so finden wir endlich

$$(12) \qquad v_5 = z^{-\frac{3}{2}} \pi i \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots 2\nu+1}{2\cdot 4\cdots 2\nu+2} \frac{\delta_\nu}{z^\nu}.$$

Dies ist also das zum Exponenten $\frac{3}{2}$ gehörige, in Reihenform darstellbare Integral; wir wollen die Bedeutung desselben für die Theorie des Integrals erster Gattung (1) (S. 492) hervorheben, um dadurch gleichzeitig auch die übrigen Elemente des zu $z = \infty$ gehörigen canonischen

Fundamentalsystems in der für unseren Zweck bequemsten Form zu erhalten.

Denken wir uns in üblicher Weise die zu dem hyperelliptischen Gebilde

$$s^2 = (z - x)(x - a_4)(x - a_3)(x - a_2)(x - a_1) \tag{13}$$

gehörige zweiblättrige Riemann'sche Fläche construirt, indem wir z mit a_4, a_3 mit a_2 und a_1 mit dem unendlich fernen Punkte durch Verzweigungsschnitte verbinden, längs deren dann die beiden Blätter sich in einander fortsetzen. Diese fünffach zusammenhängende Fläche ($p = 2$) werde nach dem Vorgange von Riemann durch das in der Figur 17 gezeichnete System der vier Querschnitte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ in eine einfach zusammenhängende zerschnitten. In dieser letzteren sind dann die zu

Fig. 17.

dem vorgelegten hyperelliptischen Gebilde gehörigen Integrale ersten und zweiter Gattung eindeutige Functionen des Ortes. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ die Periodicitätsmoduln, die das Integral (1) beziehungsweise an den Querschnitten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ besitzt, d. h. die (constanten) Differenzen zwischen den Werthen des Integrals am positiven und am negativen Ufer des betreffenden Querschnittes, so stellen sich dieselben durch die in der zerschnittenen Fläche zwischen den einzelnen Verzweigungspunkten hin erstreckten Integrale in folgender Weise dar (vergl. z. B. Prym „Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche", Zürich 1866, S. 7 ff.):

$$\mathfrak{B}_1 = 2\int_z^{a_4} \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}}, \qquad \mathfrak{B}_2 = 2\int_{a_3}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}},$$

$$\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1 = 2\int_{a_1}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}}, \qquad -\mathfrak{A}_2 = 2\int_{a_2}^{a_1} \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}}.$$

Wir haben also

$$(14) \qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_1 = 2(v_4 - v_3 + v_2 - v_1) = 2v_5, \\ \mathfrak{A}_2 = 2(v_2 - v_1), \\ \mathfrak{B}_1 = 2v_4, \\ \mathfrak{B}_2 = 2(v_2 - v_3). \end{cases}$$

Zufolge der Gleichung (9) erleidet das Fundamentalsystem

$$(15) \qquad \mathfrak{A}_1, \ \mathfrak{B}_1, \ \mathfrak{A}_2, \ \mathfrak{B}_2$$

von (E) bei einem Umlaufe von z um den unendlich fernen Punkt die Substitution

$$(16) \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

es ist also (15) ein zu $z = \infty$ gehöriges canonisches Fundamentalsystem, und zwar bilden $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1$ die eine zweielementige Gruppe, $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2$ die beiden einelementigen Gruppen. Wir haben demnach die Entwickelungen

$$\mathfrak{A}_1 = z^{-\frac{3}{2}} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\mathfrak{B}_1 = z^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{\pi i} \mathfrak{A}_1 \log \frac{1}{z},$$

$$\mathfrak{A}_2 = z^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{P}_3\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\mathfrak{B}_2 = z^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{P}_4\left(\frac{1}{z}\right),$$

wo $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_4$ gewöhnliche Potenzreihen von z^{-1} bedeuten, von denen jedenfalls $\mathfrak{P}_1$ für $z = \infty$ nicht verschwindet. Es ist nämlich nach Gleichung (12)

$$(17) \qquad \lim_{z=\infty} z^{\frac{3}{2}} \mathfrak{A}_1 = \lim_{z=\infty} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right) = 2 \lim_{z=\infty} z^{\frac{3}{2}} v_5 = 2\pi i.$$

Bemerken wir noch, dass zufolge der Entwickelung (12) der Nr. 242 (S. 453) in der Umgebung von $a_\varkappa$

(18) $$v_\varkappa = -\pi \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu \frac{1\cdot 3 \cdots 2\nu - 1}{2 \cdot 4 \cdots 2\nu} (z - a_\varkappa)^\nu$$

gefunden wird, wo die δ_ν durch die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{\psi(x)}} = (x - a_\varkappa)^{-\frac{1}{2}} (\delta_0 + \delta_1 (x - a_\varkappa) + \delta_2 (x - a_\varkappa)^2 + \cdots)$$

definirt werden, so dass also

$$\delta_0 = \psi'(a_\varkappa)^{-\frac{1}{2}}$$

und demgemäss

(19) $$\lim_{z=a_\varkappa} v_\varkappa = -\pi \psi'(a_\varkappa)^{-\frac{1}{2}} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

ist.

254. Entwickelungen für die Lösungen der Differentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln des anderen Integrals erster Gattung genügen, in der Umgebung der singulären Punkte.

Da die Differentialgleichung für $\mathfrak{u}$ mit (E) zur selben Classe gehört, gelten für die $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3, \mathfrak{v}_4$ im Wesentlichen die analogen Entwickelungen wie die, welche für v_1, v_2, v_3, v_4 gefunden wurden. Die Gleichung (4) der Nr. 252 (S. 493) gestattet uns die betreffenden Entwickelungen unmittelbar anzugeben.

Für die im Endlichen gelegenen singulären Stellen können sich die Exponenten, zu denen die $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3, \mathfrak{v}_4$ gehören, von den entsprechenden Exponenten der v_1, v_2, v_3, v_4 nur um positive ganze Zahlen unterscheiden, da die Coefficienten der rechten Seite von Gleichung (4) ganze rationale Functionen sind. Wir haben also in der Umgebung von $a_\varkappa$

$$\mathfrak{v}_\varkappa = \mathfrak{Q}_{\varkappa\varkappa}(z \mid a_\varkappa),$$
$$\mathfrak{v}_\lambda = \mathfrak{Q}_{\varkappa\lambda}(z \mid a_\varkappa) + \varepsilon_{\varkappa\lambda} \frac{\mathfrak{v}_\varkappa}{\pi i} \log (z - a_\varkappa), \quad \lambda \neq \varkappa,$$

wo die $\mathfrak{Q}_{\varkappa 1}, \mathfrak{Q}_{\varkappa 2}, \mathfrak{Q}_{\varkappa 3}, \mathfrak{Q}_{\varkappa 4}$ gewöhnliche Potenzreihen von $z - a_\varkappa$ bedeuten, und $\varepsilon_{\varkappa\lambda}$ gleich $+1$ oder -1 zu nehmen ist, je nachdem $\varkappa$ kleiner oder grösser wie λ ist. Die Entwickelung von $\mathfrak{v}_\varkappa$ ergiebt sich aus der Gleichung (12) der Nr. 242 (S. 453) ähnlich wie oben die Entwickelung von $v_\varkappa$ in der Form

(20) $$\mathfrak{v}_\varkappa = -\pi \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu \frac{1\cdot 3 \cdots 2\nu - 1}{2 \cdot 4 \cdots 2\nu} (z - a_\varkappa)^\nu \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4),$$

wo jetzt die ε_ν durch die Gleichung

$$\frac{x}{\sqrt{\psi(x)}} = (x - a_\varkappa)^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1(x - a_\varkappa) + \varepsilon_2(x - a_\varkappa)^2 + \cdots)$$

definirt sind; es ist also

$$\text{(21)} \qquad \lim_{z = a_\varkappa} \mathfrak{v}_\varkappa = -\pi a_\varkappa \psi'(a_\varkappa)^{-\frac{1}{2}}.$$

Bedeuten $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{B}_2'$ die Periodicitätsmoduln des Integrals erster Gattung

$$\int_e^z \frac{x\,dx}{\sqrt{\psi(x)}(z - x)}$$

an den Querschnitten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, so ist gemäss den Gleichungen (4) und (14)

$$\text{(22)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_1' = 2(\mathfrak{v}_4 - \mathfrak{v}_3 + \mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1), \\ \mathfrak{A}_2' = 2(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1), \\ \mathfrak{B}_1' = 2\mathfrak{v}_4, \\ \mathfrak{B}_2' = 2(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_3); \end{cases}$$

um die Entwickelungen dieser Integrale in der Umgebung von $z = \infty$ aufzustellen, greifen wir wieder auf die Gleichung (4) zurück.

Sei in der Umgebung von $z = \infty$ entwickelt

$$\mathfrak{A}_1' = z^{-r_1}\mathfrak{Q}_1\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\mathfrak{A}_2' = z^{-r_3}\mathfrak{Q}_3\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\mathfrak{B}_2' = z^{-r_4}\mathfrak{Q}_4\left(\frac{1}{z}\right),$$

dann ist, da die

$$\mathfrak{A}_1', \ \mathfrak{B}_1', \ \mathfrak{A}_2', \ \mathfrak{B}_2'$$

beim Umlaufe von z um den unendlich fernen Punkt auch die Substitution (16) erfahren,

$$\mathfrak{B}_1' = z^{-r}\mathfrak{Q}_2\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{\pi i}\mathfrak{A}_1' \log\frac{1}{z},$$

wo r die kleinste der Zahlen r_1, r_3, r_4, die $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$, $\mathfrak{Q}_4$ gewöhnliche Potenzreihen von z^{-1} bedeuten. Setzen wir für einen Augenblick

$$\frac{3}{2} = \varrho_1, \quad \frac{1}{2} = \varrho_3, \quad \frac{1}{2} = \varrho_4,$$

und sei ferner

$$\mathfrak{P}_\varkappa\left(\frac{1}{z}\right) = \delta_{\varkappa 0} + \delta_{\varkappa 1}\frac{1}{z} + \cdots,$$

so haben wir nach (4) die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
z^{-r_\varkappa}\mathfrak{Q}_\varkappa\left(\frac{1}{z}\right) = z\left(-7+\left[\frac{1}{z}\right]\right)\left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_\varkappa}\left(\delta_{\varkappa 0}+\left[\frac{1}{z}\right]\right)\\
+z^2\left(-36+\left[\frac{1}{z}\right]\right)\left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_\varkappa+1}\left(-\varrho_\varkappa\delta_{\varkappa 0}+\left[\frac{1}{z}\right]\right)\\
+z^3\left(-\frac{64}{3}+\left[\frac{1}{z}\right]\right)\left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_\varkappa+2}\left((\varrho_\varkappa+1)\varrho_\varkappa\delta_{\varkappa 0}+\left[\frac{1}{z}\right]\right)\\
+z^4\left(-\frac{8}{3}+\left[\frac{1}{z}\right]\right)\left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_\varkappa+3}\left(-(\varrho_\varkappa+2)(\varrho_\varkappa+1)\varrho_\varkappa\delta_{\varkappa 0}+\left[\frac{1}{z}\right]\right),\\
(\varkappa=1,3,4),
\end{aligned}
$$

wo $\left[\frac{1}{z}\right]$ Glieder andeutet, die jedenfalls mit z^{-1} verschwinden. Die Entwickelung auf der rechten Seite hat also die Form

$$
(23)\quad \left(\frac{1}{z}\right)^{\varrho_\varkappa-1}\left\{\left(-7+36\varrho_\varkappa-\frac{64}{3}\varrho_\varkappa(\varrho_\varkappa+1)+\frac{8}{3}\varrho_\varkappa(\varrho_\varkappa+1)(\varrho_\varkappa+2)\right)\delta_{\varkappa 0}+\left[\frac{1}{z}\right]\right\}.
$$

Für $\varkappa=1$ ist also $r_\varkappa$ jedenfalls positiv, es ist aber auch für $\varkappa=3,4$ positiv, da für $\varrho_\varkappa=\frac{1}{2}$ der Factor von $\delta_{\varkappa 0}$ verschwindet. Wir können demnach

$$
r=r_1=r_3=r_4=\frac{1}{2}
$$

nehmen, so dass wir die Entwickelungen

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A}_1' &= z^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{Q}_1\left(\frac{1}{z}\right),\\
\mathfrak{B}_1' &= z^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{Q}_2\left(\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{\pi i}\mathfrak{A}_1'\log\left(\frac{1}{z}\right),\\
\mathfrak{A}_2' &= z^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{Q}_3\left(\frac{1}{z}\right),\\
\mathfrak{B}_2' &= z^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{Q}_4\left(\frac{1}{z}\right)
\end{aligned}
$$

erhalten, wo $\mathfrak{Q}_1\left(\frac{1}{z}\right)$ für $z=\infty$ jedenfalls von Null verschieden ist.

Sechstes Kapitel.

255. Die Weierstrass'schen Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung vom Range Zwei.

Wir kehren nunmehr zur Untersuchung des am Schlusse der Nr. 252 (S. 495) aufgestellten Integrals $\mathfrak{w}$ der Differentialgleichung (8) zurück, von welchem vorläufig nur feststeht, dass es eine rationale Function von z ist.

Denken wir uns in den Ausdruck von $\bar{\mathfrak{w}}$ für die v_1, v_2, v_3, v_4 und $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3, \mathfrak{v}_4$ ihre Entwickelungen in der Umgebung der Stellen

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4, \; \infty$$

eingesetzt, so müssen sich (wie man auch direct verificiren kann) die mit einem Logarithmus behafteten Glieder wegheben, weil $\bar{\mathfrak{w}}$ allenthalben eindeutig ist. Wir erhalten also in der Umgebung von $z = a_\varkappa$

$$\bar{\mathfrak{w}} = \overset{\varkappa}{\mathfrak{P}}(z \mid a_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4),$$

wo $\overset{\varkappa}{\mathfrak{P}}$ eine gewöhnliche Potenzreihe andeutet, und in der Umgebung des unendlich fernen Punktes

$$\bar{\mathfrak{w}} = \frac{1}{z}\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right),$$

wo auch $\mathfrak{P}$ eine gewöhnliche Potenzreihe vorstellt. Die Function $\bar{\mathfrak{w}}$ ist offenbar in der Umgebung jeder von den Stellen

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4, \; \infty$$

verschiedenen Stelle regulär, sie ist also allenthalben regulär und folglich, nach einem bekannten Satze der Functionentheorie, constant. Da sie überdies für $z = \infty$ verschwindet, so ist also, wie wir behauptet hatten, $\mathfrak{w}$ identisch gleich Null.

Wir haben also die Gleichung

$$\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2 + \mathfrak{w}_3 + \mathfrak{w}_4 - \mathfrak{w}_5 + \mathfrak{w}_6 = 0, \tag{24}$$

und die Differentialgleichung (8), der die Ausdrücke (7) (S. 494) Genüge leisten, ist von der fünften Ordnung.

Ehe wir weiter auf allgemeine Ueberlegungen eingehen, wollen wir in die Ausdrücke der $\mathfrak{w}_\varkappa$ an Stelle der v_i und $\mathfrak{v}_i$ die Periodicitätsmoduln $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$ einführen. Es ergiebt sich aus den Gleichungen (14) beziehungsweise (22)

$$(25)\quad \begin{cases} 2v_1 = \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}_1, & 2\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{B}_2' + \mathfrak{B}_1' - \mathfrak{A}_1', \\ 2v_2 = \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1, & 2\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{B}_2' + \mathfrak{B}_1' + \mathfrak{A}_2' - \mathfrak{A}_1', \\ 2v_3 = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1, & 2\mathfrak{v}_3 = \mathfrak{B}_1' + \mathfrak{A}_2' - \mathfrak{A}_1', \\ 2v_4 = \mathfrak{B}_1, & 2\mathfrak{v}_4 = \mathfrak{B}_1'; \end{cases}$$

bilden wir hiernach die Ausdrücke (7) (Nr. 252, S. 494) und setzen die so gefundenen Werthe der $\mathfrak{w}_\varkappa$ in (24) ein, so erhalten wir

$$(26)\qquad \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1' - \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1' + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2' - \mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_2' = 0,$$

und dies ist nichts Anderes als die von Herrn **Weierstrass** entdeckte Relation zwischen den Periodicitätsmoduln der zu einem hyperelliptischen Gebilde gehörigen Integrale erster Gattung in dem Falle $p = 2$.

Setzen wir noch

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2' - \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1' = a,\quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1' - \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1' = b,$$
$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2' - \mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_2 = c,\quad \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1' - \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2' = d,$$
$$\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2' - \mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_2' = e,\quad \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2' - \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1' = f,$$

so verwandelt sich die Relation (26) in

$$(26\text{a})\qquad e + b = 0;$$

überdies besteht noch zwischen den Integralen a, b, c, d, e, f der Differentialgleichung (8) (S. 494) die der Beziehung (6) entsprechende identische Gleichung

$$af - be + cd = 0.$$

Die Quotienten

$$\frac{a}{b} = \frac{b_{12}}{\pi i},\quad \frac{c}{a} = \frac{b_{22}}{\pi i},\quad \frac{d}{a} = -\frac{b_{11}}{\pi i},\quad \frac{e}{a} = -\frac{b_{21}}{\pi i}$$

liefern dann unmittelbar die Coefficienten

$$b_{11},\ b_{12} = b_{21},\ b_{22}$$

der quadratischen Form

$$(27)\qquad b_{11}m^2 + 2b_{12}mn + b_{22}n^2,$$

die in den Exponenten der **Weierstrass**'schen Thetafunction (vergl. Nr. 206, S. 295) auftritt.

Herr **Weierstrass** hat ausser der Relation (26) noch ähnliche Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der canonischen Integrale

erster und zweiter Gattung aufgestellt; wir wollen zeigen, wie auch diese aus demselben Principe hergeleitet werden können, welches uns die Relation (26) geliefert hat.

Nach dem Theoreme der Nr. 247 (S. 475) befriedigen die Periodicitätsmoduln irgend eines canonischen Integrals erster oder zweiter Gattung, welches dem hyperelliptischen Gebilde (13) entstammt, eine Differentialgleichung, die mit (E) zur selben Classe gehört. Sei allgemein

$$(\bar{E}) \qquad \varphi_0(z)\frac{d^4 w}{dz^4} + \varphi_1(z)\frac{d^3 w}{dz^3} + \varphi_2(z)\frac{d^2 w}{dz^2} + \varphi_3(z)\frac{dw}{dz} + \varphi_4(z)w = 0$$

irgend eine Differentialgleichung, die mit (E) zu derselben Art gehört, und bedeute

$$w = r_0 u + r_1\frac{du}{dz} + r_2\frac{d^2u}{dz^2} + r_3\frac{d^3u}{dz^3}$$

die Relation, welche die abhängigen Variabeln von (E) und ($\bar{E}$) mit einander verknüpft. Möge ferner w_1, w_2, w_3, w_4 das dem Fundamentalsysteme v_1, v_2, v_3, v_4 von (E) entsprechende Fundamentalsystem von ($\bar{E}$) darstellen, dann wissen wir, dass die sechs Determinanten

$$v_i w_\varkappa - v_\varkappa w_i \qquad (i, \varkappa = 1, 2, 3, 4;\ i < \varkappa)$$

eine Differentialgleichung sechster Ordnung

$$(28) \qquad \Phi_0(z)\frac{d^6 W}{dz^6} + \Phi_1(z)\frac{d^5 W}{dz^5} + \cdots + \Phi_6(z)W = 0$$

befriedigen, die mit der zweiten Associirten von (E) zur selben Art gehört. Sei ω die abhängige Variable dieser zweiten Associirten, dann ist also

$$(29) \qquad W = R_0\omega + R_1\frac{d\omega}{dz} + \cdots + R_5\frac{d^5\omega}{dz^5},$$

wo die $R_0, R_1, \cdots R_5$ rationale Functionen von z bedeuten. Bezeichnen wir nunmehr mit

$$W_1, W_2, \cdots W_6$$

die den Integralen $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_6$ der zweiten Associirten von (E) entsprechenden Lösungen von (28), so dass also die $W_\varkappa$ nichts anderes sind als die in bestimmter Reihenfolge genommenen Determinanten

$$v_i w_\varkappa - v_\varkappa w_i,$$

so ist das Integral

$$\overline{W} = W_1 - W_2 + W_3 + W_4 - W_5 + W_6$$

von (28) mit dem Integrale $\bar{\omega}$ (Gleich. (5), S. 494) der zweiten Associirten von (E) durch die Relation (29) verknüpft; es ist also $\overline{W}$

ebenso wie $\bar{\omega}$ eine rationale Function $f(z)$ von z. D. h. wir haben die Gleichung

$$(30) \qquad W_1 - W_2 + W_3 + W_4 - W_5 + W_6 = f(z).$$

Nehmen wir für ($\bar{\text{E}}$) die Differentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln irgend eines zum Gebilde (13) gehörigen canonischen Integrals erster oder zweiter Gattung genügen, so liefert uns die Gleichung (30) eine bilineare Relation zwischen diesen Periodicitätsmoduln und den entsprechenden Periodicitätsmoduln des Integrals erster Gattung (1). Analoge Relationen bestehen offenbar auch zwischen den sechs Determinanten zweiter Ordnung, die wir aus den Fundamentalsystemen

$$(31) \qquad \begin{cases} w_1, \; w_2, \; w_3, \; w_4, \\ \bar{w}_1, \; \bar{w}_2, \; \bar{w}_3, \; \bar{w}_4 \end{cases}$$

irgend zweier mit (E) zur selben Art gehöriger Differentialgleichungen bilden können; auf diese Weise ergeben sich also die sämmtlichen Weierstrass'schen Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln der canonischen Integrale erster und zweiter Gattung.

Die Relation (30) wird insbesondere homogen, wenn identisch

$$(32) \qquad f(z) = R_0 \bar{\omega} + R_1 \frac{d\bar{\omega}}{dz} + \cdots + R_5 \frac{d^5 \bar{\omega}}{dz^5} = 0$$

ist; die Differentialgleichung (28) ist in diesem Falle von der fünften Ordnung. Da die zweite Associirte der durch die Differentialgleichung (E) bestimmten Art reductibel ist, so muss es nothwendig innerhalb derselben Differentialgleichungen von niedrigerer als der sechsten Ordnung geben. Wir haben gesehen, dass die Differentialgleichung (8) eine solche von niedrigerer Ordnung ist, so dass also in dem vorliegenden Falle der algebraische Typus, den die Differentialgleichungen, die durch die Determinanten zweiter Ordnung des Systems (31) befriedigt werden, innerhalb der zweiten associirten Art bilden (vergl. Nr. 174, S. 156), auch Differentialgleichungen von niedrigerer Ordnung enthält.

Die Coefficienten

$$R_0, \; R_1, \; \cdots \; R_5$$

der Gleichung (32) hängen nur von den Coefficienten

$$r_0, \; r_1, \; r_2, \; r_3$$

der zwischen w und u bestehenden Beziehung ab; wenn man also die rationale Function $\bar{\omega}$ als bekannt ansieht, so stellt die Gleichung (32) eine Bedingungsgleichung dar, der die r_0, r_1, r_2, r_3 genügen müssen, damit die Relation (30) homogen, d. h. die Differentialgleichung (28) von niedrigerer als der sechsten Ordnung werde. In dieser Form h[illegible]

Herr Fuchs jene Bedingungsgleichung aufgestellt. Anders gefasst kann man sagen: die Gleichung (30) wird dann und nur dann homogen werden, wenn die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichung (E) so beschaffen sind, dass die Exponenten, zu denen das Integral $\overline{W}$ von (28) gehört, für keinen der singulären Punkte

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \infty$$

negativ und wenigstens für einen derselben wesentlich positiv sind. In der That muss dann, wie wir es für die Differentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln des Integrals erster Gattung

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{\psi(x)}\,(z-x)}$$

genügen, auseinandergesetzt haben, $f(z)$ verschwinden. Sind die Exponenten von $\overline{W}$ sämmtlich gleich Null, so ist $f(z)$ constant, kann aber von Null verschieden sein.

256. Herleitung der Weierstrass'schen Relationen aus dem Satze von der Vertauschung von Parameter und Argument.

Die in den vorhergehenden Nummern für die Fälle eines hyperelliptischen Gebildes vom Range $p = 1$ (elliptisches) und vom Range $p = 2$ nach der Methode von Herrn Fuchs entwickelten Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale erster und zweiter Gattung wurden, wie wir bereits (Nr. 232, S. 414) bemerkt haben, von Herrn Weierstrass im allgemeinen Falle eines beliebigen p aus dem Abel'schen Satze von der Vertauschung des Parameters mit dem Argumente hergeleitet. Wir wollen die Weierstrass'sche Methode hier darlegen, um dann an dieselbe eine Uebersicht über die Ergebnisse anzuknüpfen, die Herr Fuchs aus der Verallgemeinerung des Vertauschungssatzes auf Integrale beliebiger linearer Differentialgleichungen für die Theorie der letzteren gewonnen hat.

Wir halten die in der Nr. 232 (S. 412 ff.) eingeführte Bezeichnungsweise fest, setzen also

$$P_1(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m),$$

nehmen aber jetzt m ungerade, so dass $x = \infty$ eine Verzweigungsstelle des hyperelliptischen Gebildes

$$s^2 = P_1(x) \tag{1}$$

ist. Die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_m$ (die Herr Weierstrass als reale Grössen annimmt) denken wir uns, nach Herrn Fuchs unter einander

und mit $x = \infty$ durch eine continuirliche sich selbst nicht durchschneidende Curve l verbunden, die als Querschnitt gelten soll. Mögen nunmehr a, b irgend zwei Nullstellen der Function $P_1(x)$, α, β irgend zwei Punkte der Curve l bedeuten, die so beschaffen sind, dass die Strecken von a bis α und von b bis β keinen Punkt mit einander gemein haben.

Integriren wir dann die den Vertauschungssatz darstellende Gleichung (10) der Nr. 232 (S. 413) in Bezug auf x von a bis α, in Bezug auf z von b bis β beide Mal längs der Curve l, so erhalten wir

$$(2) \qquad \int_a^\alpha \int_b^\beta \frac{U\,dx\,dz}{\sqrt{P_1(x)}\sqrt{P_1(z)}} = \sqrt{P_1(\alpha)} \int_b^\beta \frac{dz}{(z-\alpha)\sqrt{P_1(z)}} - \sqrt{P_1(\beta)} \int_a^\alpha \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{P_1(x)}}.$$

Nehmen wir nun

$$a = a_\mu, \quad b = a_\nu, \quad \mu \neq \nu,$$

so können wir, wenn z. B.

$$(3) \qquad \mu + 1 < \nu < m$$

ist, die oberen Grenzen α, β so wählen, dass

$$\alpha = a_{\mu+1}, \quad \beta = a_{\nu+1}$$

sei. Dann ist nach Gleichung (2)

$$(4) \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} \frac{U\,dx\,dz}{\sqrt{P_1(x)}\sqrt{P_1(z)}} = 0.$$

Wenn dagegen $\nu = \mu + 1$ genommen wird, so ist der Werth d[illegible] Integrals

$$(5) \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} \frac{U\,dx\,dz}{\sqrt{P_1(x)}\sqrt{P_1(z)}}$$

nicht Null; wir wollen uns die Aufgabe stellen, diesen Werth zu b[illegible]rechnen.

Setzen wir

$$a_\mu = a, \quad a_{\mu+1} = c, \quad a_{\mu+2} = b,$$

so verwandelt sich das Integral (5) in

$$S = -\int_a^c \int_b^c \frac{U\,dx\,dz}{\sqrt{P_1(x)}\sqrt{P_1(z)}}.$$

Seien nun s, t zwei veränderliche Grössen von der Beschaffenheit, dass die Punkte $c-s$ und $c+t$ stets auf der Curve l verbleiben, und zwar $c-s$ auf dem zwischen a und c, dagegen $c+t$ auf dem zwischen c und b gelegenen Theile dieser Curve. Dann ist, wenn wir

$$S' = -\int_a^{c-s}\int_b^{c+t} \frac{U\,dx\,dz}{\sqrt{P_1(x)}\sqrt{P_1(z)}}$$

setzen, offenbar

$$(6) \qquad S = \lim_{\substack{t=0\\ s=0}} S'.$$

Nehmen wir in der Gleichung (2)

$$\alpha = c - s, \quad \beta = c + t,$$

so ergiebt sich

$$S' = \int_a^{c-s} \frac{\sqrt{P_1(c+t)}\,dx}{(x-c-t)\sqrt{P_1(x)}} - \int_b^{c+t} \frac{\sqrt{P_1(c-s)}\,dz}{(z-c+s)\sqrt{P_1(z)}}.$$

Wir machen nun in den beiden Integralen auf der rechten Seite beziehungsweise die Substitutionen

$$x = c - x', \quad z = c + z'$$

und schreiben dann wieder x beziehungsweise z an Stelle von x' und z'; wir finden auf diese Weise

$$S' = \int_{c-a}^{s} \frac{\sqrt{P_1(c+t)}\,dx}{(x+t)\sqrt{P_1(c-x)}} - \int_{b-c}^{t} \frac{\sqrt{P_1(c-s)}\,dz}{(z+s)\sqrt{P_1(c+z)}}.$$

Seien σ, τ feste Werthe von s beziehungsweise t, die so gewählt sind, dass, wenn $c-s$ auf l zwischen c und $c-\sigma$, und $c+t$ ebenfalls auf l zwischen c und $c+\tau$ liegt, die Ausdrücke

$$\sqrt{P_1(c-s)}, \quad \sqrt{P_1(c+t)}$$

durch die in der Umgebung von $s=0$ beziehungsweise $t=0$ gültigen Entwickelungen darstellbar sind, dann ist

$$S' = \sqrt{P_1(c+t)}\int_{c-a}^{\sigma} \frac{dx}{(x+t)\sqrt{P_1(c-x)}} - \sqrt{P_1(c-s)}\int_{b-c}^{\tau} \frac{dz}{(z+s)\sqrt{P_1(z+c)}}$$

$$+ \int_{\sigma}^{s} \frac{\sqrt{P_1(c+t)}\,dx}{(x+t)\sqrt{P_1(c-x)}} - \int_{\tau}^{t} \frac{\sqrt{P_1(c-s)}\,dz}{(z+s)\sqrt{P_1(c+z)}},$$

und da die beiden ersten Glieder des Aggregates auf der rechten dieser Gleichung für $t = 0$, $s = 0$ verschwinden, so haben wir

$$(7) \qquad \lim_{\substack{t=0\\s=0}} S' = \lim_{\substack{t=0\\s=0}} \left\{ \int_\sigma^s \frac{\sqrt{P_1(c+t)}\,dx}{(x+t)\sqrt{P_1(c-x)}} - \int_\tau^t \frac{\sqrt{P_1(c-s)}\,dz}{(z+s)\sqrt{P_1(c+z}} \right.$$

Nun ist aber offenbar in der Umgebung von $z = 0$ beziel weise $x = 0$

$$(8) \qquad \begin{cases} \sqrt{P_1(c+z)} = i\sqrt{-P_1'(c)}\sqrt{z}\,(1+\mathfrak{P}_1(z)), \\ \sqrt{P_1(c-x)} = \sqrt{-P_1'(c)}\sqrt{x}\,(1+\mathfrak{P}_1(-x)), \end{cases}$$

wo $\mathfrak{P}_1(z)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von z fortschre Reihe bedeutet, die für $z = 0$ verschwindet. Wir finden also, wir, was zufolge der über σ, τ getroffenen Bestimmungen zulässi in die Integrale auf der rechten Seite der Gleichung (7) die Ent lungen (8) einsetzen,

$$\int_\sigma^s \frac{\sqrt{P_1(c+t)}\,dx}{(x+t)\sqrt{P_1(c-x)}} = i\int_\sigma^s \frac{\sqrt{t}}{(x+t)\sqrt{x}} \left\{\frac{1+\mathfrak{P}_1(t)}{1+\mathfrak{P}_1(-x)}\right\}^{\frac{1}{2}} dx,$$

also, wenn wir weiter entwickeln und t gegen Null convergiren l

$$\lim_{t=0} \int_\sigma^s \frac{\sqrt{P_1(c+t)}\,dx}{(x+t)\sqrt{P_1(c-x)}} = i\lim_{t=0} \int_\sigma^s \frac{\sqrt{t}\,dx}{(x+t)\sqrt{x}},$$

und analog

$$\lim_{s=0} \int_\tau^t \frac{\sqrt{P_1(c-t)}\,dz}{(z+s)\sqrt{P_1(c+z)}} = -i\lim_{s=0} \int_\tau^t \frac{\sqrt{s}\,dz}{(s+z)\sqrt{z}}.$$

Die Gleichung (7) verwandelt sich demgemäss in

$$\lim_{\substack{s=0\\t=0}} S' = i\lim_{\substack{s=0\\t=0}} \left\{ \int_\sigma^s \frac{\sqrt{t}\,dx}{(x+t)\sqrt{x}} + \int_\tau^t \frac{\sqrt{s}\,dz}{(s+z)\sqrt{z}} \right\}.$$

Führen wir in dem ersten Integrale unter dem lim-Zeichen durc Gleichung

$$\sqrt{x} = \xi\sqrt{t},$$

in dem zweiten Integrale durch die Gleichung

$$\sqrt{z} = \frac{1}{\xi}\sqrt{s}$$

eine neue Integrationsvariable ein, und setzen

$$\sqrt{\frac{s}{\tau}} = p, \quad \sqrt{\frac{\sigma}{t}} = q,$$

so verwandelt sich die Summe beider Integrale in

$$2\int_q^p \frac{d\xi}{1+\xi^2};$$

also ergiebt sich, da mit abnehmendem s und t, p gegen Null und q gegen Unendlich convergirt,

$$\lim_{\substack{s=0\\t=0}} S' = 2i\int_\infty^0 \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{\pi}{i}.$$

Wir finden also nach Gleichung (6)

$$S = \frac{\pi}{i}$$

und erhalten somit die der Gleichung (4) an die Seite zu stellende Formel

$$\text{(9)} \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} \frac{U\,dx\,dz}{\sqrt{P_1(x)}\sqrt{P_1(z)}} = \frac{\pi}{i}.$$

Beachtet man, dass U eine ganze rationale Function von x und z ist, so erkennt man, dass die linken Seiten der Gleichungen (4) und (9) als homogene bilineare Ausdrücke von Periodicitätsmoduln der zu dem Gebilde (1) gehörigen canonischen Integrale erster und zweiter Gattung darstellbar sind; sie liefern für

$$\mu, \nu = 1, 2, \cdots m$$

die sämmtlichen Relationen zwischen diesen Periodicitätsmoduln.

257. Untersuchungen von Fuchs, die an den allgemeinen Abel'schen Vertauschungssatz anknüpfen. Die erste Fuchs'sche Gleichung.

Herr Fuchs hat nun an den allgemeinen Abel'schen Vertauschungssatz, wie er durch die Gleichung (Γ) der Nr. 232 (S. 412) für die beliebige Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad D_x(y) = P_0\frac{d^n y}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n y = 0$$

dargestellt wird, ähnliche Folgerungen geknüpft, wie die, welche wir im Vorhergehenden für den besonderen Fall $n=1$ und (vergl. Nr. 232, S. 413)

$$P_0(x) = \frac{1}{2}P_1'(x)$$

aus der Gleichung (10) der Nr. 232 gezogen hatten, und ist zu ausserordentlich tief liegenden Ergebnissen gelangt, deren keit besonders für die Behandlung von Umkehrproblemen bei Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung Hand liegt, und die darum der weiteren Forschung ein w aussichtsvolles Gebiet darzubieten scheinen.

Indem wir in der Gleichung (Γ) die beiden Variabeln mit einander vertauschen, nimmt der Vertauschungssatz von folgende Gestalt an:

$$(\Gamma) \qquad \frac{d}{dx} D_x\left(y(x), \frac{\eta(z)}{x-z}\right) - \frac{d}{dz} D_z\left(\frac{y(x)}{z-x}, \eta(z)\right) = U y(x) \eta(z$$

wo $y(x)$ ein Integral von (A), $\eta(x)$ ein Integral der zu (A) ad Differentialgleichung

$$(\mathrm{A}') \qquad D_x'(\eta) = 0$$

bedeutet, und wo ferner

$$D_x(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=0}^{i-1} (-1)^h \frac{d^h (P_i(x) g)}{dx^h} \frac{d^{i-h-1} f}{dx^{i-h-1}}$$

den begleitenden bilinearen Differentialausdruck von (A), U den

$$(10) \qquad U = -\sum_{\varkappa=0}^{n} (-1)^\varkappa \frac{d^\varkappa}{dx^\varkappa} \left[\frac{P_\varkappa(x) - P_\varkappa(z)}{x-z}\right] = \sum_i \sum_\varkappa c_{i\varkappa} z^i$$

darstellt.

Es möge die Differentialgleichung (A) der Fuchs'sch angehören, ferner sei

$$P_0(x) = [\psi(x)]^n,$$

wo $\psi(x)$ ein Product von lauter von einander verschiedenen Factoren

$$\psi(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_m)(x - b_1) \cdots (x - b_\varrho)$$

bedeutet; und zwar mögen die Punkte

$$a_1, \ a_2, \ \cdots \ a_m, \ a_{m+1} = \infty$$

diejenigen Verzweigungspunkte des allgemeinen Integrals vo denen sich auch die Integralquotienten verzweigen, die

$$b_1, \ b_2, \ \cdots \ b_\varrho$$

dagegen die scheinbar singulären Stellen sein.

Wir bezeichnen mit

$$r_{\varkappa 1}, \ r_{\varkappa 2}, \ \cdots \ r_{\varkappa n}$$

die Wurzeln der zu $x = a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fun gleichungen von (A), für $\varkappa = 1, 2, \cdots m$, mit

$$y_{\varkappa 1},\ y_{\varkappa 2},\ \cdots\ y_{\varkappa n}$$

die Elemente des canonischen Fundamentalsystems von (A), mit

$$\eta_{\varkappa 1},\ \eta_{\varkappa 2},\ \cdots\ \eta_{\varkappa n}$$

die des entsprechenden (adjungirten) Fundamentalsystems von (A') und setzen voraus, dass die Wurzeln $r_{\varkappa 1}, r_{\varkappa 2}, \cdots r_{\varkappa n}$ sich von einander nicht um ganze Zahlen unterscheiden, und dass die realen Theile derselben zwischen Null und der negativen Einheit gelegen sind.

Nach den Ergebnissen der Nr. 223 (S. 372) involvirt die letztere Annahme insofern keine Beschränkung der Allgemeinheit, als wir von einer gegebenen Differentialgleichung stets zu einer Differentialgleichung derselben Classe übergehen können, für welche diese Annahme erfüllt ist, und als die Resultate, die wir im Auge haben, sich auf die Fundamentalsubstitutionen der vorgelegten Differentialgleichung beziehen, also nicht nur für die specielle Gleichung (A), sondern für jede mit (A) zur selben Art gehörige Gleichung Gültigkeit haben.

Die Entwickelungen der $y_{\varkappa\lambda}$ in der Umgebung von $x = a_\varkappa$ haben dann die Gestalt

$$(11) \qquad y_{\varkappa\lambda} = (x - a_\varkappa)^{r_{\varkappa\lambda}} \mathfrak{P}_{\varkappa\lambda}(x \mid a_\varkappa) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n),$$

die der adjungirten Integrale lauten (vergl. Nr. 109, Bd. I, S. 391)

$$(12) \qquad \eta_{\varkappa\lambda} = (x - a_\varkappa)^{-r_{\varkappa\lambda}-1} \overline{\mathfrak{P}}_{\varkappa\lambda}(x \mid a_\varkappa) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n),$$

wo die $\mathfrak{P}_{\varkappa\lambda}$, $\overline{\mathfrak{P}}_{\varkappa\lambda}$ gewöhnliche Potenzreihen von $x - a_\varkappa$ bedeuten, die für $x = a_\varkappa$ nicht verschwinden, und wir sehen, dass die für die $r_{\varkappa 1}, r_{\varkappa 2}, \cdots r_{\varkappa n}$ gemachten Voraussetzungen auch für die Wurzeln

$$-r_{\varkappa 1} - 1,\quad -r_{\varkappa 2} - 1,\ \cdots\ -r_{\varkappa n} - 1$$

der determinirenden Fundamentalgleichung der adjungirten Differentialgleichung erfüllt sind, d. h. auch diese unterscheiden sich nicht um ganze Zahlen und haben reale Theile, die zwischen Null und der negativen Einheit liegen.

Endlich seien

$$y_1,\ y_2,\ \cdots\ y_n$$

beziehungsweise

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots\ \eta_n$$

die zu $x = \infty$ gehörigen canonischen Fundamentalsysteme der Differentialgleichungen (A) beziehungsweise (A'), und die Wurzeln der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen mögen ebenfalls nicht um ganze Zahlen von einander verschieden sein.

Betrachten wir den Ausdruck

$$D_x\left(y(x), \frac{1}{x-z}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=0}^{i-1} (-1)^h \frac{d^h\left(P_i(x)\frac{1}{x-z}\right)}{dx^h} \frac{d^{i-h-1}y(x)}{dx^{i-h-1}}$$

in der Umgebung von $x = a_\varkappa$, so ist zunächst

$$y(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda y_{\varkappa\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda (x - a_\varkappa)^{r_{\varkappa\lambda}} \mathfrak{P}_{\varkappa\lambda}(x \mid a_\varkappa),$$

also nach $(i - h - 1)$-maliger Differentiation

$$y^{(i-h-1)}(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda (x - a_\varkappa)^{r_{\varkappa\lambda}-i+h+1} \mathfrak{P}_{\varkappa\lambda}^{(i-h-1)}(x \mid a_\varkappa),$$

wo die $\overline{\mathfrak{P}}_{\varkappa\lambda}^{(i-h-1)}$ gewöhnliche Potenzreihen von $x - a_\varkappa$, die c_λ Consta bedeuten. Ferner hat man, da (A) zur Fuchs'schen Classe geh sollte (vergl. Nr. 62, Bd. I, S. 220),

$$P_i(x) = F_{(n-i)(m+\varrho-1)}(x)\,[\psi(x)]^i,$$

wo F eine ganze Function von dem durch den Index angegeb Grade bedeutet, und demgemäss

$$\frac{d^h}{dx^h}\left\{P_i(x) \cdot \frac{1}{x-z}\right\} = \frac{(x-a_\varkappa)^{i-h}}{(x-z)^{h+1}} \mathfrak{P}(x \mid a_\varkappa).$$

Also ist in der Umgebung von $x = a_\varkappa$

$$D_x\left(y(x), \frac{1}{x-z}\right) = \frac{1}{(x-z)^h} \sum_{\lambda=1}^{n} (x - a_\varkappa)^{r_{\varkappa\lambda}+1} \mathfrak{P}_\lambda(x \mid a_\varkappa),$$

wo die $\mathfrak{P}_\lambda$ ebenso wie $\mathfrak{P}$ gewöhnliche Potenzreihen von $x - a_\varkappa$ stellen, und daraus folgt, dass dieser Ausdruck für $x = a_\varkappa$ verschwi da ja nach unserer Voraussetzung die realen Theile der Grössen

$$r_{\varkappa\lambda} + 1$$

wesentlich positiv sind. D. h. es ist

$$(13) \qquad \lim_{x=a_\varkappa} D_x\left(y(x), \frac{1}{x-z}\right) = D_{x=a_\varkappa}\left(y(x), \frac{1}{x-z}\right) = 0,$$

und analog ergiebt sich

$$(14) \qquad \lim_{z=a_\varkappa} D_z\left(\frac{1}{z-x}, \eta(z)\right) = D_{z=a_\varkappa}\left(\frac{1}{z-x}, \eta(z)\right) = 0.$$

Nun können wir sofort zu einer Gleichung gelangen, aus wel die Weierstrass'sche Gleichung (4) durch Specialisirung hervor

Sei, wie in der vorigen Nummer, l eine die singulären Punkte

$$a_1, \ a_2, \cdots a_m, \ \infty$$

verbindende Curve, so sind in der durch l zerschnittenen Ebene die Integrale von (A) und (A') eindeutig bestimmt. Bedeuten dann a, b irgend zwei der Punkte $a_1, a_2, \cdots a_m$, ferner α, β ein Werthepaar von x, z auf l von der Beschaffenheit, dass die Stücke $(a \cdots \alpha)$ und $(b \cdots \beta)$ keinen Punkt mit einander gemein haben, so folgt, wenn wir die Gleichung (Γ) in Bezug auf x von a bis α und in Bezug auf z von b bis β integriren und beachten, dass

$$(15) \quad \begin{cases} D_x\left(y(x), \int\limits_b^\beta \frac{\eta(z)\,dz}{x-z}\right) = \int\limits_b^\beta D_x\left(y(x), \frac{1}{x-z}\right)\eta(z)\,dz, \\ D_z\left(\int\limits_a^\alpha \frac{y(x)\,dx}{z-x}, \eta(z)\right) = \int\limits_a^\alpha D_z\left(\frac{1}{z-x}, \eta(z)\right) y(x)\,dx \end{cases}$$

ist, mit Rücksicht auf (13), (14) die der Gleichung (2) analoge Gleichung

$$(16) \quad \int\limits_a^\alpha \int\limits_b^\beta U y(x)\,\eta(z)\,dx\,dz$$
$$= D_\alpha\left(y(\alpha), \int\limits_b^\beta \frac{\eta(z)\,dz}{\alpha - z}\right) - D_\beta\left(\int\limits_a^\alpha \frac{y(x)\,dx}{\beta - x}, \eta(\beta)\right).$$

Die Integrale haben einen Sinn, da die unbestimmten Integrale auch in den Punkten a, b, wo die Integranden unendlich werden könnten, zufolge der über die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen getroffenen Bestimmungen endliche bestimmte Werthe annehmen.

Für die Wahl

$$a = a_\mu, \quad b = a_\nu$$

können nun, wenn die Ungleichung (3) erfüllt ist,

$$\alpha = a_{\mu+1}, \quad \beta = a_{\nu+1}$$

genommen werden. Beachtet man dann wieder die Gleichungen (15), so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (13), (14) die erste Fuchs'sche Gleichung

$$(17) \quad \int\limits_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int\limits_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} U y(x)\,\eta(z)\,dx\,dz = 0$$
$$(\mu, \nu = 1, 2, \cdots m; \ \mu + 1 < \nu < m).$$

Ungleich viel schwieriger ist die Herleitung der zweiten Fuchs'schen Gleichung, aus welcher die Weierstrass'sche Gleichung (9)

durch Specialisirung gewonnen werden kann; es handelt sich dabei u die Berechnung des Doppelintegrales

(18) $$S_\mu = \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} U y(x) \eta(z) dx dz.$$

258. Die zweite Fuchs'sche Gleichung.

Wir führen ähnlich wie in der Nr. 256 (S. 511) zwei auf (Curve l gelegene veränderliche Punkte ein, die zu beiden Seiten v $a_{\mu+1}$, aber in der Umgebung dieses Punktes liegen. Setzen wir wied

$$a_\mu = a, \quad a_{\mu+1} = c, \quad a_{\mu+2} = b,$$

so möge der veränderliche Punkt

$$c - s = \xi$$

auf l zwischen a und c, der Punkt

$$c + t = \zeta$$

auf l zwischen c und b liegen. Die den festen Werthen

$$s = \sigma, \quad t = \tau$$

entsprechenden Punkte

$$c - \sigma = a', \quad c + \tau = b'$$

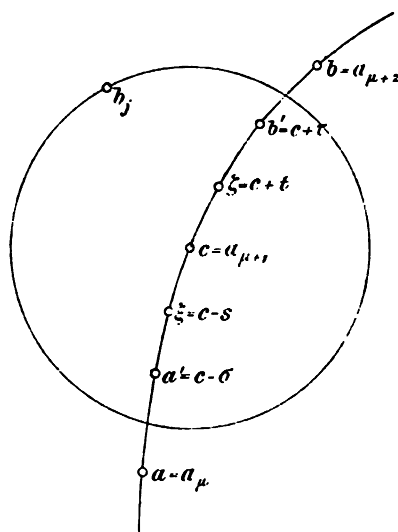


Fig. 18.

mögen so beschaffen sein, dass, we s in dem Intervalle von σ bis N und t in dem Intervalle von N bis τ verbleibt, die Punkte ξ, ζ l und innerhalb der Umgebung vo d. h. innerhalb des Kreises verbleib der den Convergenzbereich der E wickelungen der Integrale

$$y_{\mu+1,\lambda}, \quad \eta_{\mu+1,\lambda}$$

nach aufsteigenden Potenzen v $x - a_\varkappa$ bildet (vergl. Fig. 18).

Setzen wir dann

$$S_\mu' = \int_a^\xi \int_\zeta^b U y(x) \eta(z) dz dx,$$

so ist offenbar

(19) $$S_\mu = \lim_{\substack{s=0 \\ t=0}} S_\mu'.$$

Ferner hat man

$$S'_\mu = -\int_a^{\xi}\int_b^{\zeta} U y(x)\,\eta(z)\,dx\,dz,$$

also folgt, wenn wir beide Integrationsintervalle in den Punkten a' beziehungsweise b' theilen,

$$\begin{aligned} -S'_\mu = &\int_a^{a'}\int_b^{b'} U y(x)\,\eta(z)\,dx\,dz + \int_a^{a'}\int_{b'}^{\zeta} U y(x)\,\eta(z)\,dx\,dz \\ &+ \int_{a'}^{\xi}\int_b^{b'} U y(x)\,\eta(z)\,dx\,dz + \int_{a'}^{\xi}\int_{b'}^{\zeta} U y(x)\,\eta(z)\,dx\,dz. \end{aligned}$$

Wir formen nun jedes dieser vier Doppelintegrale mit Hülfe der Gleichung (Γ) um, indem wir allemal auf die Gleichungen (13), (14), (15) Rücksicht nehmen; wir erhalten auf diese Weise

$$\begin{aligned} \int_a^{a'}\int_b^{b'} U y(x)\,\eta(z)\,dx\,dz = &\, D_{x=a'}\left(y(x), \int_b^{b'}\frac{\eta(z)\,dz}{x-z}\right) \\ &- D_{z=b'}\left(\int_a^{a'}\frac{y(x)\,dx}{z-x}, \eta(z)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^{a'}\int_{b'}^{\zeta} U y(x)\,\eta(z)\,dx\,dz = &\, D_{x=a'}\left(y(x), \int_{b'}^{\zeta}\frac{\eta(z)\,dz}{x-z}\right) \\ &- D_{z=\zeta}\left(\int_a^{a'}\frac{y(x)\,dx}{z-x}, \eta(z)\right) + D_{z=b'}\left(\int_a^{a'}\frac{y(x)\,dx}{z-x}, \eta(z)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{a'}^{\xi}\int_b^{b'} U y(x)\,\eta(z)\,dx\,dz = &\, D_{x=\xi}\left(y(x), \int_b^{b'}\frac{\eta(z)\,dz}{x-z}\right) \\ &- D_{x=a'}\left(y(x), \int_b^{b'}\frac{\eta(z)\,dz}{x-z}\right) - D_{z=b'}\left(\int_{a'}^{\xi}\frac{y(x)\,dx}{z-x}, \eta(z)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{a'}^{\xi}\int_{b'}^{\zeta} U y(x)\,\eta(z)\,dx\,dz = &\, D_{x=\xi}\left(y(x), \int_{b'}^{\zeta}\frac{\eta(z)\,dz}{x-z}\right) - D_{x=a'}\left(y(x), \int_{b'}^{\zeta}\frac{\eta(z)\,dz}{x-z}\right) \\ &- D_{z=\zeta}\left(\int_{a'}^{\xi}\frac{y(x)\,dx}{z-x}, \eta(z)\right) + D_{z=b'}\left(\int_{a'}^{\xi}\frac{y(x)\,dx}{z-x}, \eta(z)\right). \end{aligned}$$

Addiren wir diese vier Gleichungen und beachten, dass nach (13), (14), (15)

$$\lim_{\zeta=c} D_{z=\zeta}\left(\int_{a}^{a'}\frac{y(x)\,dx}{z-x},\ \eta(z)\right) = \int_{a}^{a'} D_{z=c}\left(\frac{1}{z-x},\ \eta(z)\right) y(x)\,dx = 0,$$

$$\lim_{\xi=c} D_{x=\xi}\left(y(x),\ \int_{b}^{b'}\frac{\eta(z)\,dz}{x-z}\right) = \int_{b}^{b'} D_{x=c}\left(y(x),\ \frac{1}{x-z}\right)\eta(z)\,dz = 0$$

ist, so erhalten wir nach Gleichung (19)

$$(20)\quad S_\mu = \lim_{\substack{\xi=c\\ \zeta=c}} S'_\mu = \lim_{\substack{\xi=c\\ \zeta=c}}\left\{D_{x=\xi}\left(y(x),\ \int_{\xi}^{b'}\frac{\eta(z)\,dz}{x-z}\right) + D_{z=\zeta}\left(\int_{a'}^{\xi}\frac{y(x)\,dx}{z-x},\ \eta(z)\right)\right.$$

Denken wir uns das Integral y von (A) z. B. durch das Fundamentalsystem

$$y_1,\ y_2,\ \cdots\ y_n,$$

das Integral η von (A') durch das adjungirte Fundamentalsystem

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots\ \eta_n$$

dargestellt, so lässt sich das Doppelintegral S_μ als ein Aggregat von Gliedern der Form

$$S_\mu^{(\alpha,\beta)} = \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}}\int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} U y_\alpha(x)\,\eta_\beta(z)\,dx\,dz$$

schreiben. Seien

$$(21)\quad \begin{cases} y_\alpha = \sum_{i=1}^{n} b_{\alpha i}\, y_{\mu+1,\,i} & (\alpha=1,2,\cdots n),\\ \eta_\beta = \sum_{i=1}^{n} c_{\beta i}\, \eta_{\mu+1,\,i} & (\beta=1,2,\cdots n) \end{cases}$$

die zwischen den Punkten $a_{\mu+1}$ und ∞ vermittelnden Uebergangssubstitutionen der Differentialgleichungen (A) beziehungsweise (A'), dann ist

$$S_\mu^{(\alpha,\beta)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{\alpha i}\, c_{\beta j}\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}}\int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} U y_{\mu+1,\,i}(x)\,\eta_{\mu+1,\,j}(z)\,dx\,dz,$$

also mit Rücksicht auf (20)

$$(22)\quad S_\mu^{(\alpha,\beta)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{\alpha i}\, c_{\beta j}\lim_{\substack{\xi=c\\ \zeta=c}}\left\{D_{x=\xi}\left(y_{\mu+1,\,i}(x),\ \int_{\xi}^{b'}\frac{\eta_{\mu+1,\,j}(z)\,dz}{x-z}\right)\right.$$

$$\left. + D_{z=\zeta}\left(\int_{a'}^{\xi}\frac{y_{\mu+1,\,i}(x)\,dx}{z-x},\ \eta_{\mu+1,\,j}(z)\right)\right\}$$

Die Berechnung des Doppelintegrales (18) ist somit auf die Berechnung des auf der rechten Seite unter dem Summenzeichen auftretenden Grenzwerthes zurückgeführt. Herr Fuchs findet, dass dieser Grenzwerth verschwindet, wenn i von j verschieden ist, und dass er für $i = j$ den Werth

$$(-1)^n \frac{\pi e^{-\pi r_{\mu+1,i}\sqrt{-1}}}{\sin \pi r_{\mu+1,i}}$$

annimmt. Wir versagen es uns, die überaus feine und eigenartige Rechnung, durch welche Herr Fuchs dieses einfache Resultat erzielt, hier wiederzugeben, verweisen vielmehr auf die Abhandlung von Herrn Fuchs im 76. Bande des Crelle'schen Journals, wo diese Rechnung in den Nummern 13—19 auf S. 195—206 durchgeführt ist. Auf Grund dieses Ergebnisses findet Herr Fuchs somit die Gleichung

$$(23) \qquad S_\mu^{(\alpha,\beta)} = \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} U y_\alpha(x)\, \eta_\beta(z)\, dx\, dz = \sum_{i=1}^{n} (-1)^n \pi b_{\alpha i} c_{\beta i} \frac{e^{-\pi r_{\mu+1,i}\sqrt{-1}}}{\sin \pi r_{\mu+1,i}},$$

die wir als zweite Fuchs'sche Gleichung bezeichnen und der ersten in der Form

$$(24) \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} U y_\alpha(x)\, \eta_\beta(z)\, dx\, dz = 0$$

geschriebenen Gleichung (17) an die Seite stellen.

259. Bedeutung der Fuchs'schen Gleichungen als Relationen zwischen den Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen und gewissen bestimmten Integralen.

In einer späteren Arbeit hat Herr Fuchs die rechte Seite seiner zweiten Gleichung noch etwas umgeformt und aus beiden Gleichungen noch einige weitere Consequenzen gezogen, die wir hier darlegen wollen.

Da nach dem Theoreme der Nr. 23 (Bd. I, S. 65, 66) die Substitutionen, welche zwei adjungirte Paare von Fundamentalsystemen in einander überführen, zu einander reciprok sind, so haben wir für die Coefficienten der Substitutionen (21) die Beziehungen

$$\sum_{i=1}^{n} b_{\alpha i} c_{\beta i} = \delta_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n),$$

wo $\delta_{\alpha\beta}$ in gewöhnlicher Weise Null oder Eins bedeutet, je nachd α von β verschieden ist oder nicht. Bezeichnen wir also mit $B_{\alpha i}$ zu dem Elemente $b_{\alpha i}$ gehörige Subdeterminante der Determinante

$$\Delta = |b_{\alpha i}| \qquad (\alpha, i = 1, 2, \cdots n)$$

und setzen

$$(25) \qquad b_{\alpha i} c_{\beta i} = \frac{b_{\alpha i} B_{\beta i}}{\Delta} = A_i^{(\alpha\beta)},$$

$$(26) \qquad e^{2\pi r_{\mu+1, i}\sqrt{-1}} = \lambda_i,$$

so nimmt die Gleichung (23) die Form an

$$(27) \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} U y_\alpha(x) \eta_\beta(z) dx dz = (-1)^n 2\pi\sqrt{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i^{(\alpha\beta)}}{\lambda_i - 1}.$$

Die Grössen λ_i sind die Wurzeln der zu $x = a_x$ gehörigen Fun mentalgleichung der Differentialgleichung (A), also lautet (vergl. Nr. Bd. I, S. 101) die Fundamentalsubstitution, die das Fundamentalsyst $[y_\alpha]$ von (A) bei einem Umlaufe um $a_{\mu+1}$ erleidet,

$$A_{\mu+1} = B\Omega B^{-1},$$

wenn wir setzen

$$B = (b_{\alpha i}), \quad \Omega = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
$$(\alpha, i = 1, 2, \cdots n)$$

Wenn die Substitution $A_{\mu+1}$ bekannt ist, so sind die $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ nach Auflösung einer Gleichung n^{ten} Grades ebenfalls bekannt, und Coefficienten der Substitution B ergeben sich (vergl. Nr. 33) du Auflösung eines Systems linearer Gleichungen. Also sind die rech Seiten der Gleichungen (27) für

$$\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n$$

wohlbestimmte algebraische Functionen der Coefficienten der Substitu $A_{\mu+1}$, d. h.:

Die Gleichungen (27) repräsentiren für

$$\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n$$

n^2 Gleichungen für die Coefficienten der Fundamentalsub tution $A_{\mu+1}$, die das Fundamentalsystem $[y_\alpha]$ von (A) einem Umlaufe um den singulären Punkt $a_{\mu+1}$ erleidet.

Die linken Seiten der Gleichungen (24) und (27) lassen s wenn man für U seinen Ausdruck (10) einsetzt, als Aggregate den Integralen

$$(28)\quad \begin{cases} J_{\alpha\lambda}^{(\mu)} = \int\limits_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} x^\lambda y_\alpha(x)\,dx, \\ K_{\beta\lambda}^{(\mu)} = \int\limits_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} x^\lambda \eta_\beta(x)\,dx \end{cases}$$

darstellen. Denken wir uns die Curve l als einen Querschnitt und bezeichnen das eine Ufer desselben als das positive, das gegenüberliegende als das negative, so haben wir die Integrale (28) längs eines bestimmten dieser Ufer, z. B. längs des positiven zu erstrecken. Wir fügen nun den Integralen (28), für $\mu = 1, 2, \cdots m-1$, noch die beiden Systeme von Integralen

$$J_{\alpha\lambda}^{(m)} = \int\limits_{a_m}^{a_1} x^\lambda y_\alpha(x)\,dx,$$

$$K_{\alpha\lambda}^{(m)} = \int\limits_{a_m}^{a_1} x^\lambda \eta_\beta(x)\,dx$$

hinzu, in welchen die Integration jetzt längs des negativen Ufers von l zu vollziehen ist. Dann ist die Gesammtheit der hintereinander durchlaufenen Integrationswege

$$(a_1 \cdots a_2),\ (a_2 \cdots a_3),\ \cdots\ (a_{m-1} \cdots a_m),\ (a_m \cdots a_1)$$

aequivalent einem geschlossenen Umlaufe um den Punkt $x = \infty$ und die Punkte $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$; wir haben also

$$(29)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\mu=1}^{m} J_{\alpha\lambda}^{(\mu)} = g_{\alpha\lambda}, \\ \sum\limits_{\mu=1}^{m} K_{\alpha\lambda}^{(\mu)} = h_{\alpha\lambda}, \end{cases}$$

wo die $g_{\alpha\lambda}$, $h_{\alpha\lambda}$ bestimmte Constanten bedeuten.

Nun ist zufolge der Lagrange'schen Beziehung (Nr. 24, Bd. I, S. 69, Gleichung (30)) für das Integral y_α von (A)

$$-\,y_\alpha D_x'(x^\lambda) = \frac{d}{dx} D_x(y_\alpha, x^\lambda),$$

also, gemäss den über die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen gemachten Voraussetzungen,

$$(30)\qquad \int\limits_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} y_\alpha(x) D_x'(x^\lambda)\,dx = 0,$$

und analog folgt

$$(31)\qquad \int\limits_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \eta_\beta(x) D_x(x^\lambda)\,dx = 0.$$

Die Ausdrücke

$$D_x(x^\lambda),\quad D_x'(x^\lambda)$$

sind ganze rationale Functionen von x vom Grade

$$n(m+\varrho-1)+\lambda;$$

setzen wir also in (30) und (31) successive

$$\lambda = 0, 1, 2, \cdots,$$

so erkennen wir, dass die Integrale $J_{\alpha\lambda}^{(\mu)}$ und $K_{\beta\lambda}^{(\mu)}$ sich durch

$$J_{\alpha 0}^{(\mu)},\ J_{\alpha 1}^{(\mu)},\ \cdots\ J_{\alpha,\, n(m+\varrho-1)-1}^{(\mu)}$$

beziehungsweise

$$K_{\beta 0}^{(\mu)},\ K_{\beta 1}^{(\mu)},\ \cdots\ K_{\beta,\, n(m+\varrho-1)-1}^{(\mu)}$$

homogen linear darstellen lassen mit Coefficienten, die von den in den Coefficienten der Differentialgleichung (A) auftretenden constanten Parametern rational abhängen.

Es sind also die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen $A_{\mu+1}$ mit den Grössen

$$(32)\qquad J_{\alpha\lambda}^{(\mu)},\ K_{\alpha\lambda}^{(\mu)} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n;\ \lambda = 0, 1, \cdots n(m+\varrho-1)-1)$$

und den in den Coefficienten der Differentialgleichung auftretenden Parametern durch die Gleichungen (27) algebraisch verknüpft, während zwischen den Grössen (32) und den Parametern der Differentialgleichung die Gleichungen (24) bestehen. Ueberdies befriedigen die Grössen (32) für $\mu = 1, 2, \cdots m$ noch die Gleichungen (29).

Man wird mit diesem Ergebnisse einerseits die Resultate der Nummern 207 (S. 302) und 225 (S. 381, 382), andererseits die in der Nr. 242 (S. 455) erwähnten Beziehungen zwischen den Coefficienten der Uebergangssubstitutionen in Verbindung zu setzen haben.



Nachträge und Berichtigungen

zum ersten Bande.

S. 3, Zeile 9 v. o. ist statt „elliptischen" besser zu setzen „doppeltperiodischen".

S. 15, Zeile 1 v. o. lies (2) statt (3).

S. 23, Zeile 15 v. o. lies (2) statt (6).

S. 23, Zeile 2 v. u. lies (6) statt (5).

S. 27 am Kopfe lies 10 statt 11.

S. 54, Gleich. (1) und S. 55, Gleich. (B) auf der rechten Seite, S. 69, Gleich. (31) auf der linken und in der zweiten Gleichung von (32) auf der rechten Seite, ist am Fusse des ersten Summenzeichens zu setzen $\varkappa = 1$ statt $\varkappa = 0$.

S. 63 ist hinter der ersten Gleichung von (19) zu setzen

$$\varkappa = 0, 1, \cdots (n-2) \quad \text{statt} \quad \varkappa = 0, 1, \cdots (n-1).$$

S. 95, Zeile 14 v. u. Die reciproke Substitution müsste genauer in der Form

$$(\bar{\alpha}'_{h\varkappa}) \qquad (h, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

geschrieben werden, wo

$$\bar{\alpha}'_{h\varkappa} = \alpha'_{\varkappa h}$$

ist. Ebenso müsste die Gleichung in Zeile 9 v. u. lauten

$$(\alpha'_{h\varkappa})^{-1} = (\bar{\alpha}_{h\varkappa}),$$

wo

$$\bar{\alpha}_{h\varkappa} = \alpha_{\varkappa h}$$

gesetzt wurde. Der einfacheren Schreibweise wegen wurde aber hier ebenso wie auch oft im Folgenden die aus einer Substitution

$$(\alpha_{h\varkappa}) \qquad (h, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

durch Transposition hervorgehende Substitution schlechtweg durch

$$(\alpha_{\varkappa h}) \qquad (h, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

bezeichnet.

S. 102, Zeile 9 v. u. lies „Nr. 30 (S. 93)" statt Nr. 31.

S. 103. Für den Zeile 6 v. o. erwähnten Determinantensatz vergl[illegible] die Nr. 167 (S. 127 ff. des vorliegenden Bandes).

S. 113, Zeile 20 v. o. ist zwischen „etwa" und „Functionen" ei[illegible] zuschalten „linear unabhängige".

S. 127, Zeile 8 v. o. ist zwischen „Rangzahlen" und „bilden" ei[illegible] zuschalten „von n subtrahirt"; Zeile 14 v. o. und 5 v. u. lies „Minuendu[illegible] statt „Subtrahendus".

S. 133 ff. Riemann bezeichnet eine Stelle, die nach unse[illegible] Terminologie ein ϱ-facher Windungspunkt genannt wird, als ein[illegible] $(\varrho - 1)$-fachen Windungspunkt.

S. 140, Zeile 12 v. u. lies „keine negativen" statt „nur positiv[illegible]

S. 142, Zeile 7 v. o. ist auf der rechten Seite der Gleichung d[illegible]en Gliede $x^{r+1} f_{\lambda 1}$ der Factor $\log^{\lambda} x$ hinzuzufügen.

Zu Nr. 53 (Bd. I, S. 184 ff.):

Das auf S. 185 (Bd. I) angegebene allgemeine Kriterium für [illegible] die Existenz einer zum Exponenten $r_\varkappa$ gehörigen Reihe $g(x, r_\varkappa)$, won[illegible]ch der Rang des Systems (37) mit dem Range des Systems

$$(0) = (a_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots (r_0 - r_\varkappa))$$

übereinstimmen muss, führt auch leicht auf ein von Herrn Heff[illegible]er aufgestelltes Verfahren zur Entscheidung der in Rede stehenden Fra[illegible]ge. Wir bezeichnen kurz die Elemente $a_{\alpha\alpha}$ des Systems (37) als [illegible] die Diagonalglieder. Multiplicirt man dann die Elemente der nicht v[illegible]erschwindende Diagonalglieder enthaltenden (Vertical-)Reihen des Syste[illegible]ms (37) mit geeigneten Constanten und addirt dieselben zu den Elemen[illegible]en der vorhergehenden Reihen hinzu, so kann man das System (37) [illegible] in ein anderes umformen, in welchem alle Elemente, die nicht Diago[illegible]al-glieder sind oder in einer der Zeilen

$$s_{\varkappa-1}, \; s_{\varkappa-2}, \; \cdots \; s_0$$

stehen, verschwinden. Multiplicirt man ferner die Elemente der nic[illegible] verschwindende Diagonalglieder enthaltenden Zeilen mit geeigneten Co[illegible] stanten und addirt sie zu den Elementen der folgenden Zeilen hin[illegible] so kann man zu einem Systeme

$$\text{(37a)} \qquad (\bar{a}_{\alpha\beta}) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \cdots s_0, \\ \beta = 0, 1, 2, \cdots s_0 \end{pmatrix}$$

gelangen, in welchem auch noch diejenigen Elemente der Zeile[illegible] $s_{\varkappa-1}, s_{\varkappa-2}, \cdots s_0$ verschwinden, die nicht in einer der Reihen

$$0, \; s_{\varkappa-1}, \; s_{\varkappa-2}, \; \cdots \; s_1$$

stehen. Von dem so erhaltenen Systeme (37a) ist zunächst eviden[illegible]

dass sein Rang mit dem Range von (37), und dass ebenso der Rang des Systems

$$(\bar{a}_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots s_0)$$

mit dem des Systems (0) übereinstimmt.

Bezeichnet man durch

(I) $$\Sigma_{i;\,\alpha,\beta,\cdots\gamma} \qquad (\alpha, \beta, \cdots \gamma = 0, 1, \cdots \varkappa)$$

die Determinante, welche aus Σ_i (Bd. I, S. 187) hervorgeht, indem man die Zeilen und (Vertical-)Reihen $s_\alpha, s_\beta, \cdots s_\gamma$ weglässt, und setzt

$$s_\varkappa = 0, \quad \Sigma_0 = (s_0), \quad \Sigma_\varkappa = 1,$$

so ist klar, dass die sämmtlichen Determinanten (I) ebenso wie die Σ^i selbst, gebildet aus den Elementen des Systems (37), denselben Werth haben, wie die entsprechenden Determinanten, gebildet aus den Elementen von (37a). Für das letztere System übersieht man aber unmittelbar, dass

(II) $$\Sigma_{i-1} = \pm\, \bar{a}_{s_{\varkappa-i},\, s_{\varkappa-i+1}} A_{i-1} \Sigma_i,$$

(III) $$\Sigma_{\lambda;\,\varkappa-\lambda-1,\cdots\varkappa-\mu+1} = \pm\, \bar{a}_{s_{\varkappa-\mu},\, s_{\varkappa-\lambda}} A_\lambda \cdots A_{\mu-1} \Sigma_\mu$$

ist. Bei Entscheidung der Frage, ob sich für $g_0(r_\varkappa)$ ein von Null verschiedener Werth ergiebt, kommen aber offenbar diejenigen Zeilen und Reihen, die abgesehen von dem Diagonalgliede aus lauter Nullen bestehen, nicht in Betracht. Wir können also das System (37) beziehungsweise (37a) durch das System

(37b) $$(\bar{a}_{\alpha\beta}) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = s_{\varkappa-1}, s_{\varkappa-2}, \cdots s_0, \\ \beta = 0, s_{\varkappa-1}, s_{\varkappa-2}, \cdots s_0 \end{pmatrix}$$

ersetzen. Nun muss jedenfalls die Determinante Σ_0 verschwinden; wenn (vergl. (α), Bd. I, S. 188)

$$\Sigma_{i-1} = 0, \quad \Sigma_i \neq 0$$

ist, so folgt aus (III)

$$\bar{a}_{s_{\varkappa-i},\, s_{\varkappa-i+1}} = 0, \quad \bar{a}_{s_\lambda,\, s_{\lambda+1}} \neq 0 \qquad (\lambda = \varkappa - i - 1, \varkappa - i - 2, \cdots 0)$$

und wir können offenbar das System (37b) noch weiter reduciren, indem wir die Zeilen, welche den Werthen

$$\alpha = s_{\varkappa-i-1}, s_{\varkappa-i-2}, \cdots s_0$$

entsprechen, weglassen, so dass also das System

(37c) $$(\bar{a}_{\alpha\beta}) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = s_{\varkappa-1}, \cdots s_{\varkappa-i}, \\ \beta = 0, s_{\varkappa-1}, \cdots s_{\varkappa-i} \end{pmatrix}$$

verbleibt, dessen Rang mit dem Range des Systems

(IV) $$(\bar{a}_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = s_{\varkappa-1}, \cdots s_{\varkappa-i})$$

übereinstimmen muss. Hierfür ist nothwendig

(V) $$\bar{a}_{s_{\varkappa-1},0} = 0,$$

und stets hinreichend

$$\bar{a}_{s_{\varkappa-\mu},0} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \cdots i).$$

Die letzteren Gleichungen besagen nichts Anderes, als dass die Determinanten (β) (Bd. I, S. 188) sämmtlich verschwinden. In der That folgt z. B. aus (III) und aus der Gleichung

$$\Sigma_{0;\ \varkappa-1, \varkappa-2, \cdots \varkappa-\mu+1} = \begin{pmatrix} s_0, s_{\varkappa-1}, s_{\varkappa-2}, \cdots s_{\varkappa-\mu+1} \\ s_{\varkappa-1}, s_{\varkappa-2}, \cdots s_{\varkappa-\mu+1} \end{pmatrix}$$
$$= h_{s_{\varkappa-\mu}}(r_\varkappa)_{s_{\varkappa-1}, s_{\varkappa-2}, \cdots s_{\varkappa-\mu+1}} \Sigma_\mu$$

(vergl. Bd. I, S. 188, wo diese Gleichung für $\mu = i$ angegeben ist*)) unmittelbar

$$h_{s_{\varkappa-\mu}}(r_\varkappa)_{s_{\varkappa-1}, s_{\varkappa-2}, \cdots s_{\varkappa-\mu+1}} = \pm\, \bar{a}_{s_{\varkappa-\mu},0} A_0 A_1 \cdots A_{\mu-1}.$$

Damit ist zunächst die auf S. 189 (Bd. I) angegebene stets hinreichende (nur im Falle, wo das System (0) vom Range $r_0 - r_\varkappa - i$ ist, auch nothwendige) Bedingung unmittelbar in Evidenz gesetzt.

Nimmt man die stets nothwendige Bedingung (V) als erfüllt an, so kann man das System (37c) durch

$$(\bar{a}_{\alpha\beta}) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = \ s_{\varkappa-2}, \cdots s_{\varkappa-i}, \\ \beta = 0, s_{\varkappa-1}, \cdots s_{\varkappa-i+1} \end{pmatrix}$$

ersetzen, welches jetzt genau dieselbe Beschaffenheit besitzt wie das ursprüngliche (37). Reducirt man dasselbe auf die für (37) angegebene Weise, so kommt man wieder auf eine stets nothwendige und eine Gruppe stets hinreichender Bedingungen. Setzt man die nothwendige Bedingung als erfüllt voraus, so hat das reducirte System wieder die Form von (37), und man kann diese Reduction so lange wiederholen, bis ein System erscheint, welches aus einem einzigen Elemente besteht. Dieses Element muss dann verschwinden.

S. 195, Zeile 9 v. u. ist das specielle Kriterium (Bd. I, S. 189) gemeint. Die Zeile 9—16 v. o. für $r_\varkappa$ gemachte Bemerkung gilt natürlich auch für jedes r_α $(\alpha = 1, 2, \cdots \varkappa)$, da offenbar die zu den Exponenten $r_0, r_1, \cdots r_\alpha$ gehörigen Reihen in der Form

$$x^{r_\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(r_\alpha) x^\nu$$

*) Daselbst ist auf der rechten Seite $r_\varkappa$ an die Stelle von r zu setzen.

darstellbar sind. Darum liefert das specielle Kriterium eben für jedes $\alpha = 1, 2, \cdots \varkappa$ die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen.

S. 210, Zeile 1, 2 v. o. ist in den Gleichungen ξ statt x als unabhängige Variable der Differentialquotienten zu schreiben, also

$$\frac{d^n y}{d\xi^n}, \frac{d^{n-1}y}{d\xi^{n-1}}, \cdots \text{ statt } \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \cdots.$$

S. 218. Die $m \cdot n$ Functionen $y_{\varkappa i}$ brauchen (vergl. Thomé, Crelle's Journal, Bd. 115, S. 138 ff.) im Allgemeinen nicht linear unabhängig zu sein. Sind nur $l < mn$ derselben, etwa

$$y_1, y_2, \cdots y_l,$$

von einander linear unabhängig, so befriedigen alle $y_{i\varkappa}$ die lineare Differentialgleichung l^{ter} Ordnung

$$\frac{D(y, y_1, y_2, \cdots y_l)}{D(y_1, y_2, \cdots y_l)} = 0,$$

von der ebenso wie a. a. O. für die Differentialgleichung (3) folgt, dass ihre Coefficienten rationale Functionen von x sind.

S. 222, Zeile 15 v. u., unter dem Σ-Zeichen lies $g_\nu(\varrho)$ statt $g_0(\varrho)$.

S. 244, Zeile 11 v. u. lautet der Coefficient von $\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}$ nicht q_0, sondern q_1.

S. 257, Zeile 10 v. o., in der Formel, lies im Nenner $\beta - 1$ statt $\beta + 1$.

S. 288, Zeile 3 v. o. muss es im Coefficienten von $z^{(n-2)}$ heissen

$$-\frac{n-1}{2n} p_1^2 \quad \text{statt} \quad +\frac{n-1}{2n} p_1^2.$$

S. 307, Nr. 86. Wenn in der Differentialgleichung (A) der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung nicht verschwindet, so besitzt die aus den Coefficienten der Recursionsformel gebildete unendliche Determinante nicht mehr die Normalform (Nr. 77, Bd. I, S. 276), man kann aber die Convergenz derselben erweisen, indem man sich des folgenden von Herrn Helge von Koch (Comptes Rendus, 1893^I, S. 179 ff.) aufgestellten Satzes bedient.

Herr von Koch definirt (a. a. O.) die Convergenz einer unendlichen Determinante, indem er von der Darstellung III (Nr. 78, Bd. I, S. 278) ausgeht. Die unendliche Determinante

$$D = [a_{i\varkappa}] \qquad (i, \varkappa = -\infty, \cdots +\infty)$$

wird also convergent genannt, wenn das Product $\prod_i a_{ii}$ unbedingt convergent ist, und die Summe der Producte

$$\sum \pm \prod_i a_{ii}$$

einen endlichen Werth besitzt. Als Verallgemeinerung des (Poincar schen) Satzes (Nr. 77, Bd. I, S. 276), dass die unendliche Determinan convergirt, wenn die Reihen

$$\sum |\alpha_{ii}|, \quad \sum_i \sum_\varkappa |\alpha_{i\varkappa}|$$

convergent sind, ergiebt sich dann der gedachte Satz:

Die unendliche Determinante D ist convergent, wenn d Reihen

$$\sum_i |\alpha_{ii}|, \quad \sum_i \sum_j \sum_\varkappa |\alpha_{ij}\alpha_{j\varkappa}|, \quad \sum_i \sum_j \sum_\varkappa \sum_l |\alpha_{ij}\alpha_{j\varkappa}\alpha_{\varkappa l}|$$

convergent sind.

S. 311 muss Zeile 2, 3, 4 v. o. lauten: „so ist nach dem Mul plicationstheoreme der unendlichen Determinanten die aus den $\partial_{\nu\mu}$ g bildete Determinante convergent und gleich dem Producte von $\Delta($ und $\mathsf{H}(\varrho)$, d. h. wir haben".

Zu den Nummern 95, 96 (Bd. I, S. 339 ff.):

S. 340, Gleichung (10) lautet der Factor von D_r auf der rechten Sei nicht r, sondern v; Gleichung (11) lautet der Nenner im letzten Glie der linken Seite $x^{2\varkappa}$ und nicht x^2.

S. 341 ff. ist es vielleicht zweckmässig, deutlicher hervortreten lassen, dass die Darstellbarkeit der Function w in der Form

$$w = c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + \cdots,$$

d. h. die Convergenz der Reihe auf der rechten Seite, ausdrücklich g fordert wird. Es möge darum

S. 341, Zeile 5—7 v. o. lauten: „der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) da stellt, und wenn, falls wir setzen

$$v = x^\varkappa w, \quad \frac{1}{x} = \xi,$$

die so definirte Function w von ξ in der Form".

S. 342, Zeile 10 v. u. ist an Stelle von „Differentialgleichun besser zu setzen „Gleichung". Die auf S. 342 definirten w_λ $(\lambda = 1, 2, \cdots$ sind natürlich von den auf S. 341 eingeführten w_r auseinander zu halte

S. 343 am Schlusse der Nr. 95 wäre noch Folgendes hinzuzufüge

Im Allgemeinen ist für $\varkappa > 0$ eine Entwickelung der Function

$$w = \frac{v}{x^\varkappa}$$

nach positiven ganzen Potenzen von ξ nicht möglich, sondern die En

wickelung von w nach Potenzen von ξ enthält noch unendlich viele negative Potenzen. Die Bestimmung der w_λ, v_λ, z_λ ist aber gleichwohl auf die angegebene Weise möglich, diese Grössen stellen jedoch keine Lösungen der Gleichungen (11), (12), ($\mathfrak{A}$) dar, wir können vielmehr nur sagen: In

$$w_\lambda^n + \psi_{n-1}(\xi) w_\lambda^{n-1} + \cdots + \psi_0$$

fallen die $\varkappa + 1$ niedrigsten Potenzen von ξ und folglich in

$$v_\lambda^n + \varphi_\varkappa v_\lambda^{n-1} + \cdots + \varphi_{n\varkappa}$$

die $\varkappa + 1$ höchsten Potenzen von x weg. Es ist also

$$(14a) \qquad v_\lambda^n + \varphi_\varkappa v_\lambda^{n-1} + \cdots + \varphi_{n\varkappa} = B_\lambda x^{(n-1)\varkappa - 1} + \cdots,$$

wo B_λ eine einfach zu bestimmende Constante bedeutet.

Die Bedingungen dafür, dass die z_λ wirkliche Lösungen der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) darstellen, ergeben sich mit Rücksicht auf den Umstand, dass die für w angesetzte Reihe

$$w = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + \cdots,$$

falls sie convergent ist, mit der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenz von ξ abbrechen muss, in der Form, dass die Coefficienten

$$c_{\varkappa+1}, \; c_{\varkappa+2}, \; \cdots$$

verschwinden müssen.

S. 343, in der Gleich. (15) sind im Coefficienten von u die Glieder

$$v_\lambda^n + D_{\lambda,n} + \varphi_\varkappa(v_\lambda^{n-1} + D_{\lambda,n-1}) + \cdots + \varphi_{(n-1)\varkappa}(v_\lambda + D_{\lambda,1}) + \varphi_{n\varkappa}$$

hinzuzufügen; entsprechend ist

S. 344 in der ersten Gleichung oben im Factor von u der Coefficient von $x^{(n-1)(\varkappa+1)}$ statt $b_{n-1,1}c_{0\lambda}^{n-1}$ gleich

$$B_\lambda + b_{n-1,1}c_{0\lambda}^{n-1}$$

zu nehmen, und auch (Zeile 11 v. o.) in dem Ausdrucke für die determinirende Function das Glied $+B_\lambda$ hinzuzufügen, wo B_λ die durch die Gleichung (14a) definirte Grösse bedeutet.

S. 346, Zeile 12 v. u. ist hinter „von x“ hinzuzufügen „mit einer endlichen Anzahl von Potenzen mit positivem Exponenten“.

S. 347, Zeile 11 v. o. ist hinter „dass“ einzuschalten „seine logarithmische Ableitung für $x = \infty$ von endlicher Ordnung unendlich wird und überdies“.

S. 402 in der Gleichung (31) hat man, da $\psi_p = 1$ zu nehmen ist, für $\nu > 0$

$$\gamma_{\nu,p} = 0.$$

S. 404, Zeile 6 v. u. und S. 405, Zeile 1 v. o. lies $H_{i\nu}$ statt *I*

S. 409, Nr. 114 ist stillschweigend die Voraussetzung gema dass $\varphi_1(z)$, $\varphi_0(z)$ keinen gemeinsamen Theiler besitzen. Wäre e $(z - a)^\lambda$ ein gemeinsamer Theiler dieser beiden ganzen Functionen, besässe (A_1) offenbar die Lösungen

$$e^{ax}, \; xe^{ax}, \; \cdots \; x^{\lambda-1}e^{ax}.$$

S. 410, Zeile 13 v. u. soll lauten

$$l_{a,b} = s_a s_b s_a^{-1} s_b^{-1}.$$

S. 421 oben. Die Definition von $\Gamma(\varrho)$ durch das sogenan Euler'sche Integral zweiter Gattung

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\varrho-1}\, dt = \Gamma(\varrho)$$

gilt natürlich nur für Werthe von ϱ, deren realer Theil positiv Für ein beliebiges ϱ hat eben die Gleichung

$$\int e^{-t} t^{\varrho-1}\, dt = \Gamma(\varrho)$$

als Definition von $\Gamma(\varrho)$ zu gelten, wo die Integration längs des S. 4 Zeile 6—3 v. u. (Bd. I) beschriebenen Weges zu erstrecken ist.

Dem Litteraturnachweis ist hinzuzufügen

bei Nr. 16: Appell, a. a. O. S. 404;
bei Nrn. 18, 19: Weinstein, Grunert's Archiv, Theil 49, S. 225ff.;
bei Nrn. 19, 21—23: Grünfeld, Crelle's Journal, Bd. 98, S. 333ff.;
Günther, ebenda, Bd. 117, S. 168;
bei Nr. 39: Hamburger, Crelle's Journal, Bd. 83, S. 204ff.;
bei Nr. 42: Koehler, Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. 33, S. 231ff.;
bei Nr. 90: v. Koch, Acta Mathem., Bd. 18, S. 337ff.

HANDBUCH

DER THEORIE

DER LINEAREN

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

DR. LUDWIG SCHLESINGER,

ORDENTLICHEM PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU KLAUSENBURG.

IN ZWEI BÄNDEN.

ZWEITEN BANDES ZWEITER (SCHLUSS-)THEIL.

MIT FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1898.

Inhaltsverzeichniss und Litteraturnachweis.

Inhaltsverzeichniss. | Litteraturnachweis.

Dreizehnter Abschnitt.

Theorie der elliptischen Modulfunction.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Vierzehnter Abschnitt.

Theorie der eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunctionen.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Fünfzehnter Abschnitt.

Theorie der Fuchs'schen Functionen.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Sechzehnter Abschnitt.

Das Poincaré'sche Princip und seine Anwendungen.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Siebzehnter Abschnitt.

Theorie der Fuchs'schen Zetafunctionen.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Frobenius, a. a. O. S. 29 ff.; Sitzungsberichte 1896, S. 601—604.

Picard, a. a. O.; Crelle's Journal, Band 90, S. 281 ff.;
Hermite, Sur quelques applications des fonctions elliptiques (1885);
Fuchs, Göttinger Nachrichten 1878, S. 19—32; Liouville's Journal, III. Serie, Band IV, S. 125—140;
Floquet, Comptes Rendus, Band 98, S. 38 ff., 82 ff.;
Stenberg, Acta Mathematica, Band 15, S. 257 ff.;
Hirsch, a. a. O.;
Krause, Doppeltperiodische Functionen, Band II (1897), S. 181 ff., 235 ff., 259 ff., 298 ff;
Heine, Kugelfunctionen, Band I (1878), S. 397 ff.

Dreizehnter Abschnitt.

Theorie der elliptischen Modulfunction.

Erstes Kapitel.

260. Die Umkehrungsfunction des elliptischen Integrals erster Gattung. Formulirung des Problems der Theorie der elliptischen Modulfunction.

Die Periodicitätsmoduln $4K$ und $2K'i$ des elliptischen Integrales erster Gattung mit dem Modul $z = x^2$ genügen, wie in der Nr. 248 (Bd. II, 1, S. 477) gezeigt worden ist, als Functionen von z aufgefasst der Legendre'schen Differentialgleichung

$$(L) \qquad z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + (1-2z)\frac{du}{dz} - \frac{1}{4}u = 0.$$

Das eingehende Studium dieser Differentialgleichung soll uns zunächst beschäftigen.

Um gleich die Beziehung der anzustellenden Erwägungen zu der Theorie der elliptischen Transcendenten hervorzuheben, bemerken wir, dass das Integral erster Gattung

$$\varphi = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-zy^2)}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(z-x)}}, \quad \left(y^2 = \frac{1}{x}\right),$$

eine Function der beiden von einander unabhängigen Variabeln y und z ist.

Während man nun in der Theorie der elliptischen Transcendenten, wie sie von Abel und Jacobi begründet worden ist, vorwiegend φ als Function von y studirt, indem man dem Modul z einen beliebigen, aber festen Werth beilegt, haben wir es umgekehrt mit der Untersuchung von φ als Function des Moduls z zu thun, wobei wir dem y einen constanten Werth beilegen. Für ein beliebiges y befriedigt das Integral φ offenbar (vergl. die Gleichung (22), Nr. 234, Bd. II, 1, S. 420) die nicht homogene lineare Differentialgleichung

$$z(z-1)\frac{d^2\varphi}{dz^2}+(2z-1)\frac{d\varphi}{dz}+\frac{1}{4}\varphi=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{z}}}\frac{d}{dx}\left\{\frac{\sqrt{x(1-x)(z-x)}}{(z-x)^2}\right\}dx$$

wir betrachten nur diejenigen y-Werthe, für welche das Glied auf (rechten Seite verschwindet, was offenbar keine wesentliche Beschri kung ist.

In der Theorie der elliptischen Functionen spielt die Umkehrung function y als Function von φ eine wichtige Rolle, ja sie wird sog seit Abel und Jacobi zur Grundlage der Theorie gemacht, weil eine eindeutige Function ist. Und zwar ist y nicht allein eine e deutige Function von φ, sondern die Darstellung dieser Function

$$y = \sin \operatorname{am} \varphi$$

durch die Jacobi'sche Thetafunction lässt auch erkennen, dass y sehr übersichtlicher Weise von dem Quotienten

$$\tau = \frac{K'i}{K}$$

der beiden completten Integrale abhängt. Aus dieser Darstellung (Function sin am erhält man, indem man dem φ geeignete consta Werthe beilegt, eine Darstellung des Moduls $\varkappa = \sqrt{z}$ als Functi von τ, welche lehrt, dass diese Function, die sogenannte elliptisc Modulfunction, eine eindeutige ist.

Es ergiebt sich also aus der Theorie der elliptischen Function dass in der Differentialgleichung (L) die unabhängige Variabl eine eindeutige Function des Quotienten τ zweier linear u abhängiger Integrale ist, ein Resultat, welches uns auf den (dankenkreis des elften Abschnittes zurückverweist.

Da es uns nicht allein auf die Discussion der Differentialgleichu (L) ankommt, sondern vielmehr auf die Untersuchung allgemeine Differentialgleichungen, welche analoge Eigenschaften darbieten, v die eben für (L) hervorgehobene, so wäre es für unsere Zwecke ni rathsam, das erwähnte Resultat der Theorie der elliptischen Function zu entnehmen, wir werden vielmehr trachten, dasselbe unabhän von jener Theorie herzuleiten, d. h. genauer gesprochen:

Wir wollen die Eigenschaften von K, $K'i$, τ, z nicht dadu kennen lernen, dass wir erst die Untersuchung der allgemeinen I ziehung zwischen y, φ, τ, z vornehmen und dann dem φ specie Werthe zuertheilen, sondern stellen uns die Aufgabe, direct an d Functionen K, $K'i$, beziehungsweise an der Differentialgleichung (selbst die Natur der Beziehung zwischen z und τ zu erforsch

Hierfür bieten sich zwei wesentlich verschiedene Wege dar.

Der eine ist von Herrn Fuchs eingeschlagen worden; bei demselben wird nur von den Entwickelungen der K, $K'i$ in der Umgebung der singulären Stellen und von dem Verhalten derselben bei Umläufen um diese Stellen Gebrauch gemacht, die Darstellung jener Functionen durch bestimmte Integrale kommt nur beiläufig in Betracht. Diesen Weg werden wir später bei der Behandlung von allgemeineren Fragen im Wesentlichen zu befolgen haben.

Der andere Weg schliesst sich wesentlich an die Integraldarstellung der K, $K'i$ an; er hat dem ersteren gegenüber den Mangel, dass er nicht wie dieser unmittelbar für die in Betracht kommenden allgemeineren Fragen nutzbar gemacht werden kann, dagegen führt er in völlig naturgemässer Weise auch zu den aus der Theorie der elliptischen Functionen sich ergebenden Entwickelungen von K, $K'i$ und z als Functionen von τ, und beansprucht überdies ein hervorragendes historisches Interesse, weil Gauss auf demselben in die Theorie der elliptischen Functionen eingedrungen ist. Man bezeichnet diesen Weg nach Gauss als die Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels, und wir wollen nunmehr zur Darlegung dieser Theorie übergehen, indem wir zunächst auf die historische Quelle derselben, die sogenannte Landen'sche Transformation, zurückgreifen.

261. Die Landen'sche Transformation in ihrer historischen Entwickelung. Fagnano, Landen, Lagrange. Anwendungen der Landen'schen Transformation.

Da es äusserst interessant ist zu verfolgen, wie die Landen'sche Transformation sich historisch entwickelt hat, wollen wir in kurzen Umrissen die scheinbar ganz vereinzelt dastehenden Bemerkungen angeben, aus denen sich diese merkwürdige Transformation zusammenfügte.

Die erste Bemerkung verdankt man dem italienischen Mathematiker Grafen Fagnano. Derselbe betrachtet eine Ellipse für rechtwinkelige Coordinaten

(I)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b,$$

und setzt

$$x = a \cos \vartheta,$$

wo also ϑ die excentrische Anomalie bedeutet. Sei M ein Ellipsenpunkt, gehörig zu dem Werthe $\vartheta = \psi$, N ein zweiter Ellipsenpunkt, gehörig zu dem Werthe $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, wo zwischen φ und ψ die Beziehung

$$a \operatorname{tg} \psi = b \operatorname{tg} \varphi$$

besteht. Mögen ferner A, B die Punkte sein, in denen die Ellipse von der positiven x- beziehungsweise y-Axe getroffen wird, und bedeute P den Punkt, in welchem die in M an die Ellipse gezogene Tangente das von dem Ellipsenmittelpunkte aus auf dieselbe gefällte Perpendikel schneidet. Dann zeigt Fagnano, dass die Summe der beiden Ellipsenbögen $\widehat{MB}$ und $\widehat{AN}$ gleich der geradlinigen Strecke $\overline{MP}$ ist. Bezeichnet man die rechtwinkeligen Coordinaten von M durch (ξ, η), so ergiebt sich für diese Strecke der Ausdruck

$$\overline{MP} = t = \xi \frac{c^2}{a} \sqrt{\frac{a^2 - \xi^2}{a^4 - c^2 \xi^2}}, \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

Landen führt nun in den Ausdruck für den Ellipsenbogen $\widehat{BM}$

$$\widehat{BM} = \int_0^\xi \frac{d\xi}{a} \sqrt{\frac{a^4 - c^2\xi^2}{a^2 - \xi^2}}$$

die Grösse t als neue Variable ein und findet

$$(\lambda) \qquad 4\widehat{BM} = 2t + \int_0^t dt \frac{\sqrt{(a+b)^2 - t^2}}{\sqrt{(a-b)^2 - t^2}} + \int_0^t dt \frac{\sqrt{(a-b)^2 - t^2}}{\sqrt{(a+b)^2 - t^2}}.$$

Die beiden Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung gestatten eine geometrische Deutung. Das erste ist der Bogen einer Ellipse

$$\text{(II)} \qquad \frac{x^2}{(a+b)^2} + \frac{y^2}{4ab} = 1$$

mit den Halbaxen $a + b$ und $2\sqrt{ab}$, das zweite der Bogen einer Hyperbel mit den Halbaxen $a - b$ und $2\sqrt{ab}$, vermindert um eine gewisse geradlinige Strecke. Der Ellipsenbogen gehört zu dem Abscissenwerthe

$$\xi_1 = \frac{a+b}{a-b} t;$$

setzt man also mit Legendre

$$\xi = a \sin \varphi,$$
$$\xi_1 = (a + b) \sin \varphi_1,$$

so erhält man

$$t = \frac{c^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = (a - b) \sin \varphi_1,$$

woraus sich die Beziehung

$$(1) \qquad \sin \varphi_1 = \frac{c^2}{a-b} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

zwischen den beiden Complementen der excentrischen Anomalien φ, φ_1 der Ellipsen (I) und (II) ergiebt.

Diese Beziehung (1) ist die sogenannte Landen'sche Transformation.

Der Ellipsenbogen $\widehat{BM}$ ist ein elliptisches Integral zweiter Gattung

$$\widehat{BM} = \int_0^\varphi \sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

die Landen'sche Gleichung (λ) stellt also die Anwendung der Transformation (1) auf das Integral zweiter Gattung dar. Lagrange hatte zuerst den folgenreichen Gedanken, die Landen'sche Transformation auf das Integral erster Gattung

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}}$$

anzuwenden.

Man findet durch einfache Rechnung unmittelbar die Gleichung

$$(2) \qquad \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a_1{}^2 \cos^2\varphi_1 + b_1{}^2 \sin^2\varphi_1}} = 2\, \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}},$$

wenn man setzt

$$(3) \qquad a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}.$$

Integrirt man die Gleichung (2) in Bezug auf φ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ und setzt

$$(4) \qquad A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}}, \quad A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a_1{}^2 \cos^2\varphi_1 + b_1{}^2 \sin^2\varphi_1}},$$

so ergiebt sich, da für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\sin\varphi_1 = 0, \quad \cos\varphi_1 = -1,$$

also $\varphi_1 = \pi$ ist,

$$2A = \int_0^\pi \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a_1{}^2 \cos^2\varphi_1 + b_1{}^2 \sin^2\varphi_1}} = 2A_1,$$

d. h. wir haben

$$(5) \qquad A = A_1.$$

Wir sehen also, dass das Integral A ungeändert bleibt, wenn man darin a, b ersetzt durch a_1, b_1, d. h. nach den Gleichungen (3), wenn

man statt a, b das arithmetische und das geometrische Mittel dieser beiden Grössen setzt.

Um den Zusammenhang mit den in der Nr. 248 (Bd. II, 1, S. 478 ff.) benutzten Zeichen herzustellen, führen wir die numerischen Excentricitäten

$$\varkappa = \frac{c}{a}, \quad \varkappa_1 = \frac{a-b}{a+b}$$

der beiden Ellipsen (I), (II) ein. Es ist dann

$$\int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{a}\int\limits_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\varkappa^2\xi^2)}}$$

und folglich

$$(6)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\varkappa^2\xi^2)}} = \dfrac{1}{a}\,K(\varkappa^2), \\ A_1 = \dfrac{1}{a_1}\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{d\xi_1}{\sqrt{(1-\xi_1^2)(1-\varkappa_1^2\xi_1^2)}} = \dfrac{1}{a_1}\,K(\varkappa_1^2), \end{cases}$$

die Gleichung (5) ergiebt also

$$(7)\qquad K(\varkappa^2) = (1+\varkappa_1)\,K(\varkappa_1^2),$$

und nach Einführung der complementären Moduln

$$\varkappa_1' = \sqrt{1-\varkappa_1^2}, \quad \varkappa' = \sqrt{1-\varkappa^2}$$

lautet die Beziehung zwischen $\varkappa$ und $\varkappa_1$

$$(8)\qquad \varkappa_1 = \frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}.$$

Setzt man noch

$$c_1^2 = a_1^2 - b_1^2,$$

so ergiebt sich

$$(9)\qquad \varkappa = \frac{c}{a}, \quad \varkappa' = \frac{b}{a}, \quad \varkappa_1 = \frac{c_1}{a_1}, \quad \varkappa_1' = \frac{b_1}{a_1}.$$

Da wir $a > b$ vorausgesetzt hatten, ist

$$a > c > 0,$$

also liegt $\varkappa$ sowohl wie $\varkappa'$ zwischen Null und Eins. Es ist folglich

$$\varkappa_1 < \varkappa^2 < \varkappa,$$

d. h. wir haben durch die Landen'sche Transformation die Möglichkeit, von einem completten elliptischen Integrale K zu einem ebensolchen mit kleinerem Modul überzugehen. Das ist für die numerische Berechnung von $K(\varkappa^2)$ von Wichtigkeit, [illegible] (Nr. 248, Bd. II, 1, S. 480)

$$K(\varkappa^2) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \varkappa^2\right)$$

um so besser convergirt, je kleiner $\varkappa^2$ ist. Wir können aber die Landen'sche Transformation auch sofort theoretisch verwerthen.

Beachten wir nämlich, dass die Entwickelung

$$K(\varkappa_1^2) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \varkappa_1^2\right)$$

convergirt für Werthe von $\varkappa_1^2$, deren absoluter Betrag kleiner ist als Eins, und dass zufolge der Gleichung (8) das Innere des Einheitskreises der Ebene der complexen Variabeln

$$z = \varkappa_1^2$$

der ganzen Ebene der complexen Variabeln

$$z = \varkappa^2$$

entspricht, so liefert uns die Gleichung (7) oder

$$K(\varkappa^2) = \frac{\pi}{1+\varkappa'} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \left(\frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}\right)^2\right)$$

eine in der ganzen z-Ebene gültige Darstellung von $K(z)$.

Will man den Modul noch weiter verkleinern, so wird man die Landen'sche Transformation wiederholt anzuwenden haben. Auf diese Weise erhält man den Algorithmus

$$(10) \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad c_n^2 = a_n^2 - b_n^2,$$

$$(11) \quad A_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_{n+1}^2 \cos^2\varphi + b_{n+1}^2 \sin^2\varphi}} = A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}}$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots).$$

262. **Der Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels. Darstellung durch das complette elliptische Integral erster Gattung.**

Wir betrachten nun mit Lagrange und Gauss den durch die Gleichungen (10) dargestellten Algorithmus, indem wir a, b als beliebige reale positive Grössen

$$a > b, \quad c^2 = a^2 - b^2 > 0$$

voraussetzen und die Quadratwurzeln in den Gleichungen

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

und in allen folgenden analogen stets positiv wählen. Dann sind also alle a_n, b_n real positiv, und da

(12) $$a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \frac{1}{4}(a_n - b_n)^2 \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

ist (für $n=0$ ist $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$ zu nehmen), so ist auch stets

$$a_n > b_n.$$

Ferner haben wir, da c_{n+1} positiv sein sollte,

$$c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} = a_n - a_{n+1},$$

es sind also a_n, b_n die Wurzeln der quadratischen Gleichung

(13) $$u^2 - 2a_{n+1}u + b_{n+1}^2 = 0,$$

und zwar ist

(14) $$\begin{cases} a_n = a_{n+1} + c_{n+1}, \\ b_n = a_{n+1} - c_{n+1}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (10) ergiebt sich unmittelbar

$$a_{n+1} < a_n, \quad b_{n+1} > b_n,$$

d. h. von den beiden durch den Algorithmus (10) gelieferten Zahlenfolgen

(15) $$\begin{cases} a_0, a_1, a_2, \cdots, \\ b_0, b_1, b_2, \cdots \end{cases}$$

nimmt mit wachsendem Index die eine ab und die andere zu. **Daraus** folgt nach bekannten Principien, dass sich jede der beiden Zahlenfolgen mit wachsendem Index einem bestimmten Grenzwerthe nähert.

Nach den Gleichungen (10) und (12) ist aber

$$\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} = \frac{a_n - b_n}{4} \cdot \frac{1}{a_{n+1} + b_{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} < \frac{1}{2},$$

also haben wir

$$a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n - b_n) < \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1})$$

und folglich allgemein

(16) $$a_n - b_n < \frac{1}{2^n}(a - b) \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

Für in's Unendliche wachsende Werthe von n ist demnach

(17) $$\lim_n (a_n - b_n) = 0,$$

oder mit andern Worten, es ist

$$\lim_n a_n = \lim_n b_n, \quad \lim_n c_n = 0.$$

Bildet man also aus den realen positiven Grössen a, b die Folgen (15) der arithmetischen und der geometrischen Mittel, so nähern sich beide mit unendlich wachsendem n einem und demselben bestimmten Grenzwerthe.

Man bezeichnet diesen Grenzwerth nach Gauss als das **arithmetisch-geometrische Mittel**

$$M(a, b)$$

aus den Zahlen a und b.

Bilden wir mit Hülfe der a_n, b_n die Integrale

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2 \cos^2\varphi + b_n^2 \sin^2\varphi}} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

so haben wir nach (11)

$$A = A_1 = A_2 = \cdots = A_n,$$

also ist auch

$$A = \lim_n A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{M(a, b)\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{M(a, b)};$$

der reciproke Werth des arithmetisch-geometrischen Mittels stellt sich also in der Form

$$(18) \qquad \frac{1}{M(a, b)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}}$$

durch ein complettes elliptisches Integral erster Gattung dar.

Auf die Grössen $\varkappa$, $\varkappa'$ und K angewandt ergeben diese Resultate das Folgende. Setzen wir

$$\varkappa_n = \frac{c_n}{a_n}, \quad \varkappa_n' = \frac{b_n}{a_n},$$

$$K(\varkappa_n^2) = K_n = a_n A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa_n^2 \sin^2\varphi}},$$

so ist nach Gleichung (7)

$$(19) \qquad K(\varkappa^2) = (1 + \varkappa_1)(1 + \varkappa_2) \cdots (1 + \varkappa_{n+1}) K_{n+1};$$

nun ist aber zufolge der Gleichung (17)

$$(20) \qquad \lim_n \varkappa_n = \lim_n \frac{c_n}{a_n} = 0, \quad \lim_n \varkappa_n' = 1,$$

wir haben folglich

(21) $$\lim_n K_n = \frac{\pi}{2}$$

und erhalten hiernach aus (19) die von Legendre gefundene Gleichung

(22) $$K = \frac{\pi}{2} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + \varkappa_\nu).$$

Wir bemerken noch, dass sich aus der Ungleichung (16) auch der Grad der Annäherung von a_n, b_n an den gemeinsamen Grenzwerth ergiebt. Es ist nämlich für ein beliebiges positives ganzzahliges r

$$b_{n+r} < a_{n+r}, \quad a_{n+r} < a_n$$

und folglich

$$b_{n+r} - b_n < a_n - b_n;$$

ebenso folgt aus

$$a_{n+r} > b_{n+r}, \quad b_{n+r} > b_n$$

die Ungleichung

$$a_n - a_{n+r} < a_n - b_n,$$

es sind also stets die Differenzen

$$a_n - a_{n+r}, \quad b_{n+r} - b_n$$

kleiner wie der reciproke Werth von 2^n.

263. Homogene Functionen. Der Algorithmus aus den Grössen a und c. Fortsetzung nach der negativen Seite hin.

Das arithmetisch-geometrische Mittel $M(a, b)$ ist eine homogene Function von a, b. Setzt man nämlich für willkürliches λ

$$a' = \lambda a, \quad b' = \lambda b,$$

so ist auch

$$a_1' = \frac{a' + b'}{2} = \lambda a_1, \quad b_1' = \sqrt{a'b'} = \lambda b_1;$$

wir haben also

$$M(a', b') = \lambda M(a, b),$$

d. h. $M(a, b)$ ist eine homogene Function ersten Grades von a und b.

Nach dem Begriffe des Grenzwerthes ist

$$M(a_n, b_n) = M(a, b) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

folglich genügt sowohl $M(a, b)$ selbst wie auch jede Function von $M(a, b)$

$$\Phi(M(a, b)) = f(a, b)$$

der Functionalgleichung

$$f(a, b) = f\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).$$

Hat man umgekehrt eine Function $F(a, b)$, die der Functionalgleichung

$$(23) \qquad F(a, b) = F\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = F(a_1, b_1)$$

Genüge leistet, so ist auch

$$F(a, b) = F(a_n, b_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

also, wenn wir n in's Unendliche wachsen lassen,

$$F(a, b) = F(\lim_n a_n, \lim_n b_n) = F(M(a, b), M(a, b)),$$

d. h. die Function $F(a, b)$ ist eine Function der einen Variabeln $M(a, b)$. Daraus schliessen wir nach bekannten Sätzen, dass $F(a, b)$ einer partiellen Differentialgleichung Genüge leisten muss.

Die beiden Quotienten

$$\frac{a}{M(a, b)}, \quad \frac{b}{M(a, b)}$$

sind homogene Functionen nullten Grades von a und b, also blosse Functionen von

$$\varkappa' = \frac{b}{a};$$

in der That haben wir z. B.

$$\frac{a}{M(a, b)} = \frac{1}{M(1, \varkappa')} = \frac{2}{\pi} aA = \frac{2}{\pi} K(\varkappa^2) = \frac{2}{\pi} K(1 - \varkappa'^2).$$

Setzen wir in dieser Gleichung $\varkappa$ an die Stelle von $\varkappa'$, so erhalten wir

$$\frac{1}{M(1, \varkappa)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa'^2 \sin^2\varphi}} = \frac{2}{\pi} K(\varkappa'^2),$$

also, da $K(\varkappa'^2)$ nichts anderes ist wie $K'(\varkappa^2)$,

$$\frac{1}{M(1, \varkappa)} = \frac{2}{\pi} K'(\varkappa^2).$$

Wir haben also die Doppelgleichung

$$(24) \qquad \begin{cases} \dfrac{a}{M(a, b)} = \dfrac{1}{M(1, \varkappa')} = \dfrac{2}{\pi} K(\varkappa^2), \\[2ex] \dfrac{a}{M(a, c)} = \dfrac{1}{M(1, \varkappa)} = \dfrac{2}{\pi} K'(\varkappa^2). \end{cases}$$

Dies veranlasst uns, aus den Grössen a, c einen ähnlichen Algorithmus zu bilden wie der, den wir aus a, b abgeleitet hatten.

Setzen wir

$$\bar{a}_1 = \frac{a+c}{2}, \quad \bar{c}_1 = \sqrt{ac},$$

und allgemein

(25) $$\bar{a}_{n+1} = \frac{\bar{a}_n + \bar{c}_n}{2}, \quad \bar{c}_{n+1} = \sqrt{\bar{a}_n \bar{c}_n}, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

wo für $n = 0$ zu setzen ist

$$\bar{a}_0 = a, \quad \bar{c}_0 = c,$$

so haben wir

$$\lim_n \bar{a}_n = \lim_n \bar{c}_n = M(a, c).$$

Der Algorithmus (25) steht nun in einem merkwürdigen Zusammenhange mit dem Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels aus a, b. Es waren a_n, b_n definirt als Wurzeln der quadratischen Gleichung (13) (S. 8); so sind also z. B. a, b die Wurzeln von

$$u^2 - 2a_1 u + b_1^2 = 0$$

und zwar ist

$$a = a_1 + c_1,$$
$$b = a_1 - c_1.$$

Gehen wir nun weiter und bilden die Gleichung

$$u^2 - 2au + b^2 = 0,$$

bezeichnen deren Wurzeln mit

$$a_{-1} = a + c,$$
$$b_{-1} = a - c$$

und setzen

$$c_{-1} = \sqrt{a_{-1}^2 - b_{-1}^2},$$

so können wir in dieser Art fortfahren, d. h. die Wurzeln der Gleichung

$$u^2 - 2a_{-n} u + b_{-n}^2 = 0$$

durch

(26) $$\begin{cases} a_{-n-1} = a_{-n} + c_{-n}, \\ b_{-n-1} = a_{-n} - c_{-n}, \end{cases} \quad c_{-n} = \sqrt{a_{-n}^2 - b_{-n}^2}$$

bezeichnen für $n = 1, 2, 3, \cdots$, und erhalten auf diese Weise eine Folge von Zahlenpaaren a_{-n}, b_{-n}, die wir als die Verlängerung des aus a, b gebildeten Algorithmus der a_n, b_n nach der negativen Seite hin betrachten können. In den beiden Folgen

$$\cdots, a_{-n}, \cdots a_{-1}, a, a_1, \cdots a_n, \cdots$$
$$\cdots, b_{-n}, \cdots b_{-1}, b, b_1, \cdots b_n, \cdots$$

gelten dann offenbar die für positive Indices aufgestellten Beziehungen auch für die negativen Indices.

Aus (26) folgt

(27) $$a^2_{-n-1} - b^2_{-n-1} = c^2_{-n-1} = 4a_{-n}c_{-n},$$

also haben wir für $n = 0$

$$\frac{1}{2}a_{-1} = \frac{a+c}{2}, \quad \frac{1}{2}c_{-1} = \sqrt{ac},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (25)

$$\frac{1}{2}a_{-1} = \bar{a}_1, \quad \frac{1}{2}c_{-1} = \bar{c}_1.$$

Weiter erhalten wir

$$\frac{1}{2^2}a_{-2} = \frac{a_{-1}+c_{-1}}{2^2} = \frac{\bar{a}_1+\bar{c}_1}{2} = \bar{a}_2,$$

$$\frac{1}{2^2}c_{-2} = \sqrt{\frac{a_{-1}c_{-1}}{2^2}} = \sqrt{\bar{a}_1\bar{c}_1} = \bar{c}_2.$$

Nehmen wir an, es sei schon erwiesen

(28) $$\frac{1}{2^n}a_{-n} = \bar{a}_n, \quad \frac{1}{2^n}c_{-n} = \bar{c}_n,$$

so folgt aus (25), (26), (27)

$$\bar{a}_{n+1} = \frac{\bar{a}_n+\bar{c}_n}{2} = \frac{1}{2^n}\frac{a_{-n}+c_{-n}}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}a_{-n-1},$$

$$\bar{c}_{n+1} = \sqrt{\bar{a}_n\bar{c}_n} = \frac{1}{2^n}\sqrt{a_{-n}c_{-n}} = \frac{1}{2^{n+1}}c_{-n-1},$$

so dass also die Formeln (28) allgemein gültig sind.

Aus (28) ergiebt sich

$$M(a, c) = M(\bar{a}_n, \bar{c}_n) = M\left(\frac{1}{2^n}a_{-n}, \frac{1}{2^n}c_{-n}\right),$$

d. h. wir haben

$$\lim_n \frac{a_{-n}}{2^n} = \lim_n \frac{c_{-n}}{2^n} = \frac{1}{2^n}M(a_{-n}, c_{-n}) = M(a, c),$$

also ist

$$\lim_n a_{-n} = \infty, \quad \lim_n c_{-n} = \infty, \quad \lim_n \frac{c_{-n}}{a_{-n}} = 1, \quad \lim_n b_{-n} = 0.$$

Nun können wir auch den aus a, c entspringenden Algorithmus nach der negativen Seite hin verlängern. Definiren wir nämlich

$$\bar{b}_n^{\,2} = \bar{a}_n^{\,2} - \bar{c}_n^{\,2},$$

so ist nach (28)

$$\bar{b}_n^{\,2} = \frac{a^2_{-n}}{2^{2n}} - \frac{c^2_{-n}}{2^{2n}} = \frac{b^2_{-n}}{2^{2n}}$$

und es hängen die $\bar{a}_n, \bar{c}_n, \bar{b}_n$ ebenso von a, c ab, wie die a_n, b_n, c_n von a, b. Bezeichnen wir also mit

$$\left.\begin{aligned}\bar a_{-n-1} &= \bar a_{-n} + \bar b_{-n},\\ \bar c_{-n-1} &= \bar a_{-n} - \bar b_{-n},\end{aligned}\right\}\ \bar b_{-n} = \sqrt{\bar a^2_{-n} - \bar c^2_{-n}}$$

die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$u^2 - 2\bar a_{-n} u + \bar c^2_{-n} = 0,$$

so ist

$$\frac{\bar a_{-n}}{2^n} = a_n, \quad \frac{\bar b_{-n}}{2^n} = b_n, \quad \frac{\bar c_{-n}}{2^n} = c_n,$$

und wir haben folglich

$$M(a, b) = M(a_n, b_n) = M(a_{-n}, b_{-n}) = \lim_n \frac{\bar a_{-n}}{2^n} = \lim_n \frac{\bar b_{-n}}{2^n},$$

$$M(a, b) = 2^{-n} M(\bar a_{-n}, \bar b_{-n}) = 2^n M(\bar a_n, \bar b_n),$$

$$M(a, c) = M(\bar a_n, \bar c_n) = M(\bar a_{-n}, \bar c_{-n}) = \lim_n \frac{a_{-n}}{2^n} = \lim_n \frac{b_{-n}}{2^n},$$

$$M(a, c) = 2^n M(a_n, c_n) = 2^{-n} M(a_{-n}, c_{-n}).$$

Für die Moduln $\varkappa$ und die Integrale K, K' lassen sich natürlich die analogen Formeln entwickeln. Setzen wir

$$\varkappa_{-n} = \frac{\bar c_n}{\bar a_n} = \frac{c_{-n}}{a_{-n}}, \quad \varkappa'_{-n} = \frac{\bar b_n}{\bar a_n} = \frac{b_{-n}}{\bar a_{-n}},$$

und bemerken dass

$$\varkappa_n = \frac{c_n}{a_n} = \frac{\bar c_{-n}}{\bar a_{-n}}, \quad \varkappa_n' = \frac{b_n}{a_n} = \frac{\bar b_{-n}}{\bar a_{-n}}$$

ist, so haben wir (wie Legendre sagt) die beiden Modulnketten

$$\lim_m \varkappa_{-m} = 1; \cdots \varkappa_{-3}, \varkappa_{-2}, \varkappa_{-1}, \varkappa, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \cdots; \lim_m \varkappa_m = 0,$$

$$\lim_m \varkappa'_{-m} = 0; \cdots \varkappa'_{-3}, \varkappa'_{-2}, \varkappa'_{-1}, \varkappa', \varkappa_1', \varkappa_2', \varkappa_3', \cdots; \lim_m \varkappa'_m = 1,$$

und es drückt sich $\varkappa_n$ ebenso durch $\varkappa_{n+1}$ aus, wie $\varkappa'_{n+1}$ durch $\varkappa_n'$.

Zweites Kapitel.

264. Reihenentwickelungen für die gefundenen Grenzwerthe. Einführung der Jacobi'schen Grösse q.

Der im vorhergehenden Kapitel entwickelte Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels wurde im Wesentlichen von Lagrange aufgestellt. Gauss hat denselben in der Abhandlung „Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta etc." veröffentlicht, überdies fanden sich aber in seinem Nachlasse Entwürfe zu einer grossartigen Theorie der elliptischen Functionen vor, die von diesem Algorithmus und einem anderen, der mit demselben im Zusammenhange steht, ausgeht. Dieser letztere Algorithmus, der ebenso zu dem allgemeinen elliptischen Integrale führt wie der des arithmetisch-geometrischen Mittels zu dem completten und der, wie P. Günther bemerkt hat, durch eine sich bei Gauss findende trigonometrische Substitution in den der Landen'schen Transformation (1) (Nr. 261, S. 4) übergeht, interessirt uns hier nicht.

Dagegen wollen wir uns der von Gauss angewandten Methode bedienen, um vom arithmetisch-geometrischen Mittel aus zu den merkwürdigen Entwickelungen zu gelangen, die Jacobi und Abel aus den von ihnen aufgestellten Entwickelungen der allgemeinen elliptischen Functionen abgeleitet haben, die aber (nach einer Angabe von Herrn Schering) Gauss schon in sehr früher Zeit (1794, also im Alter von siebzehn Jahren) gekannt zu haben scheint, obwohl er bei Lebzeiten nichts darüber veröffentlicht hat.

Zunächst ergeben sich aus der Definition von $M(a, b)$, $M(a, c)$ unmittelbar Entwickelungen dieser beiden Grössen in Reihenform, wenn wir beachten, dass

$$\lim_{n} a_n = a_\lambda + (a_{\lambda+1} - a_\lambda) + (a_{\lambda+2} - a_{\lambda+1}) + \cdots,$$

$$\lim_{n} \bar{a}_n = \bar{a}_\lambda + (\bar{a}_{\lambda+1} - \bar{a}_\lambda) + (\bar{a}_{\lambda+2} - \bar{a}_{\lambda+1}) + \cdots$$

ist. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (14) (S. 8) folgt hieraus

$$(29) \quad \begin{cases} M(a, b) = a_\lambda - c_{\lambda+1} - c_{\lambda+2} \cdots, \\ M(a, c) = \bar{a}_\lambda - \bar{b}_{\lambda+1} - \bar{b}_{\lambda+2} \cdots. \end{cases}$$

Da ferner

$$\lim_n b_n = b_\lambda + c_{\lambda+1} - c_{\lambda+2} - c_{\lambda+3} - \cdots$$

ist, so erhalten wir auch

$$(30)\qquad \begin{cases} M(a, b) = b_\lambda + c_{\lambda+1} - c_{\lambda+2} - \cdots, \\ M(a, c) = \bar{c}_\lambda + \bar{b}_{\lambda+1} - \bar{b}_{\lambda+2} - \cdots. \end{cases}$$

Die Formeln für $M(a, c)$ können wir auch schreiben

$$M(a, c) = 2^{-\lambda} a_{-\lambda} - 2^{-\lambda-1} b_{-\lambda-1} - 2^{-\lambda-2} b_{-\lambda-2} - \cdots,$$

$$M(a, c) = 2^{-\lambda} c_{-\lambda} + 2^{-\lambda-1} b_{-\lambda-1} - 2^{-\lambda-2} b_{-\lambda-2} - \cdots.$$

Diese Reihen convergiren sehr schnell und sind darum zur numerischen Rechnung wohl geeignet.

Wir wollen nun aus dem Algorithmus der a_n, b_n, c_n einen Algorithmus für die Quadratwurzeln aus diesen Grössen herzuleiten suchen.

Aus den Gleichungen

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}, \quad a_{n+1} = a_{n+2} + c_{n+2}, \quad b_{n+1} = a_{n+2} - c_{n+2}$$

ergiebt sich

$$a_{n+2} = \frac{\frac{a_n + b_n}{2} + \sqrt{a_n b_n}}{2} = \left(\frac{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}}{2}\right)^2,$$

$$c_{n+2} = \frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{2} = \left(\frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{2}\right)^2.$$

Wir finden demnach

$$(31)\qquad \begin{cases} \sqrt{a_{n+2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right), \\ \sqrt{c_{n+2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right). \end{cases}$$

Nun ist aber

$$\sqrt{M(a, b)} = \lim_\lambda \sqrt{a_\lambda} = \sqrt{a_n} + \left(\sqrt{a_{n+2}} - \sqrt{a_n}\right) + \left(\sqrt{a_{n+4}} - \sqrt{a_{n+2}}\right) + \cdots,$$

also finden wir, da

$$\sqrt{a_{n+2}} - \sqrt{a_n} = -\sqrt{c_{n+2}}$$

ist, die Entwickelung

$$(32)\qquad \sqrt{M(a, b)} = \sqrt{a_n} - \sqrt{c_{n+2}} - \sqrt{c_{n+4}} - \sqrt{c_{n+6}} - \cdots,$$

und da

$$\sqrt{b_n} + 2\sqrt{c_{n+2}} = \sqrt{a_n}$$

ist, so können wir auch schreiben

$$(32\text{a})\qquad \sqrt{M(a,b)} = \sqrt{b_n} + \sqrt{c_{n+2}} - \sqrt{c_{n+4}} - \sqrt{c_{n+6}} - \cdots.$$

Analog ergiebt sich

$$\sqrt{M(a,c)} = \sqrt{\frac{a_{-n}}{2^n}} - \sqrt{\frac{b_{-n-2}}{2^{n+2}}} - \sqrt{\frac{b_{-n-4}}{2^{n+4}}} - \cdots,$$

$$\sqrt{M(a,c)} = \sqrt{\frac{c_{-n}}{2^n}} + \sqrt{\frac{b_{-n-2}}{2^{n+2}}} - \sqrt{\frac{b_{-n-4}}{2^{n+4}}} - \cdots.$$

Ferner haben wir

$$c_n^2 = a_n^2 - b_n^2 = 4a_{n+1}c_{n+1},$$

und folglich

$$2\,\frac{a_{n+1}}{c_n} = \sqrt{\frac{a_{n+1}}{c_{n+1}}},$$

oder, wie wir auch schreiben können,

$$\frac{4a_n}{c_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}}\sqrt{\frac{4a_{n+1}}{c_{n+1}}}.$$

Nehmen wir hier auf beiden Seiten den Logarithmus, so kommt

$$\log\frac{4a_n}{c_n} = \log\frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{1}{2}\log\frac{4a_{n+1}}{c_{n+1}}.$$

Bilden wir also

$$\frac{M(a_m, c_m)}{M(a_m, b_m)}\log\frac{4a_m}{c_m} = 2\,\frac{M(a_{m+1}, c_{m+1})}{M(a_{m+1}, b_{m+1})}\left(\log\frac{a_m}{a_{m+1}} + \frac{1}{2}\log\frac{4a_{m+1}}{c_{m+1}}\right),$$

so finden wir

$$\frac{M(a_m, c_m)}{M(a_m, b_m)}\log\frac{4a_m}{c_m} = \frac{1}{2^m}\,\frac{M(a,c)}{M(a,b)}\log\frac{a_m}{a_{m+1}} + \frac{M(a_{m+1}, c_{m+1})}{M(a_{m+1}, b_{m+1})}\log\frac{4a_{m+1}}{c_{m+1}}.$$

Setzen wir nunmehr

$$\frac{M(a,b)}{M(a,c)}\,\frac{M(a_n, c_n)}{M(a_n, b_n)}\log\frac{4a_n}{c_n} = \frac{1}{2^n}\log\frac{4a_n}{c_n} = u_n,$$

so haben wir

$$u_{m+1} - u_m = -\frac{1}{2^m}\log\frac{a_m}{a_{m+1}},$$

und da

$$\lim_m u_m = u_n + (u_{n+1} - u_n) + (u_{n+2} - u_{n+1}) + \cdots$$

ist, ergiebt sich die Formel

$$(33)\qquad \frac{M(a,b)}{M(a,c)}\lim_m \frac{M(a_m, c_m)}{M(a_m, b_m)}\log\frac{4a_m}{c_m} = \frac{1}{2^n}\log\frac{4a_n}{c_n} - \frac{1}{2^n}\log\frac{a_n}{a_{n+1}}$$
$$- \frac{1}{2^{n+1}}\log\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} - \cdots,$$

der die drei analogen Formeln

$$\frac{M(a,b)}{M(a,c)}\lim_m \frac{M(a_m,c_m)}{M(a_m,b_m)}\log\frac{4b_{m+1}}{c_m}=\frac{1}{2^n}\log\frac{4b_{n+1}}{c_n}+\frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}+\cdots,$$

$$\frac{M(a,c)}{M(a,b)}\lim_m \frac{M(a_{-m},b_{-m})}{M(a_{-m},c_{-m})}\log\frac{4a_{-m}}{b_{-m}}=\frac{1}{2^n}\log\frac{2a_{-n}}{c_{-n}}-\frac{1}{2^n}\log\frac{2a_{-n}}{a_{-n-1}}-\cdots$$

$$\frac{M(a,c)}{M(a,b)}\lim_m \frac{M(a_{-m},b_{-m})}{M(a_{-m},c_{-m})}\log\frac{2c_{-m-1}}{b_{-m}}=\frac{1}{2^n}\log\frac{2c_{-n-1}}{b_{-n}}$$

$$+\frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{1}{2}\frac{c_{-n-2}}{c_{-n-1}}+\cdots$$

an die Seite zu stellen sind.

Die vier auf den linken Seiten auftretenden Grenzwerthe lassen sich auf die gemeinsame Form bringen

$$\lim_{\varepsilon=0} M(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\varepsilon},$$

wo ε eine positive gegen Null convergirende Grösse bedeutet. In der That ist z. B., da

$$\lim_m M(a_m,b_m)=\lim_m a_m=M(a,b)$$

ist, der erste Grenzwerth

$$\lim_m \frac{M(a_m,c_m)}{M(a_m,b_m)}\log\frac{4a_m}{c_m}=\lim_m\frac{a_m M(1,\varkappa_m)}{a_m}\log\frac{4}{\varkappa_m}=\lim_m M(1,\varkappa_m)\log\frac{4}{\varkappa_m}.$$

Nun haben wir aber nach (24) (Nr. 263, S. 11)

$$\frac{a_m}{M(a_m,c_m)}=\frac{1}{M(1,\varkappa_m)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa_m'^2\sin^2\varphi}}=\frac{2}{\pi}K'(\varkappa_m^2),$$

also lautet der zu bestimmende Grenzwerth

$$\lim_{\varepsilon=0} M(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\varepsilon}=\lim_{z=0}\frac{\frac{\pi}{2}}{K'(z)\dfrac{1}{\log\frac{4}{\sqrt{z}}}}=\lim_{z=0}\frac{\frac{\pi}{2}}{2K'(z)\dfrac{1}{\log\frac{16}{z}}}.$$

In dieser Form ergiebt sich derselbe aber unmittelbar aus der in der Nr. 249 (Bd. II, 1, S. 482) abgeleiteten Gleichung

$$\lim_{z=0}(2K'(z)+\log z)=4\log 2;$$

es ist nämlich

$$\lim_{z=0}\frac{2K'(z)}{\log\frac{16}{z}}=1,$$

und folglich haben jene vier Grenzwerthe den gemeinsamen Werth $\frac{\pi}{2}$.

Setzen wir nun im Anschlusse an die seit Jacobi übliche Bezeichnung

$$e^{-\pi\frac{M(a,b)}{M(a,c)}} = e^{-\pi\frac{K'}{K}} = q$$

(Gauss bezeichnet dieselbe Grösse durch y), so ist nach (33)

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\frac{M(a,b)}{M(a,c)} &= -\frac{1}{2}\log q\\ &= \frac{1}{2^n}\log\frac{4a_n}{c_n} - \frac{1}{2^n}\log\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\log\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} - \cdots,\end{aligned}$$

also, wenn wir von den Logarithmen zu den Numeris übergehen,

$$(34)\qquad \sqrt{q} = \left(\frac{c_n}{4a_n}\right)^{\frac{1}{2^n}}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{\frac{1}{2^n}}\left(\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}}\cdots,$$

oder da

$$\lim_n u_n = \frac{\pi}{2}\frac{M(a,b)}{M(a,c)} = -\log\sqrt{q}$$

ist, nach der Definition von u_n (S. 17)

$$\sqrt{q} = \lim_n\left(\frac{c_n}{4a_n}\right)^{\frac{1}{2^n}} = \lim_n \sqrt[2^n]{\frac{\varkappa_n}{4}}.$$

265. Beziehungen zwischen den Gauss'schen Functionen P, Q, R. Form der Reihenentwickelungen für diese Functionen.

Die am Schlusse der vorigen Nummer gefundene Formel liefert uns q als Function von $\varkappa$. Es war gezeigt worden (Nr. 263, S. 11), dass die Quotienten

$$\frac{a}{M(a,b)},\quad \frac{b}{M(a,b)},\quad \frac{c}{M(a,b)}$$

als homogene Functionen nullten Grades von a, b blosse Functionen von $\varkappa$ sind. Wir können dieselben demgemäss, da q eine Function von $\varkappa$ und folglich auch umgekehrt $\varkappa$ eine Function von q ist, als Functionen von q betrachten.

Sei in Uebereinstimmung mit der von Gauss benutzten Bezeichnungsweise

$$\sqrt{\frac{a}{M(a,b)}} = P(q),\quad \sqrt{\frac{b}{M(a,b)}} = Q(q),\quad \sqrt{\frac{c}{M(a,b)}} = R(q).$$

Da wir a, b als reale positive Grössen voraussetzen, sind auch $M(a,b)$, $M(a,c)$ real positiv, und folglich ist

$$q = e^{-\pi\frac{M(a,b)}{M(a,c)}} < 1.$$

Bilden wir für beliebiges n

$$q_n = e^{-\pi \frac{M(a_n, b_n)}{M(a_n, c_n)}},$$

so ist wegen

$$M(a, c) = 2^n M(a_n, c_n),$$

(35)
$$q_n = q^{2^n},$$

und folglich

$$\lim_n q_n = 0.$$

Im Sinne der oben eingeführten Bezeichnung ist

(36)
$$\sqrt{\frac{c_n}{M(a_n, b_n)}} = R(q_n) = R(q^{2^n}),$$

also folgt aus der Entwickelung (32) (Nr. 264, S. 16), wenn wir $n = 0$ nehmen und durch $\sqrt{M(a, b)}$ auf beiden Seiten dividiren,

$$1 = \sqrt{\frac{a}{M(a, b)}} - \sqrt{\frac{c_2}{M(a_2, b_2)}} - \sqrt{\frac{c_4}{M(a_4, b_4)}} - \cdots,$$

d. h. in unseren Zeichen

$$1 = P(q) - R(q^{2^2}) - R(q^{2^4}) - \cdots,$$

oder

(37)
$$P(q) = 1 + R(q^{2^2}) + R(q^{2^4}) + \cdots.$$

Analog ergiebt die Gleichung (32a)

(37a)
$$Q(q) = 1 - R(q^{2^2}) + R(q^{2^4}) + \cdots,$$

und hierzu möge noch die Gleichung

(38)
$$R^4(q) = P^4(q) - Q^4(q),$$

die nichts anderes ist wie

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

hinzugefügt werden.

Erheben wir die Gleichung (34) in die $(2^{n-1})^{\text{te}}$ Potenz, so kommt

$$q^{2^{n-2}} = \sqrt{\frac{c_n}{4a_n}} \sqrt{\frac{a_n}{a_{n+1}}} \sqrt[4]{\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}} \sqrt[8]{\frac{a_{n+2}}{a_{n+3}}} \cdots,$$

oder etwas anders geschrieben

$$1 = \frac{1}{2} q^{-2^{n-2}} \sqrt{\frac{c_n}{M(a_n, b_n)}} \sqrt{\frac{M(a, b)}{a_n}} \sqrt{\frac{a_n}{a_{n+1}}} \sqrt[4]{\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}} \cdots.$$

Nun ist aber

$$\lim_n \sqrt{\frac{M(a, b)}{a_n}} \sqrt{\frac{a_n}{a_{n+1}}} \sqrt[4]{\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}} \cdots = 1,$$

wir finden also

$$\lim_n \frac{1}{2} q^{-2^n-2} \sqrt{\frac{c_n}{M(a_n, b_n)}} = 1,$$

oder mit Rücksicht auf (35)

$$\lim_n \frac{1}{2} q_n^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{c_n}{M(a_n, b_n)}} = 1,$$

und endlich zufolge der Gleichung (36)

$$\lim_n \frac{1}{2} q_n^{-\frac{1}{4}} R(q_n) = 1.$$

Nun ist aber für in's Unendliche wachsendes n der Grenzwerth von q_n gleich Null, wir können also die letzte Gleichung in der Form

$$\lim_{q=0} \frac{1}{2} q^{-\frac{1}{4}} R(q) = 1,$$

oder in der Form

$$R(q) = 2q^{\frac{1}{4}}\{1 + [q]\} \tag{39}$$

schreiben, wo $[q]$ eine mit q verschwindende Grösse bedeutet. Um uns in die Natur dieser Grösse $[q]$ Einsicht zu verschaffen, müssen wir auf die in den Nummern 248, 249 (Band II, 1, S. 480 ff.) gegebenen Entwickelungen der Grössen K, $K'i$ zurückgreifen.

Setzen wir in den Ausdruck von q

$$q = e^{-\pi \frac{K'(\varkappa^2)}{K(\varkappa^2)}}$$

für K' und K ihre in der Umgebung von

$$\varkappa^2 = z = 0$$

gültigen Entwickelungen

$$K(z) = \frac{\pi}{2} u_{01} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right),$$

$$K'(z) = \frac{1}{2}(4 \log 2 \cdot u_{01} - u_{02})$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log \frac{16}{z} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right) - F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right)\right]$$

ein, wo (vergl. Nr. 248, Bd. II, 1, S. 479)

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left\{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2\lambda - 1}{2 \cdot 4 \cdots 2\lambda}\right\}^2 z^\lambda,$$

$$F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right) = 4 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left\{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2\lambda - 1}{2 \cdot 4 \cdots 2\lambda}\right\}^2 \sum_{\nu=1}^{2\lambda} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} z^\lambda$$

zu nehmen ist, so finden wir

$$q = \frac{z}{16} e^{\frac{F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right)}}.$$

Entwickeln wir die Exponentialgrösse in der Umgebung von $z =$ so kommt

$$q = \frac{z}{16} \{1 + \overline{\mathfrak{P}}(z)\},$$

wo $\overline{\mathfrak{P}}(z)$ eine gewöhnliche Potenzreihe bedeutet, die für $z = 0$ schwindet. Nach dem Satze von der Umkehrbarkeit einer Potenzr folgt hieraus, dass z in der Umgebung von $q = 0$ in der Form

(40) $$z = \varkappa^2 = 16q(1 + \overline{\overline{\mathfrak{P}}}(q))$$

darstellbar ist, wo $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}(q)$ eine gewöhnliche Potenzreihe darstellt, die $q = 0$ verschwindet. Erheben wir diese Gleichung in die $\left(\frac{1}{4}\right)^{\text{te}}$ Pot so erhalten wir

(41) $$\sqrt{\varkappa} = 2q^{\frac{1}{4}}(1 + \mathfrak{P}(q)),$$

wo auch $\mathfrak{P}(q)$ eine mit q verschwindende gewöhnliche Potenzreihe

Setzen wir ferner in die Entwickelung von $K(z)$

$$\frac{2K(z)}{\pi} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right)$$

für z seine Entwickelung (40) ein, so finden wir die in einer gewi Umgebung von $q = 0$ gültige Darstellung

(42) $$\frac{2K(z)}{\pi} = 1 + \mathfrak{P}_1(q),$$

wo $\mathfrak{P}_1(q)$ eine mit q verschwindende gewöhnliche Potenzreihe bede also erhalten wir, wenn wir endlich die Gleichung (42) in die (Potenz erheben und mit (41) multipliciren, die in der Umgebung $q = 0$ gültige Entwickelung

(43) $$\sqrt{\varkappa}\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 2q^{\frac{1}{4}}\{1 + \mathfrak{P}_2(q)\},$$

wo $\mathfrak{P}_2(q)$ wieder eine mit q verschwindende gewöhnliche Potenz darstellt.

Die Gleichung (43) ist aber mit (39) identisch, denn wir h

$$R(q) = \sqrt{\frac{c}{M(a, b)}} = \sqrt{\varkappa}\sqrt{\frac{2K}{\pi}},$$

die Grösse $[q]$ ist also in der Umgebung von $q = 0$ nach positiven ganzen Potenzen von q entwickelbar; sei

$$[q] = \delta_1 q + \delta_2 q^2 + \delta_3 q^3 + \cdots.$$

Dann haben wir also

$$R(q) = 2q^{\frac{1}{4}}(1 + \delta_1 q + \delta_2 q^2 + \delta_3 q^3 + \cdots)$$

und folglich nach (37), (37a)

$$P(q) = 1 + 2q\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu q^{4\nu}\right) + 2q^4\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu q^{16\nu}\right) + \cdots,$$

$$Q(q) = 1 - 2q\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu q^{4\nu}\right) + 2q^4\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu q^{16\nu}\right) + \cdots.$$

Setzen wir diese Entwickelungen in die Relation (38) ein, so ergeben sich durch Vergleichung der Coefficienten gleich hoher Potenzen von q auf beiden Seiten Recursionsformeln für die δ_ν, aus welchen man diese Grössen berechnen kann. Für die ersten dieser Grössen findet man leicht

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = 1, \quad \delta_3 = 0, \quad \delta_4 = 0, \quad \delta_5 = 0, \quad \delta_6 = 1,$$

also haben wir die Entwickelungen

$$R(q) = 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{5^2}{4}} + \cdots,$$

$$P(q) = 1 + 2q + 2q^{2^2} + 2q^{3^2} + \cdots,$$

$$Q(q) = 1 - 2q + 2q^{2^2} - 2q^{3^2} + \cdots.$$

266. Ansatz für die Entwickelungen der Functionen P, R, Q. Sätze über die Darstellung einer Zahl als Summe von vier Quadraten. Die biquadratische Relation zwischen den $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$.

Es scheint ziemlich schwierig, aus den in der vorigen Nummer angedeuteten Recursionsformeln das allgemeine Gesetz für die Coefficienten δ_ν abzuleiten. Wir wollen darum einen indirecten Weg einschlagen, indem wir nach dem Gesetze, welches sich aus den ersten hingeschriebenen Gliedern leicht errathen lässt, die Reihen bilden, und für diese dann die Gleichung (38) und die übrigen Gleichungen des arithmetisch-geometrischen Mittels verificiren.

Wir setzen also

(44)
$$\begin{cases} \overline{P}(q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2}, \\ \overline{Q}(q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2}, \\ \overline{R}(q) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}, \end{cases}$$

und versuchen zunächst die Gleichung (38) (Nr. 265, S. 20) zwischen diesen drei Entwickelungen (die für Werthe von q, deren absoluter Betrag kleiner ist wie Eins, offenbar convergent sind) zu verificiren.

Es ist
$$\overline{P}^4(q) = \sum_{(n_1, n_2, n_3, n_4)} q^{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2},$$
$$\overline{Q}^4(q) = \sum_{(n_1, n_2, n_3, n_4)} (-1)^{n_1+n_2+n_3+n_4} q^{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2},$$

wo sich die Summenzeichen auf die vier ganzen Zahlen n_1, n_2, n_3, n_4 beziehen, welche unabhängig von einander alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen. Wir haben folglich

(45)
$$\begin{cases} \overline{P}^4 - \overline{Q}^4 = 2\sum_{(n_1, n_2, n_3, n_4)} q^{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2}, \\ n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Wenn die Summe von vier Zahlen ungerade ist, so ist auch die Summe ihrer Quadrate ungerade, also haben wir in der letzten Summe allemal
$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 \equiv 1 \pmod 2,$$
d. h. die Exponenten sind stets ungerade Zahlen.

Wenn eine ungerade Zahl als Summe von vier Quadraten dargestellt ist, so sind unter den vier Quadratzahlen entweder eine ungerade und drei gerade oder eine gerade und drei ungerade. Im ersteren Falle ist die Zahl
$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 \equiv 1 \pmod 4,$$
im letzteren dagegen
$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 \equiv 3 \pmod 4.$$

Betrachten wir ferner

(46)
$$\overline{R}^4(q) = \sum_{(n_1, n_2, n_3, n_4)} q^{\frac{1}{4}\left((2n_1+1)^2 + (2n_2+1)^2 + (2n_3+1)^2 + (2n_4+1)^2\right)};$$

Exponent von q ist hier stets eine ganze und zwar offenbar eine gerade Zahl. Um nun die rechten Seiten der Gleichungen (45), (46) einander zu vergleichen, müssen wir einen Satz kennen lernen, der e Beziehung zwischen der Anzahl der Zerlegungen einer ungeraden hl in eine Summe von vier Quadraten und der Anzahl der Zerungen des Vierfachen dieser Zahl in eine Summe von vier ungeraden uadraten ausspricht.

Wir beweisen zunächst allgemein, dass das Product zweier Summen on vier Quadraten selbst eine Summe von vier Quadraten ist.

Seien $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ reale ganze Zahlen und setzen wir

$$l = a + bi, \quad m = c + di, \quad l' = a - bi, \quad m' = c - di,$$
$$\lambda = \alpha + \beta i, \quad \mu = \gamma + \delta i, \quad \lambda' = \alpha - \beta i, \quad \mu' = \gamma - \delta i,$$

so ist, wie man leicht verificirt,

$$(ll' + mm')(\lambda\lambda' + \mu\mu') = |l\lambda + m\mu|^2 + |l\mu' - ml'|^2,$$

also wenn wir die Werthe einsetzen, wie behauptet wurde,

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = (a\alpha - b\beta + c\gamma - d\delta)^2 + (b\alpha + a\beta + d\gamma + c\delta)^2 + (a\gamma + b\delta - c\alpha - d\beta)^2 + (b\gamma - a\delta - d\alpha + c\beta)^2.$$

Nehmen wir nun

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 1,$$

so finden wir

$$(47) \quad 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (a + b + c - d)^2 + (b - a + d + c)^2 + (a + b - c + d)^2 + (-b + a + d + c)^2,$$

und wenn wir z. B. $-a$ an die Stelle von a setzen,

$$(47\text{a}) \quad 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (b + c - d - a)^2 + (a + b + c + d)^2 + (b + d - a - c)^2 + (d + c - a - b)^2;$$

die anderen Vertauschungen der a, b, c, d mit ihren negativen Werthen ergeben nichts Neues.

Also entsprechen jeder Zerlegung einer Zahl s in eine Summe von vier Quadraten zwei ebensolche Zerlegungen des Vierfachen von s, und zwar ist für ein ungerades s in beiden Zerlegungen von $4s$ jedes der Quadrate eine ungerade Zahl.

Hat man umgekehrt $4s$ dargestellt als Summe von vier ungeraden Quadraten

$$4s = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2,$$

so setzen wir, wenn

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 2 \pmod 4)$$

ist, entsprechend der Zerlegung (47),

$$\begin{aligned} -a+b+c+d &= u_1, \\ a-b+c+d &= u_2, \\ a+b-c+d &= u_3, \\ a+b+c-d &= u_4, \end{aligned}$$

und wenn

$$u_1+u_2+u_3+u_4 \equiv 0 \pmod 4$$

ist, entsprechend der Zerlegung (47a),

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= u_1, \\ a+b-c-d &= u_2, \\ a-b+c-d &= u_3, \\ a-b-c+d &= u_4, \end{aligned}$$

dann ergeben sich beide Mal die a, b, c, d als ganze Zahlen, so dass also auch jeder Zerlegung von $4s$ in eine Summe von vier ungeraden Quadraten eine Zerlegung von s in eine Summe von vier Quadraten entspricht. Wir erhalten also den Satz:

Wenn die ungerade Zahl s den Rest 1 modulo 4 lässt, so entsprechen den Darstellungen von $4s$ als Summe von vier ungeraden Quadraten halb so viele Darstellungen von s als Summe von einem ungeraden und drei geraden Quadraten und umgekehrt, den Darstellungen von s in dieser Form doppelt so viele von $4s$ als Summe von vier ungeraden Quadraten.

Wenn die ungerade Zahl s den Rest 3 modulo 4 lässt, so entsprechen den Darstellungen von $4s$ als Summe von vier ungeraden Quadraten halb so viele Darstellungen von s als Summe von drei ungeraden und einem geraden Quadrate, und umgekehrt.

Daraus folgt, dass jede Zahl von der Form

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2, \quad n_1+n_2+n_3+n_4 \equiv 1 \pmod 2)$$

zwei Mal vorkommt unter den Zahlen der Form

$$\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{4}(2m_\nu+1)^2,$$

und dass jede Zahl von der letzteren Form einmal unter den Zahlen der ersteren Form enthalten ist. Es ist also in der That

$$\overline{P}^4 - \overline{Q}^4 = \overline{R}^4.$$

267. Einführung der Jacobi'schen Bezeichnung. Darstellung aller in der Untersuchung vorkommenden Grössen durch die Thetafunctionen. Formulirung des nun zu lösenden Problems.

Wir gehen nun an die Verification der Gleichungen (31) (Nr. 264, S. 16), die wir zunächst in Relationen für die

$$P(q_n) = \sqrt{\frac{a_n}{M(a_n, b_n)}}, \quad Q(q_n) = \sqrt{\frac{b_n}{M(a_n, b_n)}}, \quad R(q_n) = \sqrt{\frac{c_n}{M(a_n, b_n)}}$$

umgesetzt in der Form

$$(31\,\mathrm{a}) \qquad \begin{cases} 2\,P(q_{n+2}) = P(q_n) + Q(q_n), \\ 2\,R(q_{n+2}) = P(q_n) - Q(q_n) \end{cases}$$

schreiben. Von diesen Gleichungen ist nun zu zeigen, dass sie durch die Reihenentwickelungen (44) (S. 24) identisch befriedigt werden.

Für die Entwickelungen (44) haben wir

$$\overline{P}(q) + \overline{Q}(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (q^{n^2} + (-1)^n q^{n^2})$$

$$= 2\sum_n q^{(2n)^2} = 2\sum_n (q^4)^{n^2},$$

also besteht die Gleichung

$$(48) \qquad \overline{P}(q) + \overline{Q}(q) = 2\,\overline{P}(q^4);$$

analog ergiebt sich

$$(48\,\mathrm{a}) \qquad \overline{P}(q) - \overline{Q}(q) = 2\,\overline{R}(q^4).$$

Nun ist aber

$$q_n = q^{2^n}, \quad q_{n+2} = q^{2^{n+2}} = q_n^4,$$

die Gleichungen (48), (48a) sind also mit den Gleichungen (31a) identisch.

Setzen wir jetzt für die Quadrate der durch die Entwickelungen (44) definirten Grössen

$$\overline{P}^2(q) = \mathfrak{a}, \quad \overline{Q}^2(q) = \mathfrak{b}, \quad \overline{R}^2(q) = \mathfrak{c}$$

und bilden mit diesen drei Grössen, die ja die Relation

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2$$

befriedigen, einen Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels

$$\mathfrak{a}_n, \ \mathfrak{b}_n, \ \mathfrak{c}_n \qquad (n = 1, 2, 3 \cdots),$$

so haben wir zufolge der Gleichungen (48), (48a)

$$\overline{P}^2(q_{2n}) = \mathfrak{a}_{2n}, \quad \overline{Q}^2(q_{2n}) = \mathfrak{b}_{2n}, \quad \overline{R}^2(q_{2n}) = \mathfrak{c}_{2n}.$$

Also ist

(49) $$M(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \lim_{n} \mathfrak{a}_{2n} = \lim_{n} \overline{P}^2(q_{2n}) = \lim_{q=0} \overline{P}^2(q) = 1.$$

Ferner ist nach den Gesetzen des arithmetisch-geometrischen Mittels (vergl. Nr. 264, S. 17 ff.)

$$\frac{\pi}{2}\frac{M(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})}{M(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})} = \lim_{n} \log \left\{\frac{4\mathfrak{a}_{2n}}{\mathfrak{c}_{2n}}\right\}^{\frac{1}{2^{2n}}};$$

setzen wir hierin für $\mathfrak{a}_{2n}$, $\mathfrak{c}_{2n}$ ihre Entwickelungen ein, so erhalten wir

$$\frac{4\mathfrak{a}_{2n}}{\mathfrak{c}_{2n}} = \frac{(1 + 2q_{2n} + 2q_{2n}^4 + \cdots)^2}{\sqrt{q_{2n}}(1 + q_{2n}^2 + q_{2n}^{2\cdot 3} + \cdots)^2},$$

und wenn wir auf beiden Seiten die $(2^{2n})^{\text{te}}$ Wurzel ziehen,

$$\left(\frac{4\mathfrak{a}_{2n}}{\mathfrak{c}_{2n}}\right)^{\frac{1}{2^{2n}}} = q^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{1 + 2q_{2n} + \cdots}{1 + q_{2n}^2 + \cdots}\right\}^{\frac{1}{2^{2n-1}}},$$

also ergiebt sich als Grenzwerth des Logarithmus für unendlich wachsendes n

(50) $$\frac{\pi}{2}\frac{M(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})}{M(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})} = \log q^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\log q.$$

Sei nun $\mathfrak{q}$ irgend eine noch zu bestimmende Grösse, deren absoluter Betrag kleiner ist wie Eins, und setzen wir

$$a = \varrho \overline{P}^2(\mathfrak{q}), \quad b = \varrho \overline{Q}^2(\mathfrak{q}),$$

wo ϱ eine ebenfalls zu bestimmende Grösse bedeutet, so ist

$$c = \varrho \overline{R}^2(\mathfrak{q}),$$

und wir haben mit Rücksicht auf (49)

$$M(a, b) = \varrho M(\overline{P}^2(\mathfrak{q}), \overline{Q}^2(\mathfrak{q})) = \varrho,$$

$$M(a, c) = \varrho M(\overline{P}^2(\mathfrak{q}), \overline{R}^2(\mathfrak{q})).$$

Da aber nach (50)

$$-\frac{M(\overline{P}^2(\mathfrak{q}), \overline{Q}^2(\mathfrak{q}))}{M(P^2(\mathfrak{q}), \overline{R}^2(\mathfrak{q}))} = \frac{\log \mathfrak{q}}{\pi}$$

und andererseits

$$-\frac{M(a, b)}{M(a, c)} = \frac{\log q}{\pi}$$

ist, so ist $\mathfrak{q}$ mit q identisch, d. h. wir haben

$$\sqrt{\frac{a}{M(a, b)}} = \overline{P}(q), \quad \sqrt{\frac{b}{M(a, b)}} = \overline{Q}(q), \quad \sqrt{\frac{c}{M(a, b)}} = \overline{R}(q),$$

und damit sind die Entwickelungen (44) verificirt, d. h. es ist gezeigt, dass

$$P(q) = \overline{P}(q), \quad Q(q) = \overline{Q}(q), \quad R(q) = \overline{R}(q)$$

sein muss.

Wir führen nun die in der Theorie der elliptischen Functionen gebräuchlichen Zeichen ein. Setzen wir

$$\tau = i\frac{M(a, b)}{M(a, c)} = \frac{1}{\pi i}\log q = \frac{K'i}{K},$$

so dass also

$$q = e^{\tau\pi i}$$

ist, so ist τ eine imaginäre Grösse mit positivem Coefficienten von i. Man bezeichnet dann nach Jacobi

$$P(q) = \vartheta_3(\tau), \quad Q(q) = \vartheta(\tau), \quad R(q) = \vartheta_2(\tau)$$

und hat folglich für diese drei Thetafunctionen die Entwickelungen

$$\vartheta_3(\tau) = 1 + 2e^{\tau\pi i} + 2e^{4\tau\pi i} + \cdots,$$

$$\vartheta(\tau) = 1 - 2e^{\tau\pi i} + 2e^{4\tau\pi i} - \cdots,$$

$$\vartheta_2(\tau) = 2e^{\frac{\tau\pi i}{4}}(1 + e^{2\tau\pi i} + e^{2\cdot 3\tau\pi i} + \cdots).$$

Das Ergebniss der durchgeführten Untersuchung lässt sich dann wie folgt aussprechen:

Sind a, b, c drei reale positive, durch die Gleichung

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad a > b,$$

mit einander verknüpfte Grössen, und bestimmt man eine Grösse τ durch die Gleichung

$$\tau = i\frac{M(a, b)}{M(a, c)},$$

so stellen sich die a, b, c durch die Formeln

(I) $a = M(a, b)\vartheta_3^2(\tau), \quad b = M(a, b)\vartheta^2(\tau), \quad c = M(a, b)\vartheta_2^2(\tau)$

dar.

Wir ziehen hieraus noch einige Consequenzen, indem wir zuvörderst

$$a = \bar{\varrho}\vartheta_3^2(\sigma), \quad c = \bar{\varrho}\vartheta^2(\sigma), \quad b = \bar{\varrho}\vartheta_2^2(\sigma)$$

setzen und die $\bar{\varrho}$, σ zu bestimmen suchen. Es ergiebt sich

$$M(a, c) = \bar{\varrho}M(\vartheta_3^2(\sigma), \vartheta^2(\sigma)) = \bar{\varrho},$$

$$\sigma = i\frac{M(a, c)}{M(a, b)} = \frac{-1}{\tau},$$

wir können also den Formeln (I) die Gleichungen

(II) $a = M(a,c)\vartheta_3^2\left(\frac{-1}{\tau}\right), \; b = M(a,c)\vartheta_2^2\left(\frac{-1}{\tau}\right), \; c = M(a,c)\vartheta^2\left(\frac{-1}{\tau}\right)$

an die Seite stellen.

Ferner ist

$a_n = M(a_n, b_n)\vartheta_3^2(\tau_n)$, $b_n = M(a_n, b_n)\vartheta^2(\tau_n)$, $c_n = M(a_n, b_n)\vartheta_2^2$

wo τ_n durch die Gleichung

$$\tau_n = i\,\frac{M(a_n, b_n)}{M(a_n, c_n)}$$

definirt wird. Wir haben also

$$\tau_n = i\cdot 2^n\,\frac{M(a, b)}{M(a, c)} = 2^n\tau = \frac{1}{\pi i}\log q_n,$$

und somit sind die nach dem Früheren nur für geradzahlige W von n abgeleiteten Beziehungen

(III) $a_n = M(a,b)\vartheta_3^2(2^n\tau)$, $b_n = M(a,b)\vartheta^2(2^n\tau)$, $c_n = M(a,b)\vartheta_2^2$

für beliebige ganzzahlige Werthe von n erwiesen. Nach den Ges des arithmetisch-geometrischen Mittels bestehen folglich die Th relationen:

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} 2\vartheta_3^2(2\tau) = \vartheta_3^2(\tau) + \vartheta^2(\tau), \\ \vartheta^2(2\tau) = \vartheta_3(\tau)\vartheta(\tau). \end{cases}$$

Für die Grössen $\varkappa$, K, K' liefern die abgeleiteten Formeln Rücksicht auf die Gleichungen (24) (Nr. 263, S. 11) die folg Ausdrücke. Setzt man

$$\text{(V)}\qquad \tau = \frac{K'i}{K},$$

so ist

$$\text{(VI)}\qquad \varkappa = \frac{\vartheta_2^2(\tau)}{\vartheta_3^2(\tau)},\quad \varkappa' = \sqrt{1-\varkappa^2} = \frac{\vartheta^2(\tau)}{\vartheta_3^2(\tau)},$$

$$\text{(VII)}\qquad \frac{2K}{\pi} = \vartheta_3^2(\tau),\quad \frac{2K'}{\pi} = \vartheta_3^2\left(-\frac{1}{\tau}\right);$$

diese Entwickelungen gelten aber vorläufig nur für reale po Werthe von $\varkappa$ und $\varkappa'$.

Nach einem bekannten Principe der Functionenlehre könner aber sofort schliessen, dass die für den so beschränkten Bereicl geleiteten Beziehungen solange gültig bleiben, als die in denselben tretenden Reihenentwickelungen convergent sind. Dies ist offenba Fall, wenn τ eine complexe Grösse bedeutet, deren Coefficient einen wesentlich positiven Werth hat.

Die Entwickelungen (VI) gelten also für diejen Werthe von $\varkappa$, für welche die durch die Gleichung (V) finirte Grösse τ einen positiven Coefficienten von i bes Für diese Werthe sind dann $\varkappa$ und $\varkappa'$ als eindeutige F tionen von τ, d. h. als eindeutige Functionen des Quotie zweier Fundamentallösungen der Legendre'schen Differen gleichung (L) dargestellt.

Es entsteht nun die Frage nach dem Werthebereich von x beziehungsweise von $z = x^2$, für welchen die Bedingung erfüllt ist, dass die Grösse τ einen positiven Coefficienten von i besitzt; es wird sich zeigen, dass dieser Bereich die ganze complexe z-Ebene mit Ausnahme der singulären Stellen 0, 1, ∞ umfasst.

Die Richtigkeit dieses überaus wichtigen Satzes kann auf mannigfaltige Weise erwiesen werden. Riemann hat für denselben einen (den allgemeinen Fall eines beliebigen algebraischen Gebildes umfassenden) Beweis geliefert, der direct von der Darstellung von K und K' durch die bestimmten Integrale ausgeht. Einen anderen Beweis hat Herr Fuchs gegeben, indem er von der Differentialgleichung (L) ausgeht. Wir werden im Wesentlichen der von Herrn Fuchs vorgezeichneten Methode folgen, wollen aber, ehe wir auf die Darlegung derselben eingehen, zeigen, welche Folgerungen sich aus dem in Rede stehenden Satze ziehen lassen.

Nehmen wir also an, es sei gezeigt, dass für jeden Werth von z (mit Ausnahme von 0, 1, ∞), also auch für jeden Werth von x, der Coefficient von i in τ wesentlich positiv ist.

Dann folgt aus der Darstellung (VI), dass x sowohl wie x' und folglich auch z eindeutige Functionen des Integralquotienten τ der linearen Differentialgleichung (L) sind (vergl. Nr. 260, S. 2). Ebenso sind nach (VII) auch die Integrale K, K' von (L) selbst eindeutige Functionen von τ. Ferner würden die Gleichungen (I) bis (IV) lehren, dass der direct nur für reale positive a, b, c aufgestellte Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels für beliebige complexe Werthe dieser Grössen unverändert besteht, sofern man das Vorzeichen der Quadratwurzeln, durch welche die b_n, c_n bestimmt werden, den Gleichungen (I) und (III) gemäss einrichtet. Es lassen sich dann aus den Gesetzen des arithmetisch-geometrischen Mittels alle Eigenschaften der Function x von τ in äusserst eleganter und einfacher Weise ableiten, wir kommen hierauf an spätererer Stelle zurück.

Jetzt knüpfen wir an die Thatsache an, dass sich uns in der Differentialgleichung (L) ein besonderer Fall einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und insbesondere der Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe darbietet, in welchem die unabhängige Variable eine eindeutige Function des Integralquotienten ist, und stellen uns demgemäss die Aufgabe:

Diejenigen Fälle der Differentialgleichung der Gaussschen Reihe anzugeben, in denen die unabhängige Variable als eine eindeutige Function des Integralquotienten erscheint.

Drittes Kapitel.

268. **Die Gauss'sche Differentialgleichung in der canonischen Form und für reale Werthe der Differenzen der Wurzeln der determinirenden Gleichungen. Abbildung durch den Integralquotienten bei specieller Wahl der Querschnitte.**

Die am Schlusse der vorigen Nummer formulirte Aufgabe wurde zuerst von Herrn Schwarz gelöst bei Gelegenheit einer Untersuchung derjenigen Fälle, in denen die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ eine algebraische Function von z darstellt. Indem wir jetzt zu einer Darlegung der von Herrn Schwarz erlangten Resultate übergehen, greifen wir auf die allgemeinen Ueberlegungen des elften Abschnittes (Nrn. 196 ff.) zurück.

Wir denken uns zunächst die Differentialgleichung (G) (Nr. 70, Bd. I, S. 252) auf die canonische Form gebracht, indem wir (vergl. Nr. 172, Bd. II, 1, S. 147) für

$$p_1 = \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)z}{z(1-z)}, \quad p_2 = \frac{-\alpha\beta}{z(1-z)}$$

den invarianten Ausdruck

$$q(z) = \frac{1}{4} p_1^2 + \frac{1}{2} p_1'(z) - p_2$$

bilden. Setzen wir

(1) $$(1-\gamma)^2 = \delta_1^2, \quad (\gamma - \alpha - \beta)^2 = \delta_2^2, \quad (\alpha - \beta)^2 = \delta_3^2,$$

so sind $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ die Differenzen der Wurzeln der zu den singulären Punkten

$$z = 0, 1, \infty$$

gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen; wir denken uns die Quadratwurzeln aus den Ausdrücken (1) so gewählt, dass die realen Theile der $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ nicht negativ sind.

Dann lautet die canonische Form der Differentialgleichung (G)

(2) $$\frac{d^2 w}{dz^2} = q(z) w,$$

wo

(3) $$q(z) = \frac{1}{4}\left\{\frac{\delta_1^2 - 1}{z^2} + \frac{\delta_2^2 - 1}{(1-z)^2} + \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_3^2 - 1}{z(1-z)}\right\},$$

(4) $$w = u \cdot z^{\frac{\gamma}{2}} (1 - z)^{\frac{(\alpha + \beta + 1) - \gamma}{2}},$$

zu nehmen ist, und der Quotient

$$\eta(z) = \frac{v_2}{v_1}$$

eines Fundamentalsystems v_1, v_2 von (2) genügt der Differentialgleichung dritter Ordnung

(5) $$\Delta\binom{\eta}{z} = q(z),$$

deren allgemeines Integral in der Form

(6) $$\frac{\alpha\,\eta(z) + \beta}{\gamma\,\eta(z) + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

enthalten ist.

Wenn z eine eindeutige Function von η sein soll, so müssen nach den Ergebnissen der Nr. 197 (Bd. II, 1, S. 256) die Grössen δ_1, δ_2, δ_3 entweder gleich reciproken ganzen Zahlen oder gleich Null gewählt werden. Nehmen wir allgemeiner δ_1, δ_2, δ_3 real positiv und kleiner als Eins, so ist die Differentialgleichung (2) mit der in der Nr. 216 (Bd. II, 1, S. 343 ff.) aufgestellten für $\sigma = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ identisch, die Function z von η hat also nach den daselbst erlangten Ergebnissen die folgenden Eigenschaften.

Legen wir von $z = 0$ und $z = 1$ aus Querschnitte l_1, l_2 nach dem Unendlichen, so ist die so zerschnittene z-Ebene $\overline{T}$ die eindeutig conforme Abbildung eines Fundamentalbereiches F_0 der η-Ebene, welcher die vier Ecken

$$\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2, \lambda_3'$$

und in den von diesen gebildeten Cykeln

$$\lambda_1, \lambda_2, (\lambda_3, \lambda_3')$$

die Winkelsummen

$$2\pi\delta_1, \quad 2\pi\delta_2, \quad 2\pi\delta_3$$

besitzt. Dabei sind die λ_1, λ_2, λ_3 als Doppelpunkte der Substitutionen

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3 = A_1^{-1} A_2^{-1}$$

bestimmt, die η erfährt, wenn z beziehungsweise einfache positive Umläufe um die Punkte 0, 1, ∞ ausführt, und welche die Seitenpaare von F_0

$$s_1 = (\lambda_1, \lambda_3), \qquad s_1' = (\lambda_1, \lambda_3'),$$
$$s_2 = (\lambda_3', \lambda_2), \qquad s_2' = (\lambda_3, \lambda_2)$$

in der durch die Gleichungen

$$s_1' = A_1 s_1, \quad s_2' = A_2 s_2$$

angedeuteten Weise in einander überführen.

Die Gestalt jener Seitenpaare hängt wesentlich von der Gestalt der in der z-Ebene gelegten Querschnitte l_1, l_2 ab. Wir wollen diesen Querschnitten selbst eine besondere Form beilegen, wodurch die Seiten von F_0 eine besonders einfache Gestalt erhalten.

Wir denken uns nämlich den Querschnitt l_1 längs der negativen realen z-Axe, den Querschnitt l_2 längs der positiven realen z-Axe von 0 beziehungsweise 1 nach $z = \infty$ hin gelegt, so dass also ein in der zerschnittenen z-Ebene $\overline{T}$ verlaufender Weg, der von der oberen z-Halbebene (wo der Coefficient von i in z positiv ist) in die untere z-Halbebene (wo der Coefficient von i in z negativ ist) führt oder umgekehrt, die reale z-Axe zwischen 0 und 1 überschreiten muss. Es handelt sich dann darum, die η-Werthe zu bestimmen, die den Punkten z auf beiden Ufern von l_1, l_2 entsprechen.

Zerlegen wir z und η in ihre realen und imaginären Theile

$$z = x + yi, \quad \eta(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

wo also $u(x, y)$, $v(x, y)$ reale Functionen der realen Variabelen x, y bedeuten, so ist der conjugirte complexe Werth von $\eta(z)$

$$\overline{\eta(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$$

eine monogene Function von

$$\bar{z} = x - yi,$$

und man hat, wenn wir allgemein durch einen Ueberstrich die conjugirte einer complexen Grösse andeuten,

$$\frac{d^{\varkappa}\overline{\eta(z)}}{d\bar{z}^{\varkappa}} = \overline{\left(\frac{d^{\varkappa}\eta(z)}{dz^{\varkappa}}\right)} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \cdots).$$

Also ist auch

$$\Delta\binom{\bar{\eta}}{\bar{z}} = \overline{\Delta\binom{\eta}{z}} = \overline{q(z)},$$

oder da $q(z)$ reale Coefficienten hat, und folglich

$$\overline{q(z)} = q(\bar{z})$$

ist,

$$\Delta\binom{\bar{\eta}}{\bar{z}} = q(\bar{z}).$$

Die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\Delta\binom{\zeta}{\bar{z}} = q(\bar{z})$$

besitzt also die beiden particularen Integrale

$$\overline{\eta(z)} = u(x, y) - iv(x, y),$$

$$\eta(\bar{z}) = u(x, -y) + iv(x, -y),$$

und es besteht folglich zwischen diesen beiden Grössen die Beziehung

$$(7) \qquad \eta(\bar{z}) = \frac{\alpha\,\overline{\eta(z)} + \beta}{\gamma\,\overline{\eta(z)} + \delta},$$

wo α, β, γ, δ Constanten bedeuten, für die

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ist.

Wenn wir also von dem Punkte $x + yi$ der z-Ebene z. B. auf einem in der zerschnittenen z-Ebene $\overline{T}$ verlaufenden Wege zu dem Punkte $x - yi$ gehen, so erhalten wir daselbst einen Werth von η, der aus dem conjugirten Werthe von $\eta(x + yi)$ durch die projective Substitution (7) hervorgeht. Dabei bleibt diese Substitution offenbar dieselbe, wo auch der Punkt $x + yi$ angenommen werden mag, wenn nur der Weg von $x + yi$ zu dem Punkte $x - yi$ in der zerschnittenen Fläche $\overline{T}$ ausgeführt wird. Es ist also auch

$$\eta(z) = \frac{\alpha\,\overline{\eta(\bar{z})} + \beta}{\gamma\,\overline{\eta(\bar{z})} + \delta} = \frac{\alpha[u(x, -y) - i\,v(x, -y)] + \beta}{\gamma[u(x, -y) - i\,v(x, -y)] + \delta},$$

und wenn wir auf beiden Seiten dieser Gleichung i in $-i$ verwandeln,

$$(8) \qquad \overline{\eta(z)} = \frac{\bar{\alpha}[u(x, -y) + i\,v(x, -y)] + \bar{\beta}}{\bar{\gamma}[u(x, -y) + i\,v(x, -y)] + \bar{\delta}} = \frac{\bar{\alpha}\,\eta(\bar{z}) + \bar{\beta}}{\bar{\gamma}\,\eta(\bar{z}) + \bar{\delta}}.$$

Vergleichen wir die Gleichungen (7), (8) mit einander, so schliessen wir, dass

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & \bar{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

sein muss, d. h. es ist

$$(9) \qquad \begin{cases} \bar{\alpha}\alpha + \bar{\beta}\gamma = 1, & \bar{\alpha}\beta + \bar{\beta}\delta = 0, \\ \bar{\gamma}\alpha + \bar{\delta}\gamma = 0, & \bar{\gamma}\beta + \bar{\delta}\delta = 1, \end{cases}$$

und hieraus folgt, wenn wir z. B. γ von Null verschieden voraussetzen,

$$\frac{\bar{\delta}}{\bar{\gamma}} = -\frac{\alpha}{\gamma}, \qquad \frac{\bar{\beta}}{\bar{\gamma}} = \frac{\beta}{\gamma},$$

$$\frac{\alpha\delta}{\gamma^2} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{-1}{\gamma\bar{\gamma}} < 0.$$

Setzen wir also

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{a_0}{c_0}, \qquad \frac{\beta}{\gamma} = -\frac{b_0}{c_0},$$

so ist b_0 real, wenn wir c_0 real wählen und

$$\frac{\alpha}{\gamma} = -\frac{\bar{a}_0}{c_0}, \qquad -a_0\bar{a}_0 + b_0 c_0 < 0;$$

die Substitution (7) hat demnach die Form

(10) $$\eta(\bar{z}) = \frac{-\bar{a}_0\overline{\eta(z)} - b_0}{c_0\overline{\eta(z)} + a_0} = B_0\overline{\eta(z)}.$$

Für Werthe von z auf dem zwischen 0 und 1 gelegenen Theile der realen Axe von $\overline{T}$ ist folglich

$$\eta(x) = \frac{-\bar{a}_0\overline{\eta(x)} - b_0}{c_0\overline{\eta(x)} + a_0}, \qquad (0 < x < 1),$$

d. h. die diesen z-Werthen entsprechenden η-Werthe befriedigen die Gleichung

(11) $$c_0\eta\bar{\eta} + a_0\eta + \bar{a}_0\bar{\eta} + b_0 = 0,$$

die einen Kreis s_0 und zwar, da

$$-a_0\bar{a}_0 + b_0c_0 < 0$$

ist, einen realen Kreis der η-Ebene darstellt. Wir wollen c_0 so wählen, dass

$$-a_0\bar{a}_0 + b_0c_0 = -1$$

sei.

269. Kreisbogenvierecke. Symmetrie in Bezug auf die Diagonale. Spiegelungen.

Wenn wir von einem z-Punkte in $\overline{T}$ ausgehend einen der Querschnitte l_1, l_2 in positiver oder negativer Richtung überschreiten, so gelangen wir im Sinne der in Nr. 210 (Bd. II, 1, S. 312 ff.) eingeführten Vorstellungs- und Bezeichnungsweise in die Blätter

$$\overline{T}_1,\ \overline{T}_2,\ \overline{T}_{-1},\ \overline{T}_{-2},$$

die den Zweigen

$$\eta_\varkappa(z) = A_\varkappa\eta(z), \quad \eta_{-\varkappa}(z) = A_{-\varkappa}\eta(z), \quad (A_{-\varkappa} = A_\varkappa^{-1})$$
$$(\varkappa = 1, 2)$$

des Integralquotienten η entsprechen, und deren eindeutig conforme Abbildungen auf die η-Ebene durch die Bereiche

$$F_1,\ F_2,\ F_{-1},\ F_{-2}$$

geliefert werden.

Gehen wir im Blatte $\overline{T}_\varkappa$ von einem Punkte z zu seinem conjugirten $\bar{z}$, also so, dass wir die reale Axe zwischen 0 und 1 überschreiten, so gelangen wir in der η-Ebene vom Punkte $\eta_\varkappa(z)$ zu dem Punkte

(12) $$\eta_\varkappa(\bar{z}) = A_\varkappa B_0 \bar{A}_\varkappa^{-1}\overline{\eta_\varkappa(z)} \qquad (\varkappa = +1, +2, -1, -2),$$

wenn wir mit $\bar{A}_\varkappa$ diejenige Substitution bezeichnen, die aus $A_\varkappa$ dadurch entsteht, dass wir in den Coefficienten von $A_\varkappa$ an die Stelle von $+i$ setzen $-i$.

Aus (12) folgt, dass für Werthe x von z, die zwischen 0 und 1 auf der realen Axe des Blattes $\overline{T}_x$ liegen, die entsprechenden η-Werthe die Gleichung

(13) $$\eta = A_x B_0 \overline{A}_x^{-1} \overline{\eta}$$

befriedigen, die offenbar einen Kreis darstellt, der nichts anderes ist, wie die Abbildung des Kreises s_0 durch die lineare Function $A_x \eta$.

Ferner haben wir nach (10) oder (12)

(14) $$\eta_x(\bar{z}) = A_x \eta(\bar{z}) = A_x B_0 \overline{\eta(z)},$$

d. h. wenn wir von einem Punkte z von $\overline{T}$ ausgehend, den Querschnitt $l_{|x|}$ von demjenigen Ufer aus überschreiten, längs welchem die Flächen $\overline{T}$ und $\overline{T}_x$ mit einander zusammenhängen, und dann zu dem conjugirten Punkte $\bar{z}$ von $\overline{T}_x$ hingehen, so gelangen wir von $\eta(z)$ aus zu dem durch die Gleichung (14) dargestellten Punkte der η-Ebene.

Die Gleichung (14) liefert eine Beziehung zwischen den beiden monogenen Functionen

$$\overline{\eta(z)} \quad \text{und} \quad \eta_x(\bar{z})$$

der complexen Variabeln $\bar{z}$; diese Beziehung muss folglich nach einem bekannten Principe der Functionentheorie auch zwischen allen Fortsetzungen dieser beiden Functionen bestehen. Es ist demnach auch

(14a) $$\eta(z) = A_x B_0 \overline{\eta_x(\bar{z})}.$$

Beachten wir nun, dass B_0 mit der Substitution $\overline{B}_0$, die aus B_0 hervorgeht, indem wir in jedem Coefficienten von B_0 $+i$ in $-i$ verwandeln, durch die Gleichung

$$\overline{B}_0 = B_0^{-1}$$

verbunden ist, so ergiebt sich, wenn wir in der Gleichung (14a) an die Stelle von $+i$ setzen $-i$:

(15) $$\overline{\eta(z)} = \overline{A}_x B_0^{-1} \eta_x(\bar{z}).$$

Aus den beiden Gleichungen (14), (15) ergiebt sich nunmehr

(16) $$A_x B_0 \overline{A}_x B_0^{-1} = 1.$$

Betrachten wir einen Punkt x, der auf dem den Blättern $\overline{T}$ und $\overline{T}_x$ gemeinsamen Ufer des Querschnittes $l_{|x|}$ liegt, so ist für denselben

$$\eta(x) = \eta_x(x);$$

die diesen Punkten x entsprechenden η-Werthe befriedigen folglich die Gleichung

(17) $$\eta = A_x B_0 \overline{\eta},$$

und diese stellt zufolge der Gleichung (16) und da die Determinante der Substitution

$$A_\varkappa B_0$$

den Werth -1 hat, einen realen Kreis der η-Ebene dar. Es ist folglich der Kreis

$$(18) \qquad \eta = A_\varkappa B_0 \bar{\eta} \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

nichts anderes, wie die Seite $s_\varkappa'$ von F_0, und ebenso ist der Kreis

$$(19) \qquad \eta = A_{-\varkappa} B_0 \bar{\eta} \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

die Seite $s_\varkappa$; in der That verwandelt sich der Kreis (19) durch Abbildung mittelst der linearen Function $A_\varkappa \eta$ in den Kreis (18), wie man mit Rücksicht auf die aus (16) folgende Gleichung

$$B_0 \bar{A}_\varkappa = A_\varkappa^{-1} B_0$$

sofort erkennt.

Wenn wir also die Querschnitte l_1, l_2 längs der realen z-Axe legen, so sind die Seiten des Fundamentalbereichs F_0 Kreisbogen, und überdies entspricht dem zwischen 0 und 1 gelegenen Theile der realen Axe von $\overline{T}$ ein Kreisbogen s_0, der offenbar durch die Ecken λ_1, λ_2 von F_0 hindurchgeht und demgemäss als Diagonale des Kreisbogenvierecks F_0 angesehen werden kann.

Die Diagonale s_0 theilt den Bereich F_0 in zwei Hälften, die beziehungsweise der unteren und der oberen Halbebene, in welche $\overline{T}$ durch die reale z-Axe zerfällt wird, entsprechen; und zwar sind nach Gleichung (10) diejenigen Punkte $\eta(z)$ und $\eta(\bar{z})$, die conjugirten Punkten z und $\bar{z}$ der beiden Halbebenen von $\overline{T}$ entsprechen, im Sinne der in der Nr. 200 (Bd. II, 1, S. 271) eingeführten Terminologie, Spiegelbilder von einander in Bezug auf den Diagonalkreis s_0. Es ist also auch s_1' das Spiegelbild von s_1 und s_2 das Spiegelbild von s_2' in Bezug auf s_0. Hieraus schliessen wir, dass die Winkel der Kreisbogendreiecke

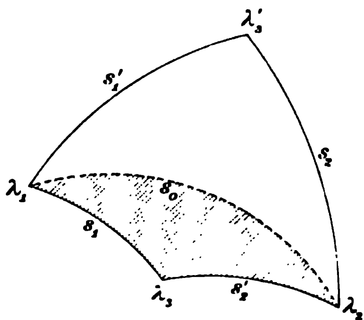


Fig. 19.

$$(\lambda_1 \lambda_3 \lambda_2), \quad (\lambda_1 \lambda_3' \lambda_2),$$

welche der unteren beziehungsweise der oberen Halbebene von $\overline{T}$ entsprechen, bei den Ecken λ_1, λ_3 beziehungsweise λ_3' und λ_2 gleich

$$\pi\delta_1, \quad \pi\delta_3, \quad \pi\delta_2$$

sein müssen.

Denn die Abbildung durch reciproke Radiivectores ist nach elementar-geometrischen Sätzen eine winkeltreue; also ist

$$\sphericalangle(s_0, s_1) = \sphericalangle(s_0, s_1'), \quad \sphericalangle(s_1, s_2') = \sphericalangle(s_1', s_2),$$
$$\sphericalangle(s_2, s_0) = \sphericalangle(s_2'\, s_0);$$

da aber nach dem Satze der Nr. 209 (Bd. II, 1, S. 310)

$$\sphericalangle(s_1, s_1') = 2\pi\delta_1, \quad \sphericalangle(s_1, s_2') + \sphericalangle(s_1', s_2) = 2\pi\delta_3, \quad \sphericalangle(s_2', s_2) = 2\pi\delta_2$$

ist, so folgt unmittelbar die Richtigkeit unserer Behauptung.

Durch geeignete Wahl von η können wir es stets erreichen, dass der Kreisbogen s_0 in eine gerade Linie übergeht, d. h. dass in der Gleichung (11) c_0 verschwindet. Dann wäre das Kreisbogenviereck F_0 in Bezug auf die geradlinige Diagonale s_0 symmetrisch. Wir übertragen diese Bezeichnung auch auf den allgemeinen Fall, wo s_0 keine gerade Linie ist, und sagen demgemäss:

Das Kreisbogenviereck F_0 wird durch die Diagonale s_0 in zwei symmetrische Hälften getheilt, die beziehungsweise der unteren und oberen Halbebene des Blattes $\overline{T}$ entsprechen.

Wir bezeichnen die Operation, durch welche man von einem Punkte η zu seinem Spiegelbilde in Bezug auf einen Kreis

$$c\eta\bar{\eta} + a\eta + \bar{a}\bar{\eta} + b = 0$$

übergeht, und die durch

$$B\bar{\eta} = \frac{-\bar{a}\bar{\eta} - b}{c\bar{\eta} + a}$$

dargestellt wird, als eine Spiegelung angewandt auf η. Hierin sind also b, c reale Grössen. Dann stellt zufolge der Gleichung (16) die Gleichung (14) für

$$\varkappa = +1, +2, -1, -2$$

ebenfalls Spiegelungen, und zwar Spiegelungen über die Kreise

$$s_1', s_2', s_1, s_2$$

dar. Setzen wir

(20) $$A_\varkappa B_0 = B_\varkappa,$$

so ist die Substitution $A_\varkappa$ in der Form

$$A_\varkappa = B_\varkappa B_0^{-1}$$

darstellbar, d. h. wenn wir auf einen Punkt η von F_0 anwenden die Spiegelung B_0 und dann auf den so entstehenden Punkt die Spiegelung $B_\varkappa$, so gelangen wir zum entsprechenden Punkte $A_\varkappa\eta$ des Bereiches $F_\varkappa$, oder kürzer, die Substitution $A_\varkappa$ ist äquivalent der hintereinander erfolgten Anwendung der Spiegelungen B_0 und $B_\varkappa$.

Die Spiegelungen $B_\varkappa$ sind aber auch einer einfachen analytischen Deutung fähig. Beachten wir nämlich, dass ebenso wie F_0 durch s_0, jeder Bereich $F_\varkappa$ durch den Kreis $A_\varkappa s_0$ in zwei symmetrische Hälften zerlegt wird, die den beiden Halbebenen des Blattes $\overline{T}_\varkappa$ entsprechen, so lehrt die Gleichung (14), dass die conjugirten z-Werthen entsprechenden Punkte der Bereiche F_0 und $F_\varkappa$ durch die Spiegelung $B_\varkappa$ auseinander hervorgehen.

270. Dreieckstheilung, die aus einem Kreisbogendreiecke entspringt. Abbildung eines Kreisbogendreiecks auf eine Halbebene. Das Riemann'sche Fortsetzungsprincip. Dreiecksfunctionen.

Die hier für die Bereiche $F_0, F_1, F_2, F_{-1}, F_{-2}$ gefundenen Ergebnisse übertragen sich ohne weiteres auf alle Bereiche

$$F_{\pm\varkappa_1, \pm\varkappa_2, \cdots \pm\varkappa_\lambda},$$

die (vergl. Nr. 210, Bd. II, 1, S. 313) durch die Substitutionen

$$A_{\varkappa_1}^{\pm 1} A_{\varkappa_2}^{\pm 1} \cdots A_{\varkappa_\lambda}^{\pm 1} \eta \qquad (\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\lambda = 1, 2)$$

der projectiven Monodromiegruppe ϑ der Differentialgleichung (2) aus F_0 hervorgehen und den Blättern

$$\overline{T}_{\pm\varkappa_1, \pm\varkappa_2, \cdots \pm\varkappa_\lambda}$$

der über der z-Ebene ausgebreiteten unendlich vielblättrigen Fläche R, die die Verzweigung der Function $\eta(z)$ darstellt, entsprechen.

Jeder dieser Bereiche zerfällt durch die Abbildung des Kreisbogens s_0 in zwei symmetrische Kreisbogendreiecke, und wir wollen uns nach dem Vorgange von Herrn Klein immer dasjenige dieser Kreisbogendreiecke, welches der unteren Halbebene des Blattes

$$\overline{T}_{\pm\varkappa_1, \pm\varkappa_2, \cdots \pm\varkappa_\lambda}$$

entspricht, schraffirt, das andere, der oberen Halbebene entsprechende unschraffirt denken (vergl. Fig. 19). Dann besteht die reguläre Theilung der Fläche F aus lauter theils schraffirten theils unschraffirten Kreisbogendreiecken, die so beschaffen sind, das jedes aus einem ihm benachbarten durch Spiegelung in Bezug auf den die gemeinsame Grenze bildenden Kreisbogen hervorgeht.

Bilden wir aus den drei Spiegelungen

$$B_0, B_{-1}, B_2$$

als Fundamentaloperationen eine Gruppe σ, so entsprechen die Operationen von σ gegenseitig eindeutig der beschriebenen Dreieckstheilung

von F, und die Substitutionsgruppe ϑ ist in σ als Untergruppe enthalten, indem nämlich diejenigen Operationen von σ, die aus einer geraden Anzahl der Fundamentaloperationen B_0, B_{-1}, B_2 zusammengesetzt sind, Substitutionen von ϑ darstellen.

Daraus folgt auch sofort, dass die Gruppe ϑ in σ als ausgezeichnete Untergruppe enthalten ist.

Wir können uns nun die ganze Theilung der Fläche F dadurch entstanden denken, dass wir von einem beliebigen schraffirten oder nicht schraffirten Dreiecke ausgehen, dieses durch Spiegelung in Bezug auf seine drei Seiten vervielfältigen, jedes so entstandene Dreieck wieder in Bezug auf jede seiner beiden freien Seiten spiegeln und so fortfahren. Die Function z von η ist dann dadurch definirt, dass sie das Ausgangsdreieck auf eine Halbebene eindeutig conform abbildet.

Denken wir uns nun umgekehrt, es sei in der η-Ebene irgend ein von drei Kreisbogen gebildetes Dreieck φ_0 gegeben, welches in seinen drei Ecken μ_1, μ_2, μ_3 die hohlen Winkel $\pi\delta_1$, $\pi\delta_2$, $\pi\delta_3$ besitzt, dann können wir uns die Aufgabe stellen, eine Function ζ von η anzugeben, die die eindeutig conforme Abbildung dieses Dreieckes auf eine Halbebene liefert. Die Existenz einer solchen Function folgt aus einem allgemeinen Riemann'schen Satze, und lässt sich mit Hülfe des in der Nr. 212 (Bd. II, 1, S. 323) geschilderten Schwarz-Neumann'schen Verfahrens unschwer beweisen. Wir wollen den Existenzbeweis aber in indirecter Weise dadurch liefern, dass wir die gestellte Aufgabe auf eine bereits gelöste zurückführen.

Sei nämlich

$$\zeta = f(\eta)$$

eine Function von der geforderten Beschaffenheit, dann hat also für die Seiten des Dreieckes φ_0 die Function ζ reale Werthe. Wir können auf mannigfaltige Weise eine lineare Function

$$\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

von η so bestimmen, dass die eine Seite des Kreisbogendreieckes φ_0 der η-Ebene, etwa (μ_1, μ_3), auf ein Stück der realen η'-Axe abgebildet wird; wählen wir z. B. α, β, γ, δ so, dass

$$\alpha\mu_1 + \beta = 0, \quad \gamma\mu_3 + \delta = 0$$

und für irgend einen Punkt μ des Kreisbogens (μ_1, μ_3)

$$\frac{\bar{\alpha}\bar{\mu} + \bar{\beta}}{\bar{\gamma}\bar{\mu} + \bar{\delta}} = \frac{\alpha\mu + \beta}{\gamma\mu + \delta} > 0$$

sei, so entspricht dem Dreiecke φ_0 der η-Ebene ein Dreieck ψ_0 der

η'-Ebene, von welchem eine Ecke im Nullpunkte, eine zweite Ecke im Unendlichen liegt, während die dritte Ecke durch den Punkt

$$\nu_2 = \frac{\alpha \mu_2 + \beta}{\gamma \mu_2 + \delta}$$

gegeben wird. Den Seiten

$$(\mu_1, \mu_3), \quad (\mu_3, \mu_2), \quad (\mu_2, \mu_1)$$

von φ_0 entsprechen beziehungsweise die positive reale Axe, eine durch ν_2 hindurchgehende Gerade und ein durch die Punkte 0 und ν_2 hindurchgehender Kreisbogen der η'-Ebene. Die Function

$$\zeta = f(\eta) = g(\eta')$$

bildet dann das Dreieck ψ_0 auf eine Halbebene, sagen wir z. B. die obere ζ-Halbebene ab, insbesondere entspricht den Punkten der realen positiven η'-Axe ein continuirliches Stück der realen ζ-Axe. Umgekehrt ist die Function η' von ζ nur für Werthe von ζ mit positivem Coefficienten von i definirt; wir wollen zeigen, wie man mit Hülfe eines von Riemann herrührenden Princips diese Function in die untere ζ-Halbebene fortsetzen kann.

Sei allgemein für die Punkte eines in der oberen ζ-Halbebene gelegenen Bereiches Z eine Function

$$H = F(\zeta)$$

eindeutig definirt, die diesen Bereich derart auf einen gewissen Bereich T der H-Ebene abbildet, dass H innerhalb Z endlich ist, und dass dem der realen ζ-Axe angehörigen Stücke (A, B) der Begrenzung von Z ein ebenfalls der realen H-Axe angehöriges Continuum von Punkten der Begrenzung von T entspricht. Bilden wir dann die monogene Function

$$\overline{H} = \overline{F(\zeta)}$$

von $\bar{\zeta}$, so ist dieselbe in dem Bereiche $\overline{Z}$, der aus Z durch Spiegelung in Bezug auf die reale ζ-Axe entsteht, eindeutig definirt und geht längs des Stückes (A, B) der realen ζ-Axe stetig in die Function über. Der Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(Z)} \frac{F(z)}{z-\zeta}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\overline{Z})} \frac{\overline{F(z)}}{\bar{z}-\zeta}\,d\bar{z},$$

wo die beiden Integrale über die Begrenzungen von Z beziehungsweise $\overline{Z}$ im positiven Sinne zu erstrecken sind, stellt für Werthe von ζ innerhalb Z die Function H, für Werthe von ζ innerhalb $\overline{Z}$ die Function $\overline{H}$ dar. Dieser Ausdruck ist aber nichts anderes wie

$$(I) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(Z+\bar{Z})}\frac{F}{z-\zeta}\,dz,$$

wo das Integral über die Begrenzung des durch Vereinigung von Z und $\bar{Z}$ entstehenden Bereiches zu erstrecken ist, und F auf den der Begrenzung von Z angehörenden Punkten mit H, auf den der Begrenzung von $\bar{Z}$ angehörenden Punkten mit $\bar{H}$ übereinstimmt. Das Integral (I) stellt aber innerhalb des Gesammtbereiches $Z+\bar{Z}$ eine monogene Function der complexen Variabeln ζ dar, und es ist somit $\bar{H}$ nichts anderes wie die analytische Fortsetzung der innerhalb Z definirten Function H in den Bereich $\bar{Z}$, und zwar entsprechen conjugirten complexen Werthen von ζ auch conjugirte complexe Werthe von H. Kurz ausgesprochen lautet also unser Resultat wie folgt:

Wenn einem zusammenhängenden Stücke der realen ζ-Axe ein ebenfalls zusammenhängendes Stück der realen H-Axe entspricht, so entsprechen conjugirten complexen Werthen von ζ auch conjugirte complexe Werthe von H.

Dieses Princip, welches auch im Folgenden noch wiederholt zur Anwendung gelangen wird, wollen wir als das Riemann'sche Fortsetzungs- oder Symmetrieprincip bezeichnen.

Für die Function η' von ζ ergiebt sich also, dass, wenn wir von einem Punkte ζ der oberen Halbebene nach dem conjugirten Werthe $\bar{\zeta}$ gehen, indem wir die reale Axe längs desjenigen Abschnittes überschreiten, der der positiven realen η'-Axe entspricht, der in $\bar{\zeta}$ stattfindende Werth der analytischen Fortsetzung der Function η' von ζ nichts anderes ist, wie der conjugirte complexe Werth des in ζ stattfindenden Werthes von η'. Oder wenn wir wieder auf η selbst zurückgehen und beachten, dass conjugirten complexen Punkten der η'-Ebene Punkte der η-Ebene entsprechen, die Spiegelbilder von einander in Bezug auf den Kreis (μ_1, μ_3) sind, so haben wir den Satz:

Wenn eine Function ζ die eindeutig conforme Abbildung des Kreisbogendreiecks φ_0 der η-Ebene auf die obere ζ-Halbebene vermittelt, so erfüllen die η-Werthe, die wir erhalten, wenn wir die Function η von ζ von der oberen Halbebene in die untere fortsetzen, indem wir die reale ζ-Axe längs des der Seite $(\mu_\varkappa, \mu_{\varkappa+1})$ von φ_0 entsprechenden Stückes überschreiten, das Dreieck φ_0', welches aus φ_0 durch Spiegelung in Bezug auf die Seite $(\mu_\varkappa, \mu_{\varkappa+1})$ entsteht.

Bezeichnen wir die Spiegelung in Bezug auf die Seite $(\mu_\varkappa, \mu_{\varkappa+1})$ durch $C_\varkappa$ und durch $\mu'_{\varkappa+2}$ das Spiegelbild der Ecke $\mu_{\varkappa+2}$ in Bezug auf den Kreis $(\mu_\varkappa, \mu_{\varkappa+1})$, (für $\varkappa = 1, 2, 3$; dabei sind die Indices,

welche grösser als 3 ausfallen, stets modulo 3 zu reduciren), so haben wir in dem aus Vereinigung von φ_0 und φ_0' entstehenden Bereiche ein Viereck, in welchem die Seite $(\mu_\varkappa, \mu'_{\varkappa+2})$ aus $(\mu_\varkappa, \mu_{\varkappa+2})$ durch die lineare Substitution

$$C_\varkappa C_{\varkappa+2}^{-1}\eta$$

und die Seite $(\mu_{\varkappa+1}, \mu_{\varkappa+2})$ aus $(\mu_{\varkappa+1}, \mu'_{\varkappa+2})$ durch die lineare Substitution

$$C_\varkappa C_{\varkappa+1}^{-1}\eta$$

hervorgeht. Die Winkel dieses Vierecks bei den Ecken $\mu_\varkappa$, $\mu_{\varkappa+1}$ sind beziehungsweise $2\pi\delta_\varkappa$, $2\pi\delta_{\varkappa+1}$, die Summe der Winkel bei den Ecken $\mu_{\varkappa+2}$, $\mu'_{\varkappa+2}$ ist $2\pi\delta_{\varkappa+2}$.

Die Function ζ von η (sofern sie existirt) hat die Eigenschaft, jenes Viereck eindeutig conform auf diejenige Fläche abzubilden, die wir erhalten, indem wir diejenigen beiden Theile der realen ζ-Axe, die den Seiten $(\mu_\varkappa, \mu_{\varkappa+2})$, $(\mu_{\varkappa+2}, \mu_{\varkappa+1})$ von φ_0 entsprechen, als Querschnitte der ζ-Ebene auffassen. Die Existenz einer so beschaffenen Function ζ haben wir aber in den Nummern 213—216 (Bd. II, 1, S. 327 ff.) bewiesen, und gefunden, dass, wenn wir über die noch verfügbaren drei willkürlichen Constanten so disponiren, dass für $\eta = \mu_1, \mu_2, \mu_3$ die Function die Werthe 0, 1, ∞ annimmt, dieselbe mit der unabhängigen Variabeln der Differentialgleichung (2) übereinstimmt. Hieraus folgt nun weiter, dass wir den Existenzbeweis für die Function ζ gar nicht erst wie in den Nummern 213, 214 auf die Methode der Herren Schwarz und C. Neumann zu gründen brauchen, sondern dass es genügt, wenn wir mit Hülfe des in den Nummern 215, 216 angewandten Verfahrens zeigen, dass diese Function aus der Differentialgleichung (2) durch Umkehrung des Integralquotienten entsteht. Wir haben also den Satz:

Die unabhängige Variable der Differentialgleichung (2) als Function des Integralquotienten η liefert für Werthe der δ_1, δ_2, δ_3, die real, nicht negativ und kleiner als Eins sind, die allgemeinste Function, die ein Kreisbogendreieck mit den hohlen Winkeln

$$\pi\delta_1,\ \pi\delta_2,\ \pi\delta_3$$

eindeutig conform auf eine Halbebene abbildet.

Man nennt darum η als Function von z wohl auch eine Dreiecksfunction; wir bezeichnen mit Herrn Schwarz diese Function von z durch

$$\eta = s(\delta_1, \delta_2, \delta_3, z).$$

271. Kreisbogendreieck mit drei verschwindenden Winkeln. Orthogonalkreis.

Wenn wir uns die Theilung der Fläche F in der in der vorigen Nummer (S. 40) beschriebenen Weise hergestellt denken, indem wir von einem Kreisbogendreiecke, etwa $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, ausgehen, so gewinnen wir damit den Vortheil, dass wir uns von der Art der Zerschneidung der z-Ebene völlig unabhängig gemacht haben.

Spiegeln wir nämlich das Ausgangsdreieck in Bezug auf die drei Seiten s_0, s_1, s_2', so können wir dasselbe mit irgend einem der entstandenen drei Spiegelbilder zu einem Vierecke vereinigen und erhalten jedesmal einen Fundamentalbereich für die Theilung der Fläche F. Dabei giebt dieser Fundamentalbereich die eindeutig conforme Abbildung der z-Ebene, in welcher wir uns dann diejenigen beiden Theile der realen z-Axe als Querschnitte zu denken haben, die den beiden frei gebliebenen Seiten des Ausgangsdreieckes entsprechen.

Wir halten die bisher angewandte Zerschneidung durch die Querschnitte l_1, l_2 fest, und haben also, wenn wir von dem schraffirten Dreiecke $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ausgehen, die den Seiten s_0, s_1, s_2' entsprechenden Spiegelungen

$$B_0, B_{-1}, B_2,$$

aus denen sich die Fundamentalsubstitutionen in der Form

$$A_1 = B_0 B_{-1}^{-1}, \quad A_2 = B_2 B_0^{-1}$$

zusammensetzen. Hieraus ist sofort ersichtlich, dass die Doppelpunkte der Substitution A_1 nichts anderes sind, wie die Schnittpunkte der beiden Kreise s_0, s_1 und die Doppelpunkte von A_2 nichts anderes wie die Schnittpunkte von s_0, s_2'. Ferner folgt aus der Gleichung

$$A_3 = A_1^{-1} A_2^{-1} = B_{-1} B_2^{-1},$$

dass die Schnittpunkte der Kreise s_1 und s_2' mit den Doppelpunkten von A_3 übereinstimmen.

Wenn also für eine der Substitutionen A_1, A_2, A_3 die Doppelpunkte zusammenfallen, d. h. wenn die betreffende Substitution eine parabolische ist, so berühren sich die betreffenden Kreise, in Uebereinstimmung mit der Thatsache, dass in diesem Falle der betreffende Winkel des Kreisbogendreieckes verschwinden muss.

Wenn z eine eindeutige Function von η sein soll, so müssen die Grössen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ in der Form

$$\delta_\varkappa = \frac{1}{g_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

darstellbar sein, wo die g_1, g_2, g_3 positive ganze Zahlen oder unendlich gross sind.

Im Falle wo die Differentialgleichung (2) die canonische Form der Legendre'schen Differentialgleichung (L) darstellt, haben wir insbesondere

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0;$$

das Kreisbogendreieck der η-Ebene hat also drei verschwindende Winkel, d. h. die Seiten desselben berühren sich in den Eckpunkten.

Wir können dann für den speciellen Integralquotienten

$$\tau = \frac{K'i}{K}$$

sofort das entsprechende Kreisbogendreieck angeben. Bedenken wir nämlich, dass wie in der Nr. 248 (Bd. II, 1, S. 480, 481) gezeigt wurde, für Werthe von z, die auf der realen Axe zwischen 0 und 1 liegen, K, K' real positiv sind, also τ auf der oberen Hälfte der lateralen Axe der τ-Ebene gelegen ist, so erkennen wir zunächst, dass die Seite s_0 unseres der unteren z-Halbebene entsprechenden Kreisbogendreieckes nichts anderes ist, wie der in der oberen τ-Halbebene gelegene Theil der lateralen Axe. Die Gleichung von s_0 lautet also

$$\tau + \bar{\tau} = 0$$

d. h. die Spiegelung B_0 ist einfach

$$B_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hieraus finden wir nun die den anderen Seiten s_1, s_2' entsprechenden Spiegelungen durch die Formeln (20) der Nr. 269 (S. 39), denn die Fundamentalsubstitutionen A_1, A_2 sind nach den Formeln (17) der Nr. 249 (Bd. II, 1, S. 483) bekannt. Es ist nämlich

$$(1)\qquad \begin{cases} A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_3 = A_1^{-1} A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

die Spiegelungen B_{-1}, B_2 lauten also

$$(2)\qquad \begin{cases} B_{-1} = A_1^{-1} B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ B_2 = \ A_2 B_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

und die Gleichungen von s_1, s_2' haben folglich die Form

$$s_1)\qquad \tau + \bar{\tau} + 2 = 0,$$

$$s_2')\qquad 2\tau\bar{\tau} + \tau + \bar{\tau} = 0.$$

Es ist jetzt dasjenige Kreisbogendreieck zu nehmen, welches lauter verschwindende Winkel hat und dessen eine Seite die obere Hälfte der lateralen Axe ist. Die Seite s_2' ist also der in der oberen τ-Halbebene gelegene Halbkreis des Kreises mit dem Mittelpunkte $-\frac{1}{2}$ und dem Radius $\frac{1}{2}$, die Seite s_1 die obere Hälfte der durch den Punkt -1 zur lateralen Axe gelegten Parallelen. Man hat folglich

$$\lambda_1 = \infty, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -1,$$

und das sind in der That die Doppelpunkte der drei Substitutionen

$$A_1, A_2, A_3.$$

Spiegeln wir nun das so bestimmte zu schraffirende Kreisbogendreieck (vergl. die Fig. 20) in Bezug auf die Seite s_0, so erhalten wir das der

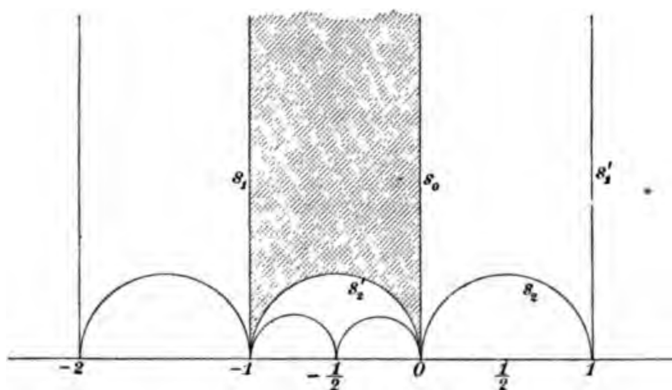


Fig. 20.

oberen z-Halbebene entsprechende symmetrische Dreieck, welches mit dem ursprünglichen vereint die Abbildung der z-Ebene liefert, die wir uns durch die längs der realen Axe gelegten Querschnitte l_1, l_2 zerschnitten zu denken haben. In der Figur sind auch noch die Spiegelungen des Ausgangsdreieckes in Bezug auf die beiden anderen Seiten s_1 und s_2' gezeichnet.

In Bezug auf die durch wiederholte Spiegelung des Ausgangsdreiecks oder durch Anwendung aller Substitutionen der aus den

$$A_1, A_2, A_3$$

als Basis gebildeten projectiven Gruppe auf den Fundamentalbereich

$$F_0 = (\infty, -1, 0, +1)$$

entstehende Theilung der Fläche F können wir nun eine Reihe höchst folgenreicher Bemerkungen machen.

Wenn wir statt τ einen anderen Integralquotienten η unserer Differentialgleichung (L) zu Grunde gelegt hätten, so würden wir als Abbildung der unteren z-Halbebene ein anderes Kreisbogendreieck mit lauter verschwindenden Winkeln gefunden haben. Umgekehrt können wir, wenn irgend ein Kreisbogendreieck, dessen sämmtliche Winkel gleich Null sind, vorgelegt ist, dasselbe als die Abbildung der unteren z-Halbebene vermittelst eines Integralquotienten der Differentialgleichung (L) ansehen. Um die Richtigkeit dieser Bemerkung zu erkennen, brauchen wir nur nachzuweisen, dass jedes Kreisbogendreieck mit verschwindenden Winkeln als die Abbildung des in der τ-Ebene gezeichneten Dreiecks mit den Seiten s_1, s_2', s_0 vermittelst einer linear gebrochenen Function aufgefasst werden kann.

Es gilt aber der allgemeine Satz:

Zwei Kreisbogendreiecke, welche dieselben Winkel in derselben Reihenfolge haben, gehen durch Abbildung vermittelst einer linear gebrochenen Function aus einander hervor.

In der That, seien die Ecken des einen Dreieckes in der η-Ebene

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,$$

die des anderen in der ζ-Ebene in derselben Reihenfolge

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3,$$

so ist die abbildende linear gebrochene Function einfach

$$\frac{\eta-\lambda_1}{\eta-\lambda_2}\,\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_1}=\frac{\zeta-\mu_1}{\zeta-\mu_2}\,\frac{\mu_3-\mu_2}{\mu_3-\mu_1}.$$

Denn die Abbildung durch diese Function ist einerseits winkeltreu, andererseits verwandelt sie Kreisbogen in Kreisbogen. Ein Kreisbogendreieck ist aber durch Angabe seiner Ecken und Winkel (im Allgemeinen) eindeutig bestimmt.

Denken wir uns also für einen beliebigen Integralquotienten von (L) das zugehörige (schraffirte) Kreisbogendreieck mit den Ecken μ_1, μ_2, μ_3 und verschwindenden Winkeln. Legen wir dann durch die drei Punkte μ_1, μ_2, μ_3 einen Kreis, so schneidet derselbe die drei Seiten *orthogonal*. Für den besonderen Integralquotienten τ ist dieser *Orthogonalkreis* nichts anderes wie die reale τ-Axe.

Wenn man die Seiten eines Kreisbogendreiecks mit lauter verschwindenden Winkeln zu Vollkreisen ergänzt, so begrenzen diese Kreise noch ein zweites Dreieck, dessen drei Winkel ebenfalls gleich Null sind. Von diesen beiden Dreiecken liegt stets das eine ganz innerhalb, das andere ganz ausserhalb des Orthogonalkreises.

Wir wollen um die Vorstellung zu fixiren annehmen, dass die Seiten des Kreisbogendreiecks (μ_1, μ_2, μ_3) innerhalb des Orthogonalkreises verlaufen.

Hat man einen Kreis K und legt einen denselben rechtwinkelig schneidenden Kreis K', so wird bei der Spiegelung in Bezug auf K offenbar jeder Punkt von K' wieder in einen Punkt von K' verwandelt; ebenso verwandelt sich jeder Punkt, der innerhalb von K' liegt, wieder in einen Punkt innerhalb, und umgekehrt jeder Punkt ausserhalb von K' in einen Punkt ausserhalb (vergl. Nr. 281, 282).

Wir schliessen hieraus zuvörderst, dass die aus dem Dreiecke (μ_1, μ_2, μ_3) durch einmalige Spiegelung in Bezug auf die drei Seiten hervorgehenden Dreiecke auch innerhalb des Orthogonalkreises liegen. Ferner folgt aber aus dem Umstande, dass die Abbildung durch reciproke radii vectores eine winkeltreue ist, dass die sämmtlichen Seiten der aus (μ_1, μ_2, μ_3) durch Spiegelung entstandenen Dreiecke den Orthogonalkreis ebenfalls unter rechten Winkeln schneiden. Also haben wir das Resultat:

Die sämmtlichen aus dem Dreiecke (μ_1, μ_2, μ_3) durch wiederholte Spiegelung über eine ihrer Seiten entstehenden Dreiecke befinden sich innerhalb des Orthogonalkreises und ihre Seiten schneiden den Orthogonalkreis unter rechtem Winkel, während ihre Ecken auf dem Orthogonalkreise liegen.

Viertes Kapitel.

272. Discontinuität der Gruppe, die aus einem Kreisbogendreieck mit verschwindenden Winkeln entspringt. Fundamentaleigenschaft der Modulfunction.

Betrachten wir nunmehr das Ausgangsdreieck (μ_1, μ_2, μ_3), so wir das Innere des Orthogonalkreises durch die drei Seiten dieses Dreieck in vier Gebiete getheilt, nämlich das Dreieck (μ_1, μ_2, μ_3) selbst ur die drei Gebiete, die von dem Orthogonalkreise und je einer Dreieck seite begrenzt werden. Construiren wir das Spiegelbild von $(\mu_1, \mu_2, \mu_3$ in Bezug auf die Seite (μ_x, μ_{x+1}), so theilen die Seiten desselben d zwischen dem Orthogonalkreise und (μ_x, μ_{x+1}) gelegene Gebiet in dr Theilgebiete, nämlich das gespiegelte Dreieck selbst und die zwische dem Orthogonalkreise und den beiden freien Seiten gelegenen Gebiet

Wenn wir allgemein die Spiegelung der entstehenden Dreiecke i Bezug auf eine ihrer Seiten beliebig oft wiederholt haben, so erschei das Innere des Orthogonalkreises in eine gewisse Anzahl von Gebiet zertheilt, nämlich in die Dreiecke einerseits, und die Gebiete $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots \mathfrak{C}$ die zwischen den freien Seiten jener Dreiecke und dem Orthogona kreise liegen, andererseits. Spiegeln wir nun weiter eines der äusserst Dreiecke um eine seiner freien Seiten, so liegt das entstehende Spieg bild nothwendig innerhalb des einen der Gebiete $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots \mathfrak{C}_\nu$, ist folglich unmöglich, dass von den durch die successiven Spieg lungen entstandenen Dreiecken zwei sich gegenseitig überdecken.

Vielmehr lagern sich diese Dreiecke schlicht und lücke los neben einander.

Offenbar liegen nur die Eckpunkte der durch die successiv Spiegelungen entstandenen Dreiecke und niemals andere Punkte de selben auf der Peripherie des Orthogonalkreises; ferner ist der Fläche inhalt eines jeden dieser Dreiecke eine endliche und von Null v schiedene Grösse. Daraus folgt, dass die Dreiecke, durch je öf wiederholte Spiegelung sie entstanden sind, sich um so näher an Peripherie des Orthogonalkreises herandrängen, und dass (wenn Orthogonalkreis ein wirklicher Kreis, und nicht wie für τ eine ger Linie ist) ihre Flächeninhalte immer kleiner und kleiner werden.

Ehe wir weiter gehen, sehen wir zu, was für Folgerungen sich aus den bisher erlangten Ergebnissen ziehen lassen.

Für die τ-Ebene sind die Seiten der aus dem Ausgangsdreiecke durch successive Spiegelung entstandenen Dreiecke stets entweder Parallele zur lateralen Axe, oder Halbkreise, deren Mittelpunkte auf der realen Axe liegen, ferner verbleiben diese Dreiecke sämmtlich in der oberen Halbebene, und mit Ausnahme der Ecken nach einer endlichen aber sonst beliebig grossen Anzahl von Spiegelungen stets in endlichem Abstande von der realen τ-Axe. Also ist nicht nur für alle z-Punkte des Blattes $\overline{T}$ sondern auch in jedem Blatte

$$\overline{T}_{\pm \varkappa_1, \pm \varkappa_2, \cdots \pm \varkappa_\nu},$$

in welches wir nach Ausführung einer endlichen Anzahl von Umläufen um die Punkte 0, 1 gelangen, der Coefficient von i in τ wesentlich positiv.

Damit ist der Beweis des in der Nr. 267 (S. 31) angegebenen Satzes geliefert, d. h. es ist gezeigt:

Der Periodenquotient τ besitzt für jeden Werth von z, mit Ausnahme von 0, 1, ∞, d. h. also für jeden Werth des Moduls k des elliptischen Integrals erster Gattung, einen wesentlich positiven Coefficienten von i.

Hieraus folgt nun, wie in der Nr. 267 (S. 31) erörtert wurde, auf Grund der Darstellung von k durch die Quotienten der ϑ-Reihen, dass der Modul k ebenso wie k', K, K' eindeutige Functionen von τ sind, die nur für Werthe von τ mit positivem Coefficienten von i existiren.

Dass z selbst eine eindeutige Function von τ ist, können wir aber auch, ohne von den Darstellungsformeln der Nr. 267 Gebrauch zu machen, sofort erweisen.

In der That ist die aus der Basis

$$A_1, A_2, A_3$$

erzeugte projective Monodromiegruppe der Differentialgleichung (2) im Sinne der Definition der Nr. 216 (Bd. II, 1, S. 345) eine discontinuirliche, denn nach den gefundenen Ergebnissen sind die daselbst aufgestellten Bedingungen 1), 2), 3) für die Fläche F, die (vergl. Nr. 200, Bd. II, 1, S. 313) die Projection des Gebildes (z, τ) auf die τ-Ebene darstellt, erfüllt. Also folgt nach den Ergebnissen der Nr. 216 ohne Weiteres, dass z eine eindeutige Function von τ sein muss, die innerhalb des Fundamentalbereiches F_0, d. h. innerhalb des Kreisbogenvierecks

$$(\infty, -1, 0, 1),$$

jeden Werth mit Ausnahme von 0, 1, ∞ einmal und nur einmal annimmt.

Die Discontinuität der aus der Basis (1) erzeugten Gruppe ϑ lässt sich auch noch direct erweisen, indem man die Punktmenge der Doppelpunkte aller Substitutionen dieser Gruppe in's Auge fasst.

Da die Coefficienten der Substitutionen A_1, A_2, A_3 ganze Zahlen sind, so gilt das Gleiche auch für die sämmtlichen Substitutionen von ϑ, d. h.:

Die Substitutionen von ϑ sind ganzzahlig und unimodular.

Hat man irgend eine ganzzahlige unimodulare Substitution, so kann man die Coefficienten derselben in Bezug auf ihren Restcharakter nach einem ganzzahligen Divisor n untersuchen. Man bemerkt dann sofort, dass, wenn zwei solche Substitutionen

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$$

so beschaffen sind, dass in beiden der erste und vierte Coefficient den Rest ± 1, der zweite und dritte den Rest 0 modulo n lässt, dieselbe Eigenschaft auch den inversen Substitutionen und ebenso der componirten Substitution

$$\begin{pmatrix}\alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta'\\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta'\end{pmatrix}$$

zukömmt. Wir deuten diese Beschaffenheit einer Substitution dadurch an, dass wir schreiben

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\pm 1 & 0\\ 0 & \pm 1\end{pmatrix} \pmod{n}.$$

Dann sehen wir aus der Form (1) (S. 46) der Substitutionen A_1, A_2 sofort, dass

$$A_1 \equiv A_2 \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \pmod{2}$$

ist; folglich genügt auch jede Substitution A unserer Gruppe ϑ dieser selben Congruenz:

$$A \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \pmod{2}. \tag{3}$$

Sei nun

$$A = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},$$

so sind die Doppelpunkte dieser Substitution durch die Gleichung

$$\gamma\eta^2 + (\delta - \alpha)\eta - \beta = 0$$

bestimmt, d. h. sie stellen sich in der Form dar

$$\eta = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma} \pm \sqrt{\frac{(\alpha + \delta)^2 - 4}{4\gamma^2}}. \tag{4}$$

Nun kann niemals

$$\alpha + \delta = 0$$

sein, denn aus

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ergäbe sich sonst

$$(5) \qquad \beta\gamma + 2 = (1 - \alpha)(1 + \alpha);$$

nun ist aber nach (3)

$$(1 - \alpha)(1 + \alpha) \equiv 0 \pmod 4, \quad \beta\gamma + 2 \equiv 2 \pmod 4,$$

also die Gleichung (5) unmöglich. Es ist folglich, da α, δ beide ungerade Zahlen sind,

$$(\alpha + \delta)^2 \geqq 4,$$

d. h. die Doppelpunkte der Substitution A sind stets real.

Hieraus folgt zunächst, dass alle Substitutionen der Gruppe ϑ entweder parabolisch oder hyperbolisch sein müssen. In der That sind die Coefficienten aller Substitutionen von ϑ reale Zahlen; für unimodulare Substitutionen mit realen Coefficienten oder, wie wir kurz sagen, für reale unimodulare Substitutionen gilt aber der folgende Satz:

Eine reale unimodulare Substitution kann niemals loxodromisch sein; sie ist elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch, jenachdem ihre Doppelpunkte conjugirt complex, real und von einander verschieden oder zusammenfallend sind.

Die Richtigkeit dieses Satzes erhellt unmittelbar aus den Formeln der Nr. 199 (Bd. II, 1, S. 267 ff.), wenn man daselbst die α, β, γ, δ als reale Grössen voraussetzt.

In der That sind für die beliebige reale unimodulare Substitution

$$\zeta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

die Doppelpunkte λ, μ durch die Formel

$$\frac{\alpha - \delta}{2\gamma} \pm \sqrt{\frac{(\alpha + \delta)^2 - 4}{4\gamma^2}}$$

gegeben. Wenn nun

$$(\alpha + \delta)^2 \neq 4,$$

d. h. die Substitution keine parabolische ist, so ist der Multiplicator

$$K = \left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)_{\eta = \lambda} = \left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)_{\eta = \mu}$$

real und demnach die Substitution eine hyperbolische, wenn λ, μ real, d. h. wenn

$$(\alpha + \delta)^2 > 4$$

ist; dagegen haben wir für

$$(\alpha + \delta)^2 < 4,$$

da in diesem Falle λ, μ conjugirte complexe Grössen sind,

$$K\overline{K} = \left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)_{\eta=\lambda} \cdot \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\eta=\lambda} = 1,$$

und die Substitution ist demnach eine elliptische. Wenn endlich

$$(\alpha + \delta)^2 = 4$$

ist, so ist die Substitution parabolisch und ihr Doppelpunkt ein Punkt der realen Axe.

Die von den Doppelpunkten der Substitutionen der Gruppe ϑ gebildete Punktmenge liegt also ganz auf der realen τ-Axe. Da nun eine Substitution mit ganzzahligen Coefficienten niemals eine infinitesimale im Sinne der Nr. 202 (Bd. II, 1, S. 280) sein kann, so folgt hieraus nach den Ergebnissen jener Nummer, dass die Gruppe ϑ in jedem Punkte der τ-Ebene, der nicht der realen Axe angehört, jedenfalls eigentlich discontinuirlich ist.

Irgend ein Zweig der Function τ von z erfährt, wenn z einen einfachen Umlauf um einen der Punkte 0, 1, ∞ vollzieht, nothwendig eine parabolische Substitution der Gruppe ϑ. Also können die Punkte 0, 1, ∞ der z-Ebene nur Doppelpunkten parabolischer Substitutionen von ϑ, und somit niemals Punkten der τ-Ebene mit von Null verschiedenem Coefficienten von i entsprechen. Daraus folgt, dass der Existenzbereich der Function z von τ nothwendig die ganze obere τ-Halbebene umfassen muss, denn wir können von einem Punkte dieser Halbebene aus, für den die Existenz der Function z feststeht, zu jedem anderen Punkte derselben Halbebene durch eine Folge von in einander greifenden Kreisen übergehen, die weder in ihrem Innern noch auf ihrer Peripherie mit der realen τ-Axe Punkte gemein haben, so dass wir also immer zu Stellen τ kommen, die Stellen z entsprechen, in deren Umgebung sich τ als Function von z und folglich auch z als Function von τ regulär verhält. Wir haben also den Satz:

Die Function z von τ existirt in der ganzen oberen τ-Halbebene und verhält sich in der Umgebung jeder Stelle, deren Coefficient von i wesentlich positiv ist, regulär.

273. Discussion der Punkte der realen Axe. Die ganzzahligen unimodularen Gruppen M und M_2. Satz von Riemann und Dedekind.

Da die Werthe von τ, die zu einem von 0, 1, ∞ verschiedenen gehören, wie wir bewiesen haben, stets in der oberen Halbebene liegen, da sich ferner die Doppelpunkte parabolischer Substitutionen der

Gruppe ϑ, die allein den singulären Stellen $z = 0, 1, \infty$ entsprechen können, auf der realen τ-Axe befinden, so schliessen wir, dass eine analytische Fortsetzung der Function z von τ nach der unteren τ-Halbebene hin nicht möglich ist.

Es wird demnach im Sinne der Erörterungen der Nummern 203, 204 die reale Axe mit der daselbst definirten abgeschlossenen Punktmenge P identisch sein, und in der That trennt dieselbe zwei Continua, nämlich die beiden τ-Halbebenen, innerhalb deren die Gruppe ϑ eigentlich discontinuirlich ist, von einander; eines dieser Continua ist der Existenzbereich der eindeutigen Function z von τ (vergl. den Satz der Nr. 204, Bd. II, 1, S. 287).

Wir wollen nun noch einen directen Nachweis dafür liefern, dass die Punktmenge Q der Doppelpunkte aller parabolischen Substitutionen der Gruppe ϑ auf der realen τ-Axe überall dicht ist, und gehen zu dem Ende etwas genauer auf den arithmetischen Charakter der Gruppe ϑ ein.

Die Gesammtheit aller ganzzahligen projectiven unimodularen Substitutionen bildet offenbar eine Gruppe, die wir im Folgenden stets durch M bezeichnen wollen. Diejenigen unter den Substitutionen von M, die der Congruenzbedingung

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\pm 1 & 0\\ 0 & \pm 1\end{pmatrix} \pmod{n}$$

Genüge leisten, bilden zufolge der in der vorigen Nummer (S. 52) nachgewiesenen Eigenschaften derselben ebenfalls eine Gruppe M_n, die also in M als Untergruppe enthalten ist und die wir mit Herrn Klein als die Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe bezeichnen. Die Hauptcongruenzgruppe zweiter Stufe M_2, deren Substitutionen durch die Congruenz

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \pmod{2} \tag{6}$$

charakterisirt werden, enthält, wie wir gesehen haben, die Gruppe ϑ jedenfalls als Untergruppe in sich.

Wir wollen nachweisen, dass sie mit dieser Gruppe geradezu zusammenfällt.

Zu dem Ende brauchen wir nur zu beweisen, dass sich jede Substitution von M, die der Congruenz (6) Genüge leistet, durch Composition aus den beiden Substitutionen A_1, A_2 zusammensetzen lässt.

Es ist offenbar für alle ganzzahligen (positiven und negativen) Werthe von m und n

$$A_1^m = \begin{pmatrix}1 & 2m\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad A_2^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2n & 1\end{pmatrix}.$$

Sei nun

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 2,$$

so haben wir

$$AA_1^m = \begin{pmatrix} \alpha & 2m\alpha + \beta \\ \gamma & 2m\gamma + \delta \end{pmatrix},$$

$$AA_2^n = \begin{pmatrix} \alpha - 2n\beta & \beta \\ \gamma - 2n\delta & \delta \end{pmatrix}.$$

Man kann nun offenbar die Zahlen m, n so wählen, dass

$$|2m\gamma + \delta| < |\gamma|,$$
$$|\gamma - 2n\delta| < |\delta|$$

ist. Bilden wir also die Folge von Substitutionen

$$AA_1^{m_1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta_1 \\ \gamma & \delta_1 \end{pmatrix}, \quad AA_1^{m_1}A_2^{n_1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix},$$

$$AA_1^{m_1}A_2^{n_1}A_1^{m_2} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \delta_2 \end{pmatrix}, \quad AA_1^{m_1}A_2^{n_1}A_1^{m_2}A_2^{n_2} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix},$$

u. s. f.

so kann man über die Zahlen

$$m_1, n_1, m_2, n_2, \cdots$$

so verfügen, dass

$$|\delta_1| < |\gamma|, \quad |\gamma_1| < |\delta_1|, \quad |\delta_2| < |\gamma_1|, \quad |\gamma_2| < |\delta_2|, \cdots$$

so lange nicht eine der Zahlen γ_λ, δ_λ verschwindet. Wir erhalte[n auf] diese Weise eine Folge von ganzen Zahlen

$$\gamma, \delta_1, \gamma_1, \delta_2, \gamma_2, \cdots$$

die dem absoluten Betrage nach abnehmen, bis eine derselben g[leich] Null wird. Je nachdem diese verschwindende Zahl ein γ oder [δ] ist, erhalten wir also

$$AA_1^{m_1}A_2^{n_1} \cdots A_1^{m_\lambda}A_2^{n_\lambda} = \begin{pmatrix} \alpha_\lambda & \beta_\lambda \\ 0 & \delta_\lambda \end{pmatrix},$$

oder

$$AA_1^{m_1}A_2^{n_1} \cdots A_1^{m_\lambda} = \begin{pmatrix} \alpha_{\lambda-1} & \beta_\lambda \\ \gamma_{\lambda-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Der letztere Fall ist aber ausgeschlossen, da

$$\beta_\lambda \equiv \gamma_{\lambda-1} \equiv 0 \pmod 2$$

sein muss und folglich nicht

$$\beta_\lambda \gamma_{\lambda-1} = -1$$

sein kann. Im ersteren Falle muss

$$\alpha_\lambda \delta_\lambda = 1,$$

also entweder α_λ, δ_λ beide gleich $+1$ oder beide gleich -1 sein. Da ferner

$$\beta_\lambda \equiv 0 \pmod 2$$

ist, so haben wir

$$\begin{pmatrix}\alpha_\lambda & \beta_\lambda \\ 0 & \delta_\lambda\end{pmatrix} = A_1^{\frac{\alpha_\lambda \beta_\lambda}{2}},$$

also ist in der That A als Product von Potenzen der A_1, A_2 darstellbar. Wir erhalten also den wichtigen Satz:

Die projective Monodromiegruppe der Differentialgleichung (L) ist die Hauptcongruenzgruppe zweiter Stufe M_2.

Wir betrachten nun irgend eine parabolische Substitution

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

der Gruppe ϑ oder (wie wir sie nunmehr nennen können) M_2. Dann ist also

$$(\alpha + \delta)^2 = 4,$$

und der Doppelpunkt dieser Substitution hat den Werth

$$\lambda = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma}.$$

Wir können z. B.

$$\alpha + \delta = 2$$

voraussetzen, da die andere mögliche Annahme durch Multiplication aller vier Coefficienten mit -1 auf diese zurückgeführt wird; dann ist, wegen $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$,

$$\frac{\alpha - 1}{\gamma} = -\frac{\beta}{\alpha - 1}$$

und folglich

(7) $$\lambda = \frac{\alpha - 1}{\gamma} = \frac{-\beta}{\alpha - 1}.$$

Bedeutet nun m, n irgend ein Paar zu einander theilerfremder Zahlen, und setzen wir

$$\lambda = \frac{m}{n},$$

so erhalten wir nach (7)

$$\alpha = 1 + \bar{g} \cdot mn,$$
$$\beta = -\bar{g} \cdot m^2,$$
$$\gamma = \bar{g} \cdot n^2,$$
$$\delta = 1 - \bar{g} \cdot mn,$$

wo $\bar{g}$ irgend eine ganze Zahl bedeutet. Da aber die Substitution der

Gruppe angehören soll, muss $\bar{g}$ als **gerade** Zahl $2g$ gewählt werden, dann ist also

$$(8)\qquad \begin{pmatrix} 1+2gmn & -2gm^2 \\ 2gn^2 & 1-2gmn \end{pmatrix}$$

für willkürliches ganzzahliges g eine parabolische Substitution, die der Gruppe M_2 angehört und den Doppelpunkt

$$\lambda = \frac{m}{n}$$

besitzt, und zwar ist (8) die **allgemeinste** in M_2 enthaltene Substitution von dieser Beschaffenheit.

Hieraus folgt zunächst die Richtigkeit der Behauptung, dass die Punktmenge Q auf der realen τ-Axe überall dicht ist, und wir haben sogar die Einsicht gewonnen, dass **jeder rationale Punkt** der realen τ-Axe als Doppelpunkt von unendlich vielen parabolischen Substitutionen von M_2 erscheint.

Die Substitution (8) lässt sich offenbar in der Form schreiben

$$\begin{pmatrix} 1+2gmn & -2gm^2 \\ 2gn^2 & 1-2gmn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2mn & 2m^2 \\ -2n^2 & 1+2mn \end{pmatrix}^{-g},$$

wir sehen also, dass alle parabolischen Substitutionen von M_2, die denselben Doppelpunkt $\frac{m}{n}$ besitzen, als Potenzen einer **einfachsten** unter ihnen darstellbar sind. Die Gesammtheit dieser **einfachsten** parabolischen Substitutionen von M_2 ist folglich der Gesammtheit der realen rationalen Zahlen eindeutig zugeordnet, wenn wir eine solche Substitution derjenigen rationalen Zahl zuordnen, die ihren Doppelpunkt liefert.

Von diesen einfachsten parabolischen Substitutionen der Gruppe M_2 können wir nun zeigen, dass sie sich in Tripel anordnen lassen von der Beschaffenheit, dass ein solches Tripel genau die Substitutionen darstellt, die ein Zweig des Integralquotienten τ erfährt, wenn z einfache positive Umläufe um die drei singulären Punkte $0, 1, \infty$ vollzieht. Zu dem Ende haben wir nur zu zeigen, dass jede Substitution von der Form

$$(9)\qquad \begin{pmatrix} 1-2mn & 2m^2 \\ -2n^2 & 1+2mn \end{pmatrix}$$

aus einer der drei Substitutionen A_1, A_2, A_3 durch Transformation mit einer Substitution der Gruppe M_2 gewonnen werden kann.

In der That ist, wenn

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

irgend eine Substitution von M_2 bedeutet

$$(10)\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1-2ac & 2a^2 \\ -2c^2 & 1+2ac \end{pmatrix},$$

$$(11)\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1-2bd & 2b^2 \\ -2d^2 & 1+2bd \end{pmatrix},$$

$$(12)\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A_3 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1-2(-a+b)(-c+d) & 2(-a+b)^2 \\ -2(-c+d)^2 & 1+2(-a+b)(-c+d) \end{pmatrix};$$

also ist eine Substitution (9), für

$m \equiv 1,\ n \equiv 0 \pmod 2$, in der Form (10),
$m \equiv 0,\ n \equiv 1 \pmod 2$, in der Form (11),
$m \equiv 1,\ n \equiv 1 \pmod 2$, in der Form (12)

darstellbar, und die drei Substitutionen (10), (11), (12) stellen das Tripel von Substitutionen dar, welches der Zweig

$$(13)\quad \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$$

des Integralquotienten τ bei einfachen positiven Umläufen von z um die Punkte $0, 1, \infty$ erfährt. Die Doppelpunkte dieser drei Substitutionen sind folglich nichts anderes wie die Eckpunkte des schraffirten Dreiecks, welches aus dem Ausgangsdreiecke durch Abbildung mittelst der linearen Function (13) hervorgeht. Wir haben also den von Riemann und Herrn **Dedekind** herrührenden Satz:

Alle rationalen Punkte der realen τ-Axe sind Eckpunkte der Dreieckstheilung der die obere τ-Halbebene schlicht und lückenlos bedeckenden Fläche F. Und zwar entspricht ein rationaler Werth

$$\frac{m}{n}$$

dem Eckpunkten $\tau = \infty, 0, -1$ des Ausgangsdreiecks, d. h. den singulären Punkten $z = 0, 1, \infty$ der Differentialgleichung (L), jenachdem

$$\left.\begin{matrix} m \equiv 1, & n \equiv 0 \\ m \equiv 0, & n \equiv 1 \\ m \equiv 1, & n \equiv 1 \end{matrix}\right\} \pmod 2$$

ist.

274. Entwickelungen in der Umgebung der singulären Stellen. Verhalten bei der Annäherung an diese Stellen.

Wir stellen der Vollständigkeit wegen noch die Entwickelungen von z als Function von τ in der Nähe der Stellen

$$\tau = \infty,\ 0,\ -1$$

zusammen, wie sie sich im Sinne der Nummern 196 und 203 (Bd. II, 1, S. 254, 283) aus den Formeln der Nummern 248, 249 (Bd. II, 1, S. 479 ff.) ergeben.

Für $z = 0$ ist, wenn wir in Uebereinstimmung mit den Bezeichnungen der Nr. 196

$$\mathfrak{y}_1 = K,\quad \mathfrak{y}_2 = K'i,\qquad z_1 = u_{01},\quad z_2 = u_{02}$$

setzen, die durch die Gleichungen (2) bez. (3) jener Nummer definirte Substitution nach den Gleichungen (9), (16) der Nummern 248, 249 (Bd. II, 1, S. 480, 482)

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 2i\log 2 & -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix},\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = -\frac{\pi i}{4};$$

also ist nach Gleichung (5a) der Nr. 196 (Bd. II, 1, S. 255)

$$z = \mathfrak{P}(e^{4\log 2}\, e^{\tau\pi i}),$$

dies ist aber nichts anderes wie die Entwickelung (40) der Nr. 265 (S. 22), die wir darum gleich in der Form

$$(14)\qquad z = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \varepsilon_\varkappa q^\varkappa = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \varepsilon_\varkappa e^{\varkappa\tau\pi i}$$

schreiben können. Für hinreichend kleine Werthe von z ist nach Nr. 203 (Bd. II, 1, S. 284) der reale Theil von

$$4\log 2 \cdot \tau\pi i$$

sehr gross negativ, also der absolute Betrag von q sehr klein. Die Reihe (14), die in einer gewissen Umgebung von $q = 0$ convergirt, kann nach einem bekannten Principe der Functionentheorie nur an einer Stelle, in deren Umgebung die Function z von q nicht regulär ist, zu convergiren aufhören. Wie wir gezeigt haben, ist aber z in der Umgebung jeder Stelle τ, deren Coefficient von i wesentlich positiv ist, und folglich in der Umgebung jeder Stelle q, deren absoluter Betrag wesentlich kleiner ist wie Eins, regulär, die Reihe (14) convergirt folglich innerhalb des Einheitskreises

$$|q| = 1$$

der q-Ebene.

Andererseits wissen wir, dass die Function z von τ nur in der oberen τ-Halbebene existirt, während die reale τ-Axe überall dicht besetzt ist mit Doppelpunkten nicht elliptischer Substitutionen der Gruppe M_2, d. h. (vergl. Nr. 204, Bd. II, 1, S. 286) mit Unbestimmt-

heitsstellen dieser Function. Also existirt die Function z von q nur innerhalb des Einheitskreises der q-Ebene, und die Peripherie des Einheitskreises ist mit Unbestimmtheitsstellen überall dicht besetzt.

Die Reihe (14) stellt also die Function z von q in ihrem ganzen Existenzbereiche dar.

Wenn q in beliebiger Richtung in den Nullpunkt einrückt, so rückt z in den singulären Punkt $z = 0$ ein. Wenn also τ eine beliebige Folge von Zahlen

$$w_1, w_2, w_3, \cdots$$

durchläuft, deren Coefficienten von i positiv sind, und für welche

$$\lim_n w_n = \infty$$

ist, so ist auch der Grenzwerth, dem sich die Werthe von z für diese Werthenfolge von τ nähern, streng gleich Null (vergl. Nr. 203, Bd. II, 1, S. 284).

In analoger Weise können wir die Entwickelungen von $z - 1$ und von $\frac{1}{z}$ in der Nähe der beiden anderen Eckpunkte $\tau = 0$ und $\tau = -1$ des Ausgangsdreiecks herstellen. Die Entwickelung von $z - 1$ ergiebt sich unmittelbar aus (14), wenn wir die in der Nr. 248 (Bd. II, 1, S. 481) abgeleiteten Gleichungen

$$K(z) = K'(1 - z),$$
$$K'(z) = K(1 - z)$$

beachten, aus denen für den Integralquotienten

$$\tau(z) = \frac{-1}{\tau(1 - z)} \tag{15}$$

folgt. Setzen wir also in (14) an Stelle von z, $1 - z$, so kommt

$$1 - z = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \varepsilon_\varkappa e^{-\frac{\varkappa \pi i}{\tau}}. \tag{16}$$

Für $\frac{1}{z}$ haben wir in der Bezeichnung der Nr. 196 (Bd. II, 1)

$$\mathfrak{y}_1 = K, \quad \mathfrak{y}_2 = K'i, \quad z_1 = u_{\infty 1}, \quad z_2 = u_{\infty 2},$$

also ist nach den Gleichungen (19) der Nr. 249 (Bd. II, 1, S. 484)

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \\ -2i\log 2 & \frac{\pi}{2} - 2i\log 2 \end{pmatrix},$$

und somit nach Gleichung (5) der Nr. 196 (Bd. II, 1, S. 255)

$$\frac{1}{z} = \mathfrak{P}\left(e^{-\pi i \frac{1}{\tau+1}}\right). \tag{17}$$

Die Reihen auf den rechten Seiten der Gleichungen (16), (17) convergiren für alle Punkte der oberen τ-Halbebene und stellen folglich ebenso wie (14) die Function z in ihrem ganzen Existenzbereiche dar. Wenn τ in einer Folge von Zahlen mit positivem Coefficienten von i in den Punkt 0 beziehungsweise -1 einrückt, so nähert sich z streng den Werthen 1 beziehungsweise ∞.

Da wir in Bezug auf jedes Dreieck der Theilung der oberen τ-Halbebene die analogen Schlüsse machen können, so haben wir als Ergänzung zu dem oben aufgestellten Satze das Ergebniss:

Die Function z von τ nähert sich streng einem der Werthe

$$z = 0,\ 1,\ \infty,$$

wenn τ eine beliebige Folge von Zahlen mit positivem Coefficienten von i durchläuft, deren Grenzwerth eine reale rationale Zahl ist. Und zwar kommt der Werth 0, 1, ∞ zum Vorschein, jenachdem für diese rationale Zahl der Zähler ungerade und der Nenner gerade, der Zähler gerade und der Nenner ungerade, Zähler und Nenner beide ungerade sind.

Fünftes Kapitel.

275. Ableitung weiterer Eigenschaften der Modulfunction aus der Darstellung durch die Thetafunctionen. Beziehung zwischen den Gruppen M und M_2.

Die Entwickelungen (14), (16), (17) der vorhergehenden Nummer sind den Entwickelungen einer periodischen Function nach Fourier'schen Reihen analog. Dieselben sind aber nicht als die wirklich naturgemässen Darstellungen der Function z anzusehen, vielmehr ist die aus den Gleichungen (VI) der Nr. 267 (S. 30) sich ergebende Darstellung

$$(18) \qquad z = \frac{\vartheta_2^4(\tau)}{\vartheta_3^4(\tau)}, \quad 1 - z = \frac{\vartheta^4(\tau)}{\vartheta_3^4(\tau)}$$

diejenige, die für die numerische Berechnung und die Auffindung weiterer Eigenschaften der Function z am geeignetesten ist.

In der That lassen sich, wenn man von der expliciten Darstellung der Functionen $\vartheta(\tau)$, $\vartheta_2(\tau)$, $\vartheta_3(\tau)$, wie sie in der Nr. 267 (S. 29) gegeben worden sind, ausgeht, zunächst die bisher gefundenen Eigenschaften der Function z von τ herleiten, sofern man den Satz als bewiesen ansieht, dass der Coefficient von i in τ für jeden Werth von z (ausgenommen 0, 1, ∞) einen wesentlich positiven Werth hat. Man hat zu dem Ende nur zwei Gleichungssysteme aufzustellen, die sich aus den Formeln der Nr. 267 (S. 29) unmittelbar ergeben und die uns auch noch zu weiteren Erörterungen führen werden.

Zunächst folgt aus den Gleichungen (I), (II) der erwähnten Nummer

$$(19) \qquad \begin{cases} \vartheta_3^2(\tau) = \frac{i}{\tau}\,\vartheta_3^2\left(\frac{-1}{\tau}\right), \\ \vartheta_2^2(\tau) = \frac{i}{\tau}\,\vartheta^2\left(\frac{-1}{\tau}\right), \\ \vartheta^2(\tau) = \frac{i}{\tau}\,\vartheta_2^2\left(\frac{-1}{\tau}\right); \end{cases}$$

ferner liefern die Entwickelungen der drei ϑ-Functionen ohne weiteres die Gleichungen

$$(20)\qquad \begin{cases} \vartheta_3(\tau+1) = \vartheta(\tau), \\ \vartheta(\tau+1) = \vartheta_3(\tau), \\ \vartheta_2(\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}}\,\vartheta_2(\tau). \end{cases}$$

Setzen wir endlich

$$z = \frac{\vartheta_2^4(\tau)}{\vartheta_3^4(\tau)} = \Phi(\tau)$$

und verwandeln $+i$ in $-i$, so folgt

$$\bar{z} = \frac{16 e^{-\bar{\tau}\pi i}(1 + e^{-2\bar{\tau}\pi i} + \cdots)^4}{(1 + 2e^{-\bar{\tau}\pi i} + \cdots)^4},$$

d. h. wir haben

$$(21)\qquad \bar{z} = \Phi(-\bar{\tau}).$$

Aus (19), (20) ergiebt sich mit Rücksicht auf (18)

$$(22)\qquad \Phi\left(\frac{-1}{\tau}\right) = 1 - z, \quad \Phi(\tau+1) = \frac{-z}{1-z}.$$

Setzen wir

$$S_1\tau = \tau + 1, \quad S_2\tau = \frac{-1}{\tau} = S_2^{-1}\tau,$$

so sind dies zwei Substitutionen der Gruppe M, und wir haben ofl

$$A_1 = S_1^2, \quad A_2 = S_2 S_1^2 S_2;$$

hieraus lassen sich nun mit Hülfe der Gleichungen (21), (22) die si lichen uns bereits bekannten Eigenschaften der Function $\Phi(\tau$ Leichtigkeit herleiten. Die Gleichungen (21), (22) gestatten un: auch noch Eigenschaften dieser Function aufzufinden, die wir nicht kennen gelernt haben. Wir schicken folgende Bemerkungen v

Betrachten wir zwei Substitutionen

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

der Gruppe M, die so beschaffen sind, dass

$$\alpha \equiv \alpha_1, \quad \beta \equiv \beta_1, \quad \gamma \equiv \gamma_1, \quad \delta \equiv \delta_1 \pmod 2,$$

oder wie wir kurz schreiben

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} \pmod 2,$$

dann ist offenbar

$$TS^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1\delta - \beta_1\gamma & -\alpha_1\beta + \beta_1\alpha \\ \gamma_1\delta - \delta_1\gamma & -\gamma_1\beta + \delta_1\alpha \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 2,$$

also eine Substitution der Gruppe M_2. Bezeichnen wir mit

$$\alpha_0, \quad \beta_0, \quad \gamma_0, \quad \delta_0$$

vier Zahlen, deren Determinante gleich Eins ist, und die beziehungsweise kleinste Reste der Zahlen

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta$$

nach dem Modul 2 darstellen, dann ist also

$$\begin{pmatrix}\alpha_0 & \beta_0\\ \gamma_0 & \delta_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}^{-1} = A^{-1}$$

eine Substitution von M_2. Jede Substitution S von M lässt sich demnach in die Form setzen

$$S = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\alpha_0 & \beta_0\\ \gamma_0 & \delta_0\end{pmatrix},$$

wo A eine Substitution von M_2 bedeutet. Die Substitution

$$\begin{pmatrix}\alpha_0 & \beta_0\\ \gamma_0 & \delta_0\end{pmatrix}$$

kann nur eine ganz beschränkte Anzahl von verschiedenen Gestalten besitzen.

Für S ergeben sich nämlich, modulo 2 betrachtet, nur die folgenden Möglichkeiten

$$\left.\begin{array}{lllll}
1) & \alpha\equiv 1, & \beta\equiv 0, & \gamma\equiv 0, & \delta\equiv 1,\\
2) & \alpha\equiv 1, & \beta\equiv 0, & \gamma\equiv 1, & \delta\equiv 1,\\
3) & \alpha\equiv 1, & \beta\equiv 1, & \gamma\equiv 0, & \delta\equiv 1,\\
4) & \alpha\equiv 1, & \beta\equiv 1, & \gamma\equiv 1, & \delta\equiv 0,\\
5) & \alpha\equiv 0, & \beta\equiv 1, & \gamma\equiv 1, & \delta\equiv 1,\\
6) & \alpha\equiv 0, & \beta\equiv 1, & \gamma\equiv 1, & \delta\equiv 0,
\end{array}\right\} \pmod 2;$$

die Substitutionen von M zerfallen also in sechs Typen modulo 2, jenachdem sie nämlich mit einer der sechs Substitutionen

$$t_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \quad t_3 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$t_4 = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad t_5 = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \quad t_6 = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

modulo 2 congruent sind. Die mit

$$t_1 = 1$$

congruenten Substitutionen von M sind nichts anderes, wie die Substitutionen von M_2; wir können also sagen:

$$M_2, \quad M_2 t_2, \quad M_2 t_3, \quad M_2 t_4, \quad M_2 t_5, \quad M_2 t_6$$

sind jene 6 Typen von Substitutionen der Gruppe M, und die Gruppe M lässt sich in der Form

(23) $$M = M_2(1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)$$

schreiben, wo die rechte Seite als ein symbolisches Product anzusehen ist. Durch Ausführung dieser symbolischen Multiplication, d. h. indem man jede Substitution von M_2 mit jeder der in den Parenthesen stehenden Substitutionen componirt, erhält man alle Substitutionen von M und jede nur ein einziges Mal. Wir nennen darum die Gesammtheit der Substitutionen

$$(1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)$$

den Quotienten der Gruppe M_2 in Bezug auf die Gruppe M.

Die Substitutionen t_3 und t_6 sind nichts anderes wie unsere Substitutionen S_1, S_2; aus diesen setzen sich die übrigen $t_\varkappa$ in folgender Weise zusammen

(24) $$t_5 = t_6 t_3, \quad t_4 = t_3 t_6, \quad t_2 = t_6 t_3 t_6;$$

hieraus folgt zunächst, dass die sämmtlichen Substitutionen von M sich aus Potenzen der beiden Substitutionen S_1, S_2 durch Composition zusammensetzen lassen, d. h. es bilden z. B. die drei Substitutionen

$$S_1, \quad S_2, \quad S_3 = S_1^{-1} S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis der Gruppe M.

Bedeutet S irgend eine Substitution von M, so ist (Nr. 140, Bd. II, 1, S. 36) die Untergruppe

$$S^{-1} M_2 S$$

mit M_2 innerhalb M gleichberechtigt. Da aber für eine Substitution A von M_2 offenbar

$$S^{-1} A S \equiv S^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 2,$$

also $S^{-1} A S$ selbst eine Substitution von M_2 ist, so ist

$$S^{-1} M_2 S = M_2,$$

d. h. M_2 eine ausgezeichnete Untergruppe von M.

276. Moduln, die durch lineare Transformation des elliptischen Integrales entstehen. Biquadratische Form; ihre ganzen Invarianten und die absolute Invariante J.

Wenn auf τ die beliebige Substitution mit realen Coefficienten und positiver Determinante

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma > 0,$$

angewandt wird, so besitzt der Coefficient von i in

$$\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$$

dasselbe Vorzeichen, wie der Coefficient von i in τ, und zwar ist, wenn wir den Coefficienten von i einer complexen Grösse durch ein vorgesetzes J bezeichnen,

(25) $$J\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{|\gamma\tau+\delta|^2}J(\tau).$$

Hieraus folgt, dass die Function

(26) $$\Phi(S\tau),$$

wo S eine beliebige Substitution mit ganzzahligen Coefficienten und positiver Determinante bedeutet, für alle Werthe von τ, deren Coefficient von i positiv ist, existirt. Wenn die Determinante von S gleich n ist, so stellt die Function (26) das Quadrat des Moduls eines elliptischen Integrals erster Gattung dar, welches aus dem Integrale mit dem Modul

$$\varkappa=\sqrt{z}$$

durch eine Transformation n^{ter} Ordnung hervorgeht. Für $n=1$, d. h. wenn S eine Substitution von M ist, liefert also die Function (26) das Quadrat des Moduls eines elliptischen Integrals, welches aus dem zum Modul $\varkappa$ gehörigen durch eine Transformation ersten Grades oder eine lineare Transformation entsteht. Mit diesen linearen Transformationen entsprechenden Moduln haben wir uns einen Augenblick zu beschäftigen.

Da sich jede Substitution S von M in der Form

$$S=At_\varkappa$$

schreiben lässt, wo A eine Substitution von M_2 und $\varkappa$ eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 ist, so haben wir

$$\Phi(S\tau)=\Phi(t_\varkappa\tau),$$

so dass also nur die sechs Functionen

$$\Phi(t_\varkappa\tau) \qquad (\varkappa=1,2,3,4,5,6)$$

zu betrachten sind. Diese lassen sich aber mit Rücksicht auf die Gleichungen (22) und (24) sofort angeben. Es ist nämlich nach (22)

$$\Phi(t_6\tau)=1-z,\quad \Phi(t_3\tau)=\frac{z}{z-1},$$

ferner nach (24)

$$\Phi(t_5\tau)=\Phi(t_6t_3\tau)=1-\Phi(t_3\tau)=\frac{1}{1-z},$$

$$\Phi(t_4\tau)=\Phi(t_3t_6\tau)=\frac{z-1}{z},$$

$$\Phi(t_2\tau)=\Phi(t_6t_3t_6\tau)=\frac{1}{z},$$

wir können also den folgenden wichtigen Satz aussprechen:

Durch Anwendung einer Substitution S der Gruppe M auf die unabhängige Variable der Function

$$z = \Phi(\tau)$$

verwandelt sich diese Function beziehungsweise in

$$(27)\quad \begin{cases} z = T_1 z, & \frac{1}{z} = T_2 z, & \frac{z}{z-1} = T_3 z, \\ \frac{z-1}{z} = T_4 z, & \frac{1}{1-z} = T_5 z, & 1 - z = T_6 z, \end{cases}$$

je nachdem die Coefficienten von S modulo 2 das durch die Congruenzen 1)—6) (S. 65) fixirte Verhalten zeigen.

Die sechs linearen Substitutionen (27) sind genau diejenigen, welche, wie in der Nr. 73 (Bd. I, S. 261 ff.) gezeigt wurde, auf die unabhängige Variable einer Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe angewandt, diese Differentialgleichung in eine ebensolche überführen, in welcher die α, β, γ mit den entsprechenden Grössen der ursprünglichen Differentialgleichung durch lineare Gleichungen (a. a. O. S. 262 oben) verknüpft sind. In unserem Falle

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 1$$

geht die Differentialgleichung (L) durch Anwendung dieser Substitutionen auf die unabhängige Variable in sich selbst über.

Wir hatten bereits in der Nr. 73 (Bd. I, S. 265) hervorgehoben, dass die sechs Substitutionen (27) eine Gruppe bilden und dass sie die verschiedenen Werthe des Doppelverhältnisses von vier Punkten bei den vierundzwanzig möglichen Permutationen derselben darstellen. Diese Deutung der sechs Substitutionen (27) lässt in dem uns jetzt beschäftigenden Falle eine interessante analytische Begründung zu, die uns zu weiteren Untersuchungen hinleiten wird.

Gehen wir nämlich von einer beliebigen ganzen Function vierten Grades mit von einander verschiedenen Nullstellen a_1, a_2, a_3, a_4,

$$f(\xi) = (\xi - a_1)(\xi - a_2)(\xi - a_3)(\xi - a_4)$$

aus, und transformiren das elliptische Integral erster Gattung

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}}$$

durch die Substitution

$$(\mathrm{I})\qquad x = \frac{a_2 - a_3}{a_2 - \xi} : \frac{a_1 - a_3}{a_1 - \xi},$$

so verwandelt sich dasselbe in

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}},$$

d. h. in die von uns stets benutzte Normalform, und das Quadrat des Moduls z erhält den Werth

(II) $$z = \frac{a_1 - a_4}{a_1 - a_3} : \frac{a_2 - a_4}{a_2 - a_3}.$$

Es wird also z gleich dem Doppelverhältnisse der beiden Punkte a_1, a_2 in Bezug auf die beiden Punkte a_4, a_3.

Permutiren wir nun in dem Ausdrucke (I) die vier Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 auf alle möglichen Arten, so erhalten wir neue Normalformen des gegebenen elliptischen Integrals, die offenbar durch lineare Transformationen der Integrationsvariabeln aus einander hervorgehen. Die entsprechenden Quadrate der Moduln gehen dann aus z gerade durch die sechs Substitutionen (27) hervor, so dass also die sechs Ausdrücke

$$z, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{z}{z-1}, \quad \frac{z-1}{z}, \quad \frac{1}{1-z}, \quad 1-z$$

die sechs verschiedenen Werthe des Quadrates des Moduls darstellen, die zu einem und demselben elliptischen Gebilde gehören.

Nun ist das Doppelverhältniss von vier Punkten ein rein geometrischer Begriff, der von der Wahl des Coordinatensystems unabhängig ist. Deuten wir in üblicher Weise die Variable ξ geometrisch durch die Punkte einer geraden Linie, indem wir

$$\xi = \frac{\xi_1}{\xi_2}$$

setzen und ξ_1, ξ_2 als die mit bestimmten constanten Factoren multiplicirten Abstände eines Punktes unserer Geraden von zwei festen Fundamentalpunkten auffassen, so entspricht einer Aenderung der beiden Fundamentalpunkte, d. h. einer Aenderung des Coordinatensystems auf der Geraden, die Ausübung einer linearen Substitution

(III) $$\begin{cases} \alpha\xi_1 + \beta\xi_2, \\ \gamma\xi_1 + \delta\xi_2 \end{cases}$$

mit nicht verschwindender Determinante auf die ξ_1, ξ_2.

Die vier Punkte

$$\xi = a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4$$

werden durch die biquadratische Form

(IV) $$\xi_2^4 f(\xi) = \alpha_0\xi_1^4 + 4\alpha_1\xi_1^3\xi_2 + 6\alpha_2\xi_1^2\xi_2^2 + 4\alpha_3\xi_1\xi_2^3 + \alpha_4\xi_2^4,$$

deren Nullstellen sie sind, gegeben, ihr Doppelverhältniss z muss also ungeändert bleiben, wenn wir von der Form (IV) durch die lineare Substitution (III) zu einer neuen Form übergehen. D. h. mit anderen Worten, das Doppelverhältniss, oder genauer, die sechs Werthe (27)

desselben sind **absolute Invarianten** für die linearen Transformationen (III), also absolute Invarianten im gewöhnlichen formentheoretischen Sinne.

Nun hat die biquadratische Form (IV) bekanntlich die beiden von einander unabhängigen ganzen rationalen Invarianten

$$g_2 = \alpha_0\alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2^2,$$

$$g_3 = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{vmatrix},$$

die erstere vom Gewichte 4, die letztere vom Gewichte 6, aus dene sich die Discriminante Δ in der Form

$$\Delta = g_2^3 - 27\, g_3^2$$

zusammensetzt. Es ist dann Δ vom Gewicht 12, also

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta} = 1 + \frac{27\, g_3^2}{\Delta}$$

eine absolute (rationale) Invariante der Form (IV). Drückt man g_2, durch die Wurzeln a_1, a_2, a_3, a_4 der Form (IV) aus, so ergiebt si

$$(28) \qquad J = \frac{4(1 - z + z^2)^3}{27\, z^2(1 - z)^2},$$

und man erkennt leicht, dass die Wurzeln der Gleichung sechste Grades, der hiernach z als Function von J genügt, genau durch d sechs Grössen (27) dargestellt werden.

Die rationale Function J von z hat folglich die Eige schaft, ungeändert zu bleiben, wenn man auf z die sec linearen Substitutionen (27) ausübt.

277. Zwei neue eindeutig umkehrbare Dreiecksfunctionen, von dene die eine algebraisch ist. Discussion dieser algebraischen Function

Setzen wir nun in die Gleichung (28) für z seinen Werth a Function von τ ein, so verwandelt sich J in eine ebenfalls eindeuti Function von τ

$$J(\tau),$$

diese Function hat zufolge des Satzes der Nr. 276 (S. 68) u des eben ausgesprochenen Theorems die Eigenschaft, u geändert zu bleiben, wenn man auf τ irgend eine Substituti der Gruppe M anwendet.

Fassen wir umgekehrt τ als Function von J auf, so geschieht dies am zweckmässigsten, wenn wir erst τ als Function von z und dann z als Function von J betrachten. Zu einem willkürlichen (nicht singulären) Werthe von J gehören die sechs Werthe (27) von z; dem Werthe

$$T_\varkappa z$$

entsprechen dann vermöge der Gleichung

$$T_\varkappa z = \Phi(A t_\varkappa \tau),$$

wo A irgend eine Substitution der Gruppe M_2 bedeutet, genau die aus τ durch die Substitutionen

$$M_2 t_\varkappa$$

hervorgehenden Werthe von τ. Also entsprechen einem willkürlichen Werthe von J genau die sämmtlichen aus τ durch die Substitutionen der Gruppe M hervorgehenden Werthe. D. h.:

Die Function $J(\tau)$ bleibt nicht nur bei den Substitutionen von M ungeändert, sondern wenn für ein τ' die Gleichung

$$J(\tau) = J(\tau')$$

besteht und τ einen willkürlichen Punkt der oberen Halbebene bedeutet, so geht τ' aus τ nothwendig durch eine Substitution von M hervor.

Wir sind hier auf zwei Functionen der absoluten Invariante J geführt worden. Die eine, z, ist eine algebraische und hat die Eigenschaft, dass ihre sämmtlichen Zweige durch einen derselben mit Hülfe der Formeln (27) dargestellt werden, d. h. also mittelst der Substitutionen einer endlichen projectiven Gruppe, die andere, τ, ist eine transcendente von der Beschaffenheit, dass ihre sämmtlichen Zweige aus einem derselben durch die Substitutionen der projectiven Gruppe M hervorgehen. Beiden Functionen gemeinsam ist die Eigenschaft, dass ihre Umkehrungsfunction eindeutig ist.

Wir schliessen hieraus zunächst (ähnlich wie in der Nr. 215, Bd. II, 1, S. 338), dass für beide Functionen die Schwarz'schen Ableitungen

$$\Delta\binom{z}{J}, \quad \Delta\binom{\tau}{J}$$

eindeutige Functionen von J sind; insbesondere muss, da z eine algebraische Function von J ist,

$$\Delta\binom{z}{J} = r(J) \tag{29}$$

eine rationale Function von J sein.

Ferner ist aber nach Nr. 180 (Bd. II, 1, S. 184)

$$\Delta\binom{\tau}{J} = \Delta\binom{\tau}{z}\frac{1}{\left(\frac{dJ}{dz}\right)^2} + \Delta\binom{z}{J},$$

also muss, da in unserem Falle (vergl. die Gleichg. (3), (5) der Nr. 268, S. 32, worin $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ zu nehmen sind)

$$(30) \qquad \Delta\binom{\tau}{z} = -\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{z(1-z)}\right\} = q_0(z)$$

ist, der Ausdruck

$$(31) \qquad \Delta\binom{\tau}{J} = Q(J)$$

jedenfalls eine algebraische Function von J und demnach ebenfalls eine rationale Function von J sein. Es handelt sich nun um die Bestimmung der beiden rationalen Functionen

$$r(J), \quad Q(J).$$

Von den sechs Wurzeln der Gleichung (28) können zwei mit- einander identisch sein:

1) für $z = 1$. Dann ist

$$z = T_2 z = 1, \quad T_3 z = T_5 z = \infty, \quad T_4 z = T_6 z = 0, \quad J = \infty,$$

die Determinante Δ der biquadratischen Form (IV) verschwindet, d. h. es fallen zwei ihrer Wurzeln zusammen;

2) wenn das Doppelverhältniss der vier Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 den Werth -1 hat, d. h. wenn die vier Punkte harmonisch liegen, dann ist etwa

$$z = T_6 z = \frac{1}{2}, \quad T_2 z = T_5 z = 2, \quad T_3 z = T_4 z = -1, \quad J = 1;$$

3) wenn das Doppelverhältniss ein äquianharmonisches ist, dann ist z. B.

$$\left.\begin{aligned} z = T_4 z = T_5 z &= \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) = \varepsilon \\ T_2 z = T_3 z = T_6 z &= \tfrac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) = 1 - \varepsilon \end{aligned}\right\} J = 0.$$

Also sind die Punkte

$$J = 0,\ 1,\ \infty$$

die einzigen Verzweigungspunkte der algebraischen Function z von [J], und zwar ist in der Umgebung von $J = 1$ und von $J = \infty$ jeder Zw[eig] von z nach positiven ganzen Potenzen von

$$(J-1)^{\frac{1}{2}} \text{ beziehungsweise } \left(\frac{1}{J}\right)^{\frac{1}{2}},$$

und in der Umgebung von $J = 0$ nach ebensolchen Potenzen von

$$J^{\frac{1}{3}}$$

entwickelbar.

Hieraus schliessen wir, dass die Differentialgleichung (29) den Quotienten zweier Integrale einer Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe definirt, d. h. dass die Function z von J eine Dreiecksfunction (Nr. 270, S. 44) ist; und zwar haben wir, wie eben gefunden wurde,

$$\delta_1 = \frac{1}{3}, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}, \quad \delta_3 = \frac{1}{2}, \tag{32}$$

d. h. z ist nichts anderes, wie

$$z = s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, J\right),$$

und die rechte Seite der Differentialgleichung (29) lautet nach Gleichung (3) der Nr. 268 (S. 32)

$$r(J) = \frac{1}{4}\left\{-\frac{8}{9}\,\frac{1}{J^2} - \frac{3}{4}\,\frac{1}{(1-J)^2} - \frac{8}{9}\,\frac{1}{J(1-J)}\right\}.$$

Wir haben also auf diese Weise einen Fall kennen gelernt, in welchem die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe algebraisch integrirbar und überdies so beschaffen ist, dass die unabhängige Variable J als rationale Function des Integralquotienten z erscheint.

Wenn wir uns in der z-Ebene die reguläre Vierecks- beziehungsweise Dreieckstheilung denken, die die Abbildung der J-Ebene durch die verschiedenen Zweige der z-Function liefert, so kann dieselbe, da z eine sechswerthige Function von J ist, nur aus sechs Vierecken bestehen. Die J-Ebene werde wieder durch die beiden von 0 und 1 aus längs der realen Axe nach dem Unendlichen hin gelegten Querschnitte l_1, l_2 zerschnitten, dann haben wir also als Begrenzungslinien der sechs Vierecke diejenigen Curven der z-Ebene, die den beiden Ufern von l_1, l_2 entsprechen und als Diagonalen die den realen Werthen von J zwischen 0 und 1 entsprechenden z-Curven. Wenn wir also überhaupt die z-Curven construiren, die realen J-Werthen entsprechen, so erhalten wir die Theilung der z-Ebene in zwölf Dreiecke, die abwechselnd die Abbildungen der oberen und unteren J-Halbebene darstellen.

Nun ist aber offenbar nach Gleichung (28) J für reale Werthe von z ebenfalls real; wir können also immer bestimmte Zweige z so fixiren, dass für gewisse reale Werthe von J die Werthe dieser Zweige real ausfallen, d. h. die reale z-Axe ist in ihrer ganzen Ausdehnung Begrenzung der Dreieckstheilung. Bilden wir nun die der realen z-Axe entsprechende Spiegelung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{z}$$

und setzen dieselbe mit allen Substitutionen der Monodromiegruppe

$$(1,\ T_2,\ T_3,\ T_4,\ T_5,\ T_6)$$

der Function z von J zusammen, so müssen in der Form

$$T_\varkappa \bar{z}$$

alle Spiegelungen über die Seiten unserer Dreieckstheilung enthalten sein. Wir erhalten folglich alle diese Seiten, wenn wir diejenigen Curven

$$z = T_\varkappa \bar{z}$$

nehmen, die reale Kreise darstellen. Dies ist für $\varkappa = 1, 2, 3, 6$ der Fall, und zwar haben wir

$$\begin{aligned} &\text{für} \quad \varkappa = 2, \quad && z\bar{z} = 1, \\ &\text{für} \quad \varkappa = 3, \quad && (z-1)(\bar{z}-1) = 1, \\ &\text{für} \quad \varkappa = 6, \quad && z + \bar{z} = 1, \end{aligned}$$

so dass also die in der Fig. 21 dargestellte Theilung der z-Ebene i

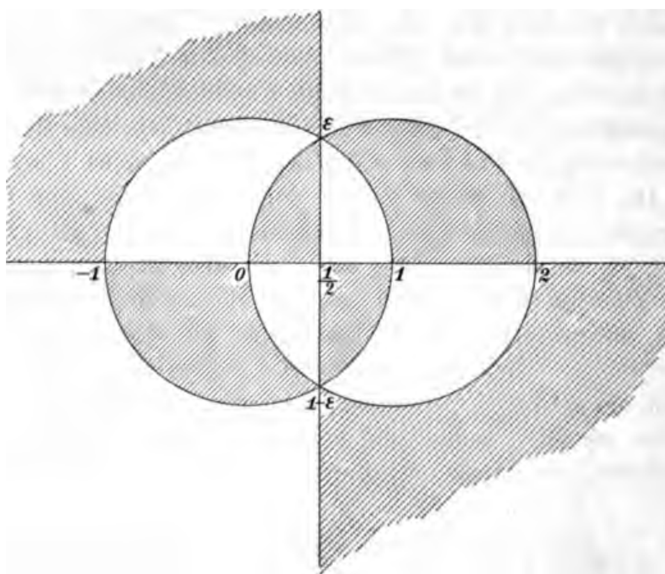


Fig. 21.

zwölf Kreisbogendreiecke entsteht. Als Ecken erscheinen die Pun

$$\infty,\ -1,\ 0,\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ 2,\ \varepsilon,\ 1-\varepsilon,$$

und wir wissen nach dem Vorhergehenden schon, wie sich dieselben auf die singulären Punkte

$$J = 0,\ 1,\ \infty$$

vertheilen.

Betrachten wir z. B. das Dreieck

$$\left(1,\ \frac{1}{2},\ 1-\varepsilon\right),$$

so entsprechen den Ecken desselben in der angegebenen Reihenfolge die Punkte

$$J = \infty,\ 1,\ 0,$$

also ist das Dreieck selbst die Abbildung der unteren J-Halbebene, und folglich das Spiegelbild desselben in Bezug auf die Seite $\left(\frac{1}{2},\ 1-\varepsilon\right)$, die den realen J-Werthen zwischen 0 und 1 entspricht, d. h. das Dreieck

$$\left(\frac{1}{2},\ 1-\varepsilon,\ 0\right)$$

die Abbildung der oberen J-Halbebene. Das durch Vereinigung dieser beiden Dreiecke entstehende Viereck

$$\left(0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 1-\varepsilon\right)$$

ist demnach die Abbildung der durch die Querschnitte l_1, l_2 zerschnittenen J-Ebene, und die Substitution

$$T_4 z,$$

durch welche die dem negativen Ufer von l_1 entsprechende Seite $(1,\ 1-\varepsilon)$ in die dem positiven Ufer von l_1 entsprechende $(0,\ 1-\varepsilon)$ transformirt wird, ist diejenige, welche der betrachtete z-Zweig erfährt, wenn J den Querschnitt l_1 einmal in positiver Richtung überschreitet. Ebenso erleidet z die die Seite $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ in $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ transformirende Substitution

$$T_6 z,$$

wenn J den Querschnitt l_2 einmal in positiver Richtung überschreitet. Damit ist nun die Verzweigungsart der Function z von J vollständig charakterisirt.

278. Discussion der absoluten Invariante J als Function des Periodenquotienten.

Wir könnten jetzt mittelst der Formel

$$Q(J) = q_0(z)\left(\frac{dz}{dJ}\right)^2 + r(J)$$

die rechte Seite der Differentialgleichung (31) ausrechnen, ziehen es aber vor, die Form von $Q(J)$ durch functionentheoretische Betrachtungen zu bestimmen.

Zunächst ist evident, dass die einzigen singulären Stellen der Function τ von J die Punkte

$$J = 0,\ 1,\ \infty$$

sind, so dass also τ ebenfalls eine Dreiecksfunction von J ist. Es handelt sich nur noch um die Bestimmung der entsprechenden Werthe von δ_1, δ_2, δ_3.

Die Abbildung der zerschnittenen J-Ebene auf die τ-Ebene wird nach den allgemeinen Erörterungen der Nummern 269 und 270 ein Kreisbogenviereck sein, welches durch die den realen J-Werthen zwischen 0 und 1 entsprechende Diagonale in zwei symmetrische Kreisbogendreiecke zerfällt. Die Winkel eines solchen Kreisbogendreiecks sind die mit π multiplicirten δ_1, δ_2, δ_3. Durch successive Spiegelungen dieses Kreisbogendreiecks erhalten wir die der Function J entsprechende Theilung in der τ-Ebene, und diese muss so beschaffen sein, dass je sechs Dreiecke derselben sich zu einem Dreiecke der der Function z entsprechenden Theilung zusammenfügen.

Nehmen wir also z. B. das Ausgangsdreieck $(-1, 0, \infty)$ der Fig. 20 (S. 47), welches die Abbildung der unteren z-Halbebene darstellt, so muss dasselbe entsprechend der Theilung der unteren z-Halbebene in sechs Kreisbogendreiecke, wie sie in der Fig. 21 dargestellt ist, in sechs Dreiecke der der Function J entsprechenden Theilung der τ-Ebene zerfallen. Wir können die τ-Curven, die den Begrenzungscurven der in der z-Ebene gefundenen Theilung entsprechen, sofort angeben.

Zunächst entsprechen, wie wir bereits wissen, den Werthen von z auf der realen Axe die Seiten

$$\tau + \bar{\tau} = 0, \quad \tau + \bar{\tau} = -2, \quad 2\tau\bar{\tau} + \tau + \bar{\tau} = 0$$

des Ausgangsdreieckes der τ-Ebene. Ferner ist für den Einheitskreis

$$z\bar{z} = 1$$

der z-Ebene

$$\bar{z} = \frac{1}{z},$$

also für die entsprechenden τ-Werthe, da nach den Formeln der Nr. 275 (S. 64)

$$\bar{z} = \Phi(-\bar{\tau}), \quad \frac{1}{z} = \Phi\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)$$

gefunden wird,

$$-\bar{\tau} = \frac{\tau}{\tau+1},$$

oder allgemeiner

$$-\bar{\tau} = A\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right),$$

wo A eine Substitution der Gruppe M_2 bedeutet. Also entspricht dem Einheitskreise der z-Ebene z. B. der Kreis

(33) $$\tau\bar{\tau} + \bar{\tau} + \tau = 0$$

der τ-Ebene. Für den Kreis

$$(z-1)(\bar{z}-1) = 1$$

der z-Ebene haben wir

$$\bar{z} = \frac{z}{z-1},$$

also lauten, da

$$\bar{z} = \Phi(-\bar{\tau}), \quad \frac{z}{z-1} = \Phi(\tau+1)$$

ist, die Gleichungen der entsprechenden Curven der τ-Ebene

$$-\bar{\tau} = A(\tau+1),$$

wir erhalten also für $A = 1$ die Gerade

(34) $$\tau + \bar{\tau} = -1.$$

Endlich ist für

$$z + \bar{z} = 1, \quad \bar{z} = 1 - z,$$

also haben wir, da

$$\bar{z} = \Phi(-\bar{\tau}), \quad 1 - z = \Phi\left(\frac{-1}{\tau}\right)$$

ist, als Gleichungen der entsprechenden τ-Curven

$$-\bar{\tau} = A\left(\frac{-1}{\tau}\right)$$

und für $A = 1$ insbesondere

(35) $$\tau\bar{\tau} = 1.$$

In der Fig. 22 sind die Curven (33), (34), (35) nebst ihren Spiegelbildern in Bezug auf die laterale τ-Axe in den Fundamentalbereich der Function z von τ eingezeichnet; wir sehen, in welcher Weise der Fundamentalbereich, entsprechend der in der Fig. 21 dargestellten Theilung der z-Ebene, in zwölf Kreisbogendreiecke der der Function J entsprechenden Theilung zerfällt, auch ist sofort zu erkennen, wie die Dreiecke der Figuren 21 und 22 einander gegenseitig entsprechen. Nehmen wir z. B. das Dreieck $\left(1, \frac{1}{2}, 1-\varepsilon\right)$ der unteren z-Halbebene, so entspricht demselben das Dreieck $(0, i, \varepsilon - 1)$ der τ-Ebene, ebenso dem Dreiecke $\left(0, \frac{1}{2}, 1-\varepsilon\right)$ der z-Ebene das Dreieck $(\infty, i, \varepsilon - 1)$ der τ-Ebene. Also stellt das Dreieck $(0, i, \varepsilon - 1)$ der τ-Ebene die Abbildung der unteren, sein Spiegelbild $(\infty, i, \varepsilon - 1)$ in Bezug auf die Seite $(i, \varepsilon - 1)$ die Abbildung der oberen J-Halbebene dar;

und zwar entspricht die Ecke $\varepsilon - 1$ dem Punkte $J = 0$, die Ecke i dem Punkte $J = 1$, während die Ecken ∞ und 0 dem Punkte $J = 0$ zugehören. Wir haben folglich in den Winkeln bei $0, i, \varepsilon - 1$ die Werthe von

$$\pi\delta_3, \quad \pi\delta_2, \quad \pi\delta_1,$$

d. h. es ist

$$\pi\delta_3 = 0, \quad \pi\delta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \pi\delta_1 = \frac{\pi}{3},$$

die Function τ von J stellt sich demnach in der Form

$$\tau = s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0, J\right)$$

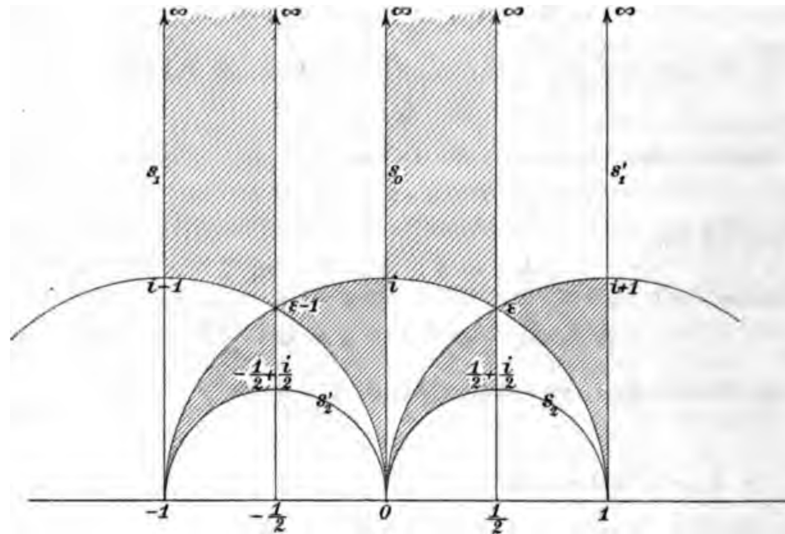


Fig. 22.

dar, und die rechte Seite der Differentialgleichung (31) lautet

$$Q(J) = \frac{1}{4}\left\{-\frac{8}{9}\frac{1}{J^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{(1-J)^2} - \frac{23}{36}\frac{1}{J(1-J)}\right\}.$$

Die Fundamentalsubstitutionen, die τ bei einfachen Umläufen von J um die singulären Punkte $0, 1, \infty$ erleidet, lassen sich auch sofort angeben. Wenn J den Querschnitt l_1 einmal in positiver Richtung überschreitet, so erfährt τ die Substitution

$$A_1 = \frac{\tau + 1}{-\tau},$$

welche die dem negativen Ufer von l_1 entsprechende Seite $(0, \varepsilon - 1)$ in die dem positiven Ufer von l_1 entsprechende Seite $(\infty, \varepsilon - 1)$ überführt, und ebenso verwandelt sich τ in

$$A_2 = \frac{-1}{\tau},$$

renn J den Querschnitt l_2 einmal in positiver Richtung durchquert, reil diese Substitution die dem negativen Ufer von l_2 entsprechende Seite (∞, i) in die dem positiven Ufer von l_2 entsprechende Seite $(0, i)$ iberführt. In Uebereinstimmung mit den allgemeinen Ergebnissen der Nr. 269 (S. 39) setzen sich die Substitutionen A_1, A_2 aus den den eiten des Dreiecks $(0, i, \varepsilon - 1)$ entsprechenden Spiegelungen

$$B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

der Form

$$A_1 = B_0 B_{-1}, \quad A_2 = B_2 B_0$$

usammen. Das Kreisbogenviereck

$$(\infty, \varepsilon - 1, 0, i, \infty),$$

elches in unserem Falle, wo die beiden Seiten $(0, i)$ und (i, ∞) in ne Gerade fallen, eigentlich ein Kreisbogendreieck ist, stellt die eindeutig conforme Abbildung der durch die Querschnitte l_1, l_2 zerschnittenen J-Ebene dar. Durch Anwendung der Substitutionen von M auf esen Fundamentalbereich oder durch successive Spiegelung des usgangsdreiecks $(0, i, \varepsilon - 1)$, ergiebt sich die der Function J tsprechende Theilung der oberen τ-Halbebene.

9. Beziehungen zur Theorie der binären quadratischen Formen it negativer Discriminante. Uebersicht über die im gegenwärtigen Abschnitte erlangten Resultate.

Wenn wir die J-Ebene nicht durch die Querschnitte l_1, l_2, sondern urch einen von 1 über 0 nach ∞ längs der realen Axe hin erstreckten chnitt zerschneiden, so kann als das Abbild der so zerschnittenen -Ebene das Viereck

$$(\infty, \varepsilon - 1, i, \varepsilon, \infty) = \mathfrak{F}_0$$

ngesehen werden, welches aus unserem bisherigen Fundamentalbereiche urch erlaubte Abänderung (Nr. 210, Bd. II, 1, S. 315) hervorgeht. Die correspondirenden Seiten dieses neuen Fundamentalbereiches gehen lurch die beiden Substitutionen

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on denen wir in der Nr. 275 (S. 64) ausgegangen waren, in einander iber, auch knüpft sich an diese Gestalt des Fundamentalbereiches eine owohl sachlich als auch historisch bemerkenswerthe Beziehung zwischen

unserer Theorie und der arithmetischen Theorie der binären quadratischen Formen, wie sie Gauss zuerst systematisch entwickelt hat.

Betrachten wir nämlich eine quadratische Form

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (a, b, c),$$

wo a, b, c ganze Zahlen sind. Setzen wir

$$a\tau^2 + 2b\tau + c = 0,$$

so ist

$$\tau = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a},$$

wo wir mit

$$D = b^2 - ac$$

die Discriminante (nach Gauss den Determinanten) der quadratischen Form bezeichnet haben.

Sei D negativ und wählen wir z. B. τ als einen Punkt der oberen Halbebene, sei ferner

$$a > 0, \quad c > 0,$$

d. h. die Form eine positive; dann ist durch Angabe von τ und D die Form vollkommen bestimmt. D. h. unter den positiven Formen, die zu einer bestimmten negativen Discriminante gehören, wird jedes Individuum durch den zugehörigen Werth von τ vollkommen bestimmt.

Geht man durch eine Substitution der Gruppe M

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

zu der dem τ' entsprechenden Form (a', b', c') über, so ist

$$a'(\alpha x + \beta y)^2 + 2b'(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) + c'(\gamma x + \delta y)^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

d. h. die Formen

$$(a, b, c), \quad (a', b', c')$$

sind in der Bezeichnung von Gauss eigentlich äquivalent. Wenn innerhalb des Fundamentalbereiches $\mathfrak{F}_0$ liegt, so muss für die entsprechende Form

$$c \geqq a \geqq 2\,|b|$$

sein, d. h. die Form ist im Sinne von Gauss eine reducirte. Auf Grund dieser Bemerkungen lassen sich nun die von Gauss arithmetisch bewiesenen Sätze über die Aequivalenz quadratischer Formen mit negativer Discriminante ohne weiteres aus den Eigenschaften der der Function J oder der Gruppe M entsprechenden Theilung der oberen τ-Halbebene ablesen. Auch die uneigentliche Aequivalenz findet ihre Interpretation durch die mit einer Spiegelung in Bezug auf eine Seite des entsprechenden Bereiches componirten Substitutionen von M

Diesen Zusammenhang der Theorie der Function

$$z = \Phi(\tau)$$

mit der Theorie der quadratischen Formen hat Gauss selbst bemerkt, wie aus den nachgelassenen Aufzeichnungen, besonders den Bemerkungen auf S. 386 und 477, 478 des dritten Bandes der von Herrn Schering herausgegebenen „Gesammelten Werke von C. F. Gauss" deutlich hervorgeht.

Unsere von der Betrachtung der Differentialgleichung (L) ausgehenden Untersuchungen haben uns zu drei Fällen von Dreiecksfunctionen geführt, für welche die Umkehrungsfunction eine eindeutige war. Zwei von diesen Fällen, nämlich

$$\tau = s(0,\ 0,\ 0,\ z),$$

$$\tau = s\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 0,\ J\right),$$

lieferten transcendente Umkehrungsfunctionen, die nur für Punkte der oberen τ-Halbebene, oder allgemeiner, wenn

$$\eta = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$$

einen beliebigen Integralquotienten bedeutet, innerhalb eines gewissen Kreises existirten. Dieser Kreis ergab sich für die Function

$$\tau = s(0,\ 0,\ 0,\ z)$$

als der Orthogonalkreis der drei Seiten des Ausgangsdreiecks. Offenbar hat er aber auch für die andere Function

$$\tau = s\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 0,\ J\right)$$

dieselbe Bedeutung; denn für die τ-Ebene, wo jener Kreis in die reale Axe degenerirt, schneidet derselbe die drei Seiten des Ausgangsdreiecks der Function J in der That unter rechten Winkeln, das Gleiche findet also auch in der Ebene eines beliebigen Integralquotienten η statt, da die Abbildung durch die monogene Function

$$\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$$

eine winkeltreue ist.

Von besonderem Interesse ist der Umstand, dass die projectiven Gruppen M, M_2, die auf das Argument τ der beiden Functionen J beziehungsweise z angewandt dieselben nicht verändern, in einfacher Weise arithmetisch charakterisirt werden können. Wir heben noch ausdrücklich hervor, dass zufolge der Sätze der Nr. 215 (Bd. II, 1, S. 336) jede eindeutige Function von τ, die bei den Substitutionen von M_2 ungeändert bleibt und innerhalb des Fundamentalbereiches das

Verhalten einer rationalen Function zeigt, rational durch z, und jede eindeutige Function von τ, die die Substitutionen von M zulässt und innerhalb des entsprechenden Fundamentalbereiches den Charakter einer rationalen Function besitzt, rational durch J ausdrückbar ist.

Die elliptische Modulfunction

$$z = \Phi(\tau)$$

ist zuerst von Herrn Hermite als selbstständige Transcendente in die Analysis eingeführt worden und spielt bei den auf die Transformation der elliptischen Functionen bezüglichen Untersuchungen eine fundamental wichtige Rolle. Ihre grosse Bedeutung für die Theorie der durch die allgemeine Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe definirten Function wird später hervortreten.

Von wesentlich anderem Charakter als die beiden eben erwähnten Dreiecksfunctionen ist die dritte

$$z = s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, J\right),$$

die den Uebergang zwischen den beiden ersten vermittelt. Ihre Umkehrung ist rational und existirt demzufolge in der ganzen unendlichen z-Ebene, d. h. für alle complexen Werthe der unabhängigen Variabeln. Die aus dem Ausgangsdreiecke $\left(1, \frac{1}{2}, 1-\varepsilon\right)$ der Fig. 21 durch successive Spiegelung entstehenden Dreiecke erfüllen die ganze z-Ebene, nicht wie in den beiden ersten Fällen der Functionen z und J von — nur das Innere eines Kreises. Es liegt dies daran, dass im Falle der Function J von z ein Orthogonalkreis für die drei Seiten des Ausgangsdreiecks nicht vorhanden ist.

Diese Bemerkung liefert uns einen Fingerzeig für die Untersuchung der allgemeinen Dreiecksfunction

$$\eta = s(\delta_1, \delta_2, \delta_3, z),$$

in welcher δ_1, δ_2, δ_3 reciproke ganze Zahlen oder Null sind, und die, wie wir wissen, alle Fälle liefern muss, in denen die Umkehrungsfunction z von η eindeutig ist. Wir wenden uns jetzt dieser allgemeinen Untersuchung zu.

Vierzehnter Abschnitt.

Theorie der eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunctionen.

Erstes Kapitel.

280. Einige geometrische Sätze über Kreise.

Wir beginnen mit einigen einfachen geometrischen Betrachtungen. Seien drei Kreise in der η-Ebene gegeben

$$k_0 = \eta\bar{\eta} + a_0\eta + \bar{a}_0\bar{\eta} + b_0 = 0,$$
$$k_1 = \eta\bar{\eta} + a_1\eta + \bar{a}_1\bar{\eta} + b_1 = 0,$$
$$k_2 = \eta\bar{\eta} + a_2\eta + \bar{a}_2\bar{\eta} + b_2 = 0,$$

wo a_0, a_1, a_2 beliebige complexe, b_0, b_1, b_2 reale Grössen bedeuten, und betrachten wir mit Hesse die Gesammtheit von Kreisen, die durch die Formel

(I) $$\alpha k_0 + \beta k_1 + \gamma k_2 = 0$$

für willkürliche reale α, β, γ dargestellt werden, so gehören die gemeinsamen Secanten je zweier dieser Kreise dem durch die Gleichung

$$k_0 - k_1 + \lambda(k_0 - k_2) = 0$$

dargestellten Strahlenbüschel an, wo λ einen realen Parameter bedeutet. Der Mittelpunkt oder Träger dieses Strahlenbüschels ist folglich nach bekannten geometrischen Sätzen so beschaffen, dass die Länge der von ihm aus an die Kreise (I) gelegten Tangenten für alle diese Kreise dieselbe ist, d. h. wenn wir die Coordinaten dieses Punktes mit m, n bezeichnen und

$$\eta_0 = m + ni$$

setzen, so ist η_0 der Mittelpunkt desjenigen Kreises, der die sämmtlichen Kreise (I) unter rechtem Winkel schneidet.

Das Quadrat des Radius dieses, wie wir ihn nennen wollen, Orthogonalkreises wird durch den Ausdruck

$$c = \eta_0\bar{\eta}_0 + a_0\eta_0 + \bar{a}_0\bar{\eta}_0 + b_0 = \eta_0\bar{\eta}_0 + a_1\eta_0 + \bar{a}_1\bar{\eta}_0 + b_1 = \eta_0\bar{\eta}_0 + a_2\eta_0 + a_2\bar{\eta}_0 + b_2$$

gegeben. Je nachdem dieser Ausdruck positiv oder negativ ist, besitzt die Kreisschaar (I) einen realen oder einen imaginären Orthogonalkreis; wenn c verschwindet, so schrumpft der Orthogonalkreis auf einen einzigen Punkt, den Punkt η_0 zusammen, in welchem sich dann die sämmtlichen Kreise (I) schneiden. Wenn für $c = 0$ der Punkt η_0 insbesondere noch in's Unendliche rückt, so degeneriren die Kreise (I) in die sämmtlichen geraden Linien der Ebene.

Wir werden im Folgenden nicht nur mit realen, sondern auch mit imaginären Kreisen zu operiren haben, und setzen darum fest, dass wir unter einem imaginären Kreise stets die Gesammtheit von imaginären Punkten der η-Ebene verstehen, die einer Gleichung von der Form

$$d\eta\bar{\eta} + a\eta + \bar{a}\bar{\eta} + b = 0$$

genügen, wo a beliebig complex, b, d real und die Determinante

$$-a\bar{a} + bd > 0$$

ist. Ein imaginärer Kreis hat also stets einen realen Mittelpunkt, und das Quadrat des Radius ist eine negative Grösse.

Unter den Kreisen (I) ist allemal einer vorhanden, der mit dem Orthogonalkreise concentrisch ist. Sei die Gleichung des Orthogonalkreises

(II) $$(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c = 0,$$

so lautet die Gleichung des concentrischen, der Schaar (I) angehörigen Kreises

(III) $$(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) + c = 0.$$

Da ferner offenbar die beiden Geraden

(IV) $$\eta + \bar{\eta} = \eta_0 + \bar{\eta}_0,$$

(V) $$\eta - \bar{\eta} = \eta_0 - \bar{\eta}_0$$

den Kreis (II) unter rechtem Winkel schneiden, so gehören die drei Curven (III), (IV), (V) der Schaar (I) an; wir können folglich die Gesammtheit der den Kreis (II) rechtwinkelig schneidenden Kreise auch in der Form

(VI) $$\mathfrak{a}[(\eta-\eta_0)(\bar{\eta}-\bar{\eta}_0)+c]+\mathfrak{b}(\eta-\eta_0+\bar{\eta}-\bar{\eta}_0)-\mathfrak{c}\,i(\eta-\eta_0-\bar{\eta}+\bar{\eta}_0)=0$$

darstellen, wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ reale Constanten bedeuten.

Wenn drei reale Kreise gegeben sind, die sich in realen Punkten schneiden, so können wir die Bedingung für das Eintreffen der drei Fälle

$$c > 0, \quad c = 0, \quad c < 0$$

geometrisch dahin formuliren, dass die beiden Durchschnittspunkte zweier der gegebenen Kreise im ersten Falle zur selben Seite d

dritten (d. h. beide innerhalb oder beide ausserhalb) im letzten Falle zu verschiedenen Seiten des dritten (d. h. der eine innerhalb, der andere ausserhalb) gelegen sind, während im zweiten Falle die drei Kreise durch einen Punkt hindurchgehen.

Die drei Kreise begrenzen im Allgemeinen acht Kreisbogendreiecke mit hohlen Winkeln, die sich in vier Paare von Dreiecken mit gleichen Winkeln anordnen lassen. Bezeichnet man die Winkel des einen Paares mit

$$\pi\delta_1', \quad \pi\delta_2', \quad \pi\delta_3',$$

wo also δ_1', δ_2', δ_3' positive Zahlen bedeuten, die zwischen Null und Eins liegen, so sind die Winkel der drei anderen Paare durch

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} \pi\delta_1', & \pi(1-\delta_2'), & \pi(1-\delta_3'), \\ \pi(1-\delta_1'), & \pi\delta_2', & \pi(1-\delta_3'), \\ \pi(1-\delta_1'), & \pi(1-\delta_2'), & \pi\delta_3' \end{cases}$$

gegeben, und für das eine dieser vier Paare ist die Summe der drei Winkel ein Minimum. Wir bezeichnen die einem Dreiecke dieses Paares angehörenden Winkel durch

$$\pi\delta_1, \quad \pi\delta_2, \quad \pi\delta_3.$$

Man übersieht diese einfachen geometrischen Verhältnisse am besten, wenn man sich die η-Ebene durch eine lineare Function

$$\zeta = \frac{\lambda\eta + \mu}{\nu\eta + \varrho} \qquad (\lambda\varrho - \mu\nu \gtrless 0)$$

so auf eine ζ-Ebene abgebildet denkt, dass zweien der gegebenen Kreise der η-Ebene gerade Linien der ζ-Ebene entsprechen (vergl. die Fig. 23). Der Schnittpunkt μ_1 dieser beiden Geraden liegt dann im Falle eines realen Orthogonalkreises O $(c > 0)$ ausserhalb, im Falle eines imaginären Orthogonalkreises $(c < 0)$ innerhalb des dem dritten Kreise der η-Ebene entsprechenden Kreises der ζ-Ebene, während im Falle eines Orthogonalkreises mit verschwindendem Radius $(c = 0)$ auch dieser dritte Kreis der ζ-Ebene zur geraden Linie wird, wenn man dem gemeinsamen Punkte der drei Kreise der η-Ebene den Punkt $\zeta = \infty$ der ζ-Ebene entsprechen lässt. Man hat also für $c > 0$ in der That zwei Dreiecke mit den Winkeln

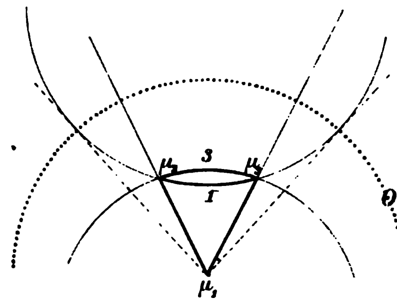


Fig. 23.

$$\pi\delta_1, \quad \pi\delta_2, \quad \pi\delta_3,$$

von denen das eine ganz im Innern, das andere ganz ausserhalb des Orthogonalkreises O liegt, zugleich übersieht man, dass in diesem Falle

$$\pi\delta_1 + \pi\delta_2 + \pi\delta_3 < \pi$$

sein muss. Für $c = 0$ tritt ein wirkliches Dreieck mit den Winkeln

$$\pi\delta_1, \quad \pi\delta_2, \quad \pi\delta_3$$

und der Winkelsumme

$$\pi\delta_1 + \pi\delta_2 + \pi\delta_3 = \pi$$

auf, endlich ist für $c < 0$

$$\pi\delta_1 + \pi\delta_2 + \pi\delta_3 > \pi.$$

281. **Arteintheilung der Dreiecksfunctionen.**

Betrachten wir die Dreiecksfunctionen, die den von drei Kreisen der η-Ebene begrenzten Kreisbogendreiecken entsprechen, so können wir uns, da wir hauptsächlich die Behandlung der Fälle im Auge haben, wo die Differenzen der Wurzeln der zu den singulären Punkten 0, 1, ∞ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen reciproke ganze Zahlen oder Null sind (vergl. Nr. 271, S. 45), darauf beschränken, als Ausgangsdreieck eines derjenigen zu nehmen, welche die kleinste Winkelsumme, also die Winkel

$$\pi\delta_1, \quad \pi\delta_2, \quad \pi\delta_3$$

besitzen. In der That lehrt ein Blick auf die Tabelle (α) (S. 85), dass, wenn eines der Dreiecke die Winkel

$$\frac{\pi}{g_1}, \quad \frac{\pi}{g_2}, \quad \frac{\pi}{g_3}$$

hat, wo g_1, g_2, g_3 von Eins verschiedene positive ganze Zahlen oder unendlich sind, die Winkelsumme in keinem der anderen Dreiecke einen kleineren Werth haben kann, so dass also in diesen Fällen

$$\frac{\pi}{g_1} = \pi\delta_1, \quad \frac{\pi}{g_2} = \pi\delta_2, \quad \frac{\pi}{g_3} = \pi\delta_3$$

ist. Wir können also sagen:

Die Dreiecksfunctionen

$$s(\delta_1, \delta_2, \delta_3, z),$$

wo die $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ reciproke positive ganze Zahlen oder Null sind, ordnen sich in drei Arten, je nachdem

$$1) \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 < 1,$$

$$2) \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1,$$

$$3) \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 > 1$$

ist. Die drei Kreise, welche die Seiten des Ausgangsdreiecks bilden, besitzen für die erste Art einen realen Orthogonalkreis mit nicht verschwindendem Radius, für die zweite schneiden sich die Dreiecksseiten in einem Punkte, auf den der Orthogonalkreis zusammenschrumpft, für die dritte ist der Orthogonalkreis imaginär. D. h. kurz ausgesprochen: für die drei Arten ist beziehungsweise

$$c > 0, \quad c = 0, \quad c < 0.$$

Wir hatten bereits in der Nr. 271 (S. 49) den Satz angemerkt und angewandt, dass die Spiegelung in Bezug auf einen Kreis jeden Orthogonalkreis desselben ungeändert lässt. Wir wollen durch eine einfache Rechnung zeigen, dass dieser Satz nicht nur für die realen, sondern auch für die imaginären Orthogonalkreise und für die mit verschwindendem Radius richtig ist.

Sei nämlich

$$(\beta) \qquad d\eta\bar{\eta} + a\eta + \bar{a}\bar{\eta} + b = d(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c = 0,$$

wo b, c, d real, d insbesondere nicht negativ, a beliebig complex ist, die Gleichung des gegebenen Kreises (der auch imaginär sein kann), dann lautet die Gleichung eines beliebigen, diesen Kreis rechtwinkelig schneidenden Kreises nach einer oben gemachten Bemerkung

$$(\gamma) \quad \mathfrak{a}[d(\eta-\eta_0)(\bar{\eta}-\bar{\eta}_0)+c]+\mathfrak{b}[\eta-\eta_0+\bar{\eta}-\bar{\eta}_0]-\mathfrak{c}i[\eta-\eta_0-\bar{\eta}+\bar{\eta}_0]=0.$$

Wenden wir in dieser Gleichung die dem gegebenen Kreise entsprechende Spiegelung

$$(\delta) \qquad d(\eta' - \eta_0) = \frac{c}{\bar{\eta} - \bar{\eta}_0}$$

an, so geht die Gleichung in der That in sich selbst über.

Denken wir uns nun in der η-Ebene das Ausgangsdreieck irgend einer Dreiecksfunction und die aus demselben durch wiederholte Spiegelungen entstandene Theilung, ebenso wie die entsprechende projective Monodromiegruppe ϑ gegeben.

Dann ist zunächst evident, dass die Seiten eines jeden Dreiecks der Theilung den Orthogonalkreis der drei Seiten des Ausgangsdreiecks unter rechtem Winkel schneiden, und zwar gleichgültig ob die betrachtete Dreiecksfunction der ersten, zweiten oder dritten Art angehört. Hieraus folgt aber nach dem vorhin bewiesenen Satze, dass jede Spiegelung in Bezug auf eine Seite irgend eines Dreiecks der Theilung den Orthogonalkreis in sich selbst transformirt. Wir haben also den Satz:

Der Orthogonalkreis der drei Seiten des Ausgangsdreiecks einer beliebigen Dreiecksfunction wird durch alle Substitu-

tionen der entsprechenden Monodromiegruppe ϑ in sich selbst übergeführt.

Im Falle wo die Dreiecksfunction der zweiten Art angehört, gehen also alle Seiten der entsprechenden Dreieckstheilung der η-Ebene durch einen und denselben Punkt $\eta = \eta_0$ hindurch, und dieser Punkt ist ein gemeinsamer Doppelpunkt aller Substitutionen der zugehörigen Monodromiegruppe ϑ.

282. Eigenschaften projectiver Substitutionen, die einen Kreis in sich selbst transformiren.

Wir müssen nun einige Eigenschaften der projectiven Substitutione

$$\eta' = A\eta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$$

kennen lernen, die einen Kreis (mit realem, imaginärem oder ve schwindendem Radius) in sich selbst transformiren. Wir wollen diese Kreis

$$(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c = 0$$

im Folgenden auch stets den Orthogonalkreis nennen und bezeichne denselben demgemäss mit O.

Die Gesammtheit der Substitutionen A, die den Kreis O in sic selbst überführen, bildet offenbar eine Gruppe, und zwar eine alg braische Untergruppe der projectiven Gruppe, die von zwei Paramete abhängt, da die Bedingung, dass der Kreis O bei einer Substitution ungeändert bleiben soll, eine algebraische Beziehung zwischen d Coefficientenverhältnissen der Substitution A festsetzt.

Setzen wir in die Gleichung von O an Stelle von η die Grösse ein, so erhalten wir nach Multiplication mit

$$(\gamma\eta + \delta)(\bar{\gamma}\bar{\eta} + \bar{\delta}) = |\gamma\eta + \delta|^2$$

die Gleichung

$$[\alpha\eta + \beta - \eta_0(\gamma\eta + \delta)][\bar{\alpha}\bar{\eta} + \bar{\beta} - \bar{\eta}_0(\bar{\gamma}\bar{\eta} + \bar{\delta})] - c(\gamma\eta + \delta)(\bar{\gamma}\bar{\eta} + \bar{\delta}) =$$

die mit der Gleichung von O übereinstimmen muss. Setzen wir a

$$\zeta = \eta - \eta_0,$$

$$\alpha_1 = \alpha - \eta_0\gamma, \quad \beta_1 = \beta + \eta_0(\alpha - \delta) - \eta_0^2\gamma, \quad \gamma_1 = \gamma, \quad \delta_1 = \delta + \eta_0$$

so ist

$$\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 = 1,$$

und es muss

$$\varrho(\zeta\bar{\zeta} - c) = (\alpha_1\zeta + \beta_1)(\bar{\alpha}_1\bar{\zeta} + \bar{\beta}_1) - c(\gamma_1\zeta + \delta_1)(\bar{\gamma}_1\bar{\zeta} + \bar{\delta}_1)$$

sein, wo ϱ einen von ζ unabhängigen Factor bedeutet.

Wir erhalten demnach die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho &= \alpha_1 \bar{\alpha}_1 - c\gamma_1 \bar{\gamma}_1, \\ 0 &= \alpha_1 \bar{\beta}_1 - c\gamma_1 \bar{\delta}_1, \\ 0 &= \bar{\alpha}_1 \beta_1 - c\bar{\gamma}_1 \delta_1, \\ -c\varrho &= \beta_1 \bar{\beta}_1 - c\delta_1 \bar{\delta}_1, \end{aligned}$$

woraus sich, wenn c von Null verschieden ist, entweder

$$\alpha_1 = -\bar{\delta}_1, \quad \beta_1 = -c\bar{\gamma}_1, \quad \varrho = -1$$

oder

$$\alpha_1 = \bar{\delta}_1, \quad \beta_1 = c\bar{\gamma}_1, \quad \varrho = 1$$

ergiebt, so dass also im ersten Falle

$$\text{(VII)} \quad (\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c = -|\gamma\eta + \delta|^2 [(\eta' - \eta_0)(\bar{\eta}' - \bar{\eta}_0) - c],$$

im zweiten Falle

$$\text{(VIII)} \quad (\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c = |\gamma\eta + \delta|^2 [(\eta' - \eta_0)(\bar{\eta}' - \bar{\eta}_0) - c]$$

sein muss. Wir bezeichnen die Substitutionen $A\eta$, je nachdem für dieselben die Gleichung (VII) oder (VIII) erfüllt ist, als negative beziehungsweise positive.

Für negative Werthe von c involvirt die Gleichung (VII) einen Widerspruch; im Falle eines imaginären Orthogonalkreises sind also alle projectiven Substitutionen, die diesen Kreis ungeändert lassen, positive.

Für positive Werthe von c, d. h. im Falle eines realen Orthogonalkreises O mit nicht verschwindendem Radius, haben die positiven Substitutionen offenbar die Eigenschaft, dass sie Punkte, die innerhalb von O liegen, wieder in Punkte innerhalb, und Punkte die ausserhalb von O liegen, in Punkte ausserhalb verwandeln, während durch eine negative Substitution Punkte im Innern von O in Punkte ausserhalb und umgekehrt übergeführt werden.

Wir werden es in der Theorie der Dreiecksfunctionen erster Art und ebenso auch in späteren allgemeineren Untersuchungen ausschliesslich mit positiven Substitutionen zu thun haben; in der That lässt sich leicht einsehen, dass die Substitutionen der zu einer Dreiecksfunction erster Art gehörigen Monodromiegruppe ϑ stets positive sind.

Wie wir schon in der Nr. 271 (S. 49) bemerkt haben, wird nämlich durch Spiegelung in Bezug auf einen Kreis jeder Punkt, der im Innern eines diesen Kreis rechtwinkelig schneidenden Kreises liegt, wieder in einen innern Punkt, und jeder Punkt der ausserhalb eines

solches Orthogonalkreises liegt, in einen äussern Punkt verwandelt. Man kann diesen geometrisch evidenten Satz auch analytisch sofort einsehen, denn wenn wir in der für die Variable η' geschriebenen linken Seite der Gleichung (γ) (Nr. 281, S. 87), die einen beliebigen, den Kreis (β) (ebenda) rechtwinkelig schneidenden Kreis darstellt, die der Spiegelung über den Kreis (β) entsprechende Substitution (δ) machen, so verwandelt sich diese linke Seite in sich selbst multiplicirt mit dem für positives c stets positiven Ausdrucke

$$\frac{c}{d(\eta-\eta_0)(\bar\eta-\bar\eta_0)},$$

so dass also die linke Seite der Gleichung (γ) für η' dasselbe Vorzeichen besitzt, wie für das Spiegelbild η von η' in Bezug auf den Kreis (β).

Wir haben also den allgemeinen Satz:

Substitutionen, die sich aus Spiegelungen in Bezug auf Kreise, die einen realen Kreis O rechtwinkelig schneiden, zusammensetzen, sind stets positive Substitutionen,

aus welchem die Richtigkeit der für die Monodromiegruppe der Dreiecksfunctionen aufgestellten Behauptung unmittelbar erhellt.

Um weitere Eigenschaften der Substitutionen A, die den Kreis O ungeändert lassen, zu erforschen, betrachten wir zunächst eine nicht parabolische Substitution A und denken uns dieselbe in der canonischen Form

$$\frac{\eta'-\lambda}{\eta'-\mu} = K\frac{\eta-\lambda}{\eta-\mu}$$

geschrieben. Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, dass der Nullpunkt der Mittelpunkt des Orthogonalkreises O sei, so dass also die Gleichung desselben

$$\eta\bar\eta - c = 0$$

lautet. Setzen wir dann

$$\zeta = \frac{\eta-\lambda}{\eta-\mu}, \qquad \zeta' = \frac{\eta'-\lambda}{\eta'-\mu},$$

so können wir die Gleichung von O in der Form

$$(\varepsilon) \qquad \frac{\mu\zeta-\lambda}{\zeta-1}\,\frac{\bar\mu\bar\zeta-\bar\lambda}{\bar\zeta-1} - c = 0$$

schreiben. Setzen wir hierin ζ' an die Stelle von ζ, so erhalten wir

$$\frac{\mu K\zeta-\lambda}{K\zeta-1}\cdot\frac{\bar\mu\bar K\bar\zeta-\bar\lambda}{\bar K\bar\zeta-1} - c = 0,$$

und diese Gleichung muss, da die Substitution A den Kreis O ungeändert lassen sollte, mit (ε) übereinstimmen. Dies liefert nach Entfernung der Nenner und durch Coefficientenvergleichung die Relation

$$\mu\bar{\mu} - c = \varrho(\mu\bar{\mu}K\bar{K} - cK\bar{K}),$$
$$\lambda\bar{\mu} - c = \varrho(\lambda\bar{\mu}\bar{K} - c\bar{K}),$$
$$\bar{\lambda}\mu - c = \varrho(\bar{\lambda}\mu K - cK),$$
$$\lambda\bar{\lambda} - c = \varrho(\lambda\bar{\lambda} - c),$$

wo ϱ einen jedenfalls nicht verschwindenden Proportionalitätsfactor bedeutet.

Wenn nun $c < 0$ ist, so muss jedenfalls

$$\lambda\bar{\lambda} \neq c, \quad \mu\bar{\mu} \neq c$$

sein, und wir haben folglich

$$\varrho = 1, \quad K\bar{K} = 1,$$

d. h. die Substitution A ist eine elliptische. Da ferner K nicht gleich Eins sein kann, muss

$$\lambda\bar{\mu} = c, \quad \bar{\lambda}\mu = c$$

sein, d. h. die Doppelpunkte μ, λ sind harmonische Pole (Spiegelbilder) in Bezug auf den imaginären Orthogonalkreis O.

Wenn $c > 0$ ist, und man hat

$$\lambda\bar{\lambda} \neq c,$$

so ist wiederum

$$\varrho = 1,$$

und wenn auch

$$\mu\bar{\mu} \neq c$$

ist, so ergiebt sich wie oben

$$K\bar{K} = 1, \quad \lambda\bar{\mu} = c, \quad \bar{\lambda}\mu = c,$$

die Substitution ist also wieder eine elliptische, und zwar ist sie, da ϱ den positiven Werth 1 hat, offenbar positiv; ihre Doppelpunkte sind harmonische Pole in Bezug auf den jetzt realen Orthogonalkreis O. Ist dagegen

$$\mu\bar{\mu} = c,$$

so kann nicht auch

$$\lambda\bar{\mu} = c$$

sein, da sonst $\lambda = \mu$ sein müsste. Also folgt

$$K = \bar{K} = \frac{1}{\varrho},$$

d. h. K ist real, die Substitution demnach im Allgemeinen hyperbolisch und nur für

$$K = -1, \quad \varrho = -1$$

elliptisch. Da K nicht gleich Eins sein kann, so muss auch

$$\lambda\bar{\lambda} = c$$

sein, d. h. die Doppelpunkte μ, λ liegen auf dem Orthogonalkreise. Je nachdem K positiv oder negativ ist, ist auch die Substitution positiv oder negativ.

Für $c = 0$ muss entweder λ oder μ verschwinden.

Sei endlich die Substitution A eine parabolische und

$$\frac{1}{\eta' - \lambda} = \frac{1}{\eta - \lambda} + \gamma$$

ihre canonische Form. Setzen wir dann

$$\frac{1}{\eta - \lambda} = \zeta, \quad \frac{1}{\eta' - \lambda} = \zeta',$$

so lautet die Gleichung des Orthogonalkreises

$$\frac{\lambda\zeta + 1}{\zeta} \frac{\bar{\lambda}\bar{\zeta} + 1}{\bar{\zeta}} = c,$$

und wenn wir ζ' an Stelle von ζ setzen, erhalten wir

$$\frac{\lambda\zeta + \lambda\gamma + 1}{\zeta + \gamma} \frac{\bar{\lambda}\bar{\zeta} + \bar{\lambda}\bar{\gamma} + 1}{\bar{\zeta} + \bar{\gamma}} = c.$$

Die beiden letzten Gleichungen müssen wieder übereinstimmen, wir finden also durch Coefficientenvergleichung

$$\begin{aligned}
\lambda\bar{\lambda} - c &= \varrho(\lambda\bar{\lambda} - c), \\
\bar{\lambda} &= \varrho(\lambda\bar{\lambda}\gamma + \bar{\lambda} - c\gamma), \\
\lambda &= \varrho(\lambda\bar{\lambda}\bar{\gamma} + \lambda - c\bar{\gamma}), \\
1 &= \varrho[(\lambda\gamma + 1)(\bar{\lambda}\bar{\gamma} + 1) + c\gamma\bar{\gamma}],
\end{aligned}$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Wäre nun

$$\lambda\bar{\lambda} \neq c,$$

so müsste γ gleich Null sein. Es ist also nothwendig

$$\lambda\bar{\lambda} = c, \quad \varrho = 1,$$

d. h. die Substitution ist eine positive und der Doppelpunkt liegt auf dem Orthogonalkreise. Für ein nicht positives c kann demnach der Fall einer parabolischen Substitution niemals vorkommen.

Wir erhalten also die folgenden Sätze:

1. Die Substitutionen A, die einen Kreis O mit nicht verschwindendem Radius

$$(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c = 0$$

ungeändert lassen, können niemals loxodromische sein.

2. Wenn c positiv ist, so liegen die Doppelpunkte der hyperbolischen und parabolischen Substitutionen A auf dem Kreise O, die elliptischen Substitutionen, deren Multiplicator

nicht gleich -1 ist, sind positive Substitutionen und ihre Doppelpunkte sind Spiegelbilder in Bezug auf den Kreis O.

3. Wenn c negativ ist, so sind alle Substitutionen A elliptische und ihre Doppelpunkte λ, μ befriedigen die Gleichung

$$(\lambda - \eta_0)(\bar{\mu} - \eta_0) = c.$$

4. Wenn c verschwindet, so sind die Substitutionen, die den Punkt η_0 ungeändert lassen, einfach diejenigen, die diesen Punkt zum Doppelpunkte haben.

Die beiden ersten Sätze enthalten den in der Nr. 272 (S. 53) für unimodulare Substitutionen mit realen Coefficienten abgeleiteten Satz als speciellen Fall. In der That lassen Substitutionen mit realen Coefficienten die reale Axe, die dann die Rolle des Orthogonalkreises spielt, ungeändert und sind positive Substitutionen, wenn ihre Determinanten den Werth Eins haben.

283. Verschiebungen in der Ebene. Differentialinvariante. Linienelement einer Fläche von constantem Krümmungsmaass.

Betrachten wir den Fall $c = 0$, und denken wir uns den Punkt η_0 in's Unendliche verlegt; dann haben die Substitutionen A, die diesen Punkt ungeändert lassen, die Form

$$\eta' = A\eta = \alpha\eta + \beta.$$

Wir sondern dieselben in zwei Kategorieen, je nachdem $|\alpha| = 1$ oder $|\alpha| \neq 1$ ist. Für die erste Kategorie ist offenbar

$$|d\eta'| = |d\eta|,$$

wir bezeichnen diese Art von Substitutionen als Verschiebungen. Bei Anwendung derselben auf die Punkte einer Figur der η-Ebene wird nämlich diese Figur in eine ihr congruente verwandelt.

Für die zweite Kategorie ist

$$|d\eta'| = |\alpha|\,|d\eta|,$$

wir bezeichnen diese Art von Substitutionen als Aehnlichkeitstransformationen, da bei Anwendung derselben eine Figur der η-Ebene in eine ähnliche Figur verwandelt wird.

In den Fällen, wo c von Null verschieden ist, zeigen die Substitutionen A, die den Kreis O ungeändert lassen, ein den Verschiebungen analoges Verhalten. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, die für das Folgende ohne Bedeutung sind, beschränken wir uns im Falle $c > 0$ auf die Betrachtung positiver Substitutionen A, wir handeln also, wie wir kurz sagen können, von Substitutionen A, die

die Gleichung (VIII) (S. 89) befriedigen. Für einen gegebenen Kreis O bildet die Gesammtheit dieser Substitutionen offenbar eine Gruppe.

Sei

$$\eta' = A\eta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

dann ist bekanntlich

$$\frac{d\eta'}{d\eta} = \frac{1}{(\gamma\eta + \delta)^2}$$

und folglich

(IX) $$\left|\frac{d\eta'}{d\eta}\right| = \frac{1}{(\gamma\eta + \delta)(\bar{\gamma}\bar{\eta} + \bar{\delta})}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung (VIII) erhalten wir also

$$\frac{|d\eta'|}{(\eta' - \eta_0)(\bar{\eta}' - \bar{\eta}_0) - c} = \frac{|d\eta|}{(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c}.$$

Der Differentialausdruck

(1) $$\frac{|d\eta|}{(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c}$$

ist demnach eine bei allen Substitutionen A, die die Gleichung (VIII) befriedigen, unveränderliche Grösse. Es ist eine Differentialinvariante der von diesen Substitutionen gebildeten Gruppe.

Wenn $c = 0$ ist, so ist der Differentialausdruck (1) nur für diejenigen unter den Substitutionen, die den Punkt η_0 ungeändert lassen, invariant, die den Verschiebungen im Falle $\eta_0 = \infty$ entsprechen. Diese sind aber offenbar nichts Anderes, wie die parabolischen und elliptischen unter den Substitutionen mit dem Doppelpunkte η_0, und für diese ist, wie eine einfache Rechnung zeigt, in der That die Gleichung (VIII) erfüllt.

Der Differentialausdruck (1) spielt also allgemein bei von Nu verschiedenem c für alle positiven Substitutionen A, bei verschwinde dem c für die parabolischen und elliptischen unter diesen Substitution eine ähnliche Rolle, wie der Ausdruck $|d\eta|$ für die Verschiebung der η-Ebene. Da nun $|d\eta|$ nichts Anderes ist, wie das Linienelem einer Curve der η-Ebene, so wollen wir jetzt allgemein den Dif rentialausdruck (1) als das Linienelement einer Curve einer gewissen noch näher zu bestimmenden Fläche ansel

Wir werden dann auf diesen Differentialausdruck die von G in den „Disquisitiones circa superficies curvas" begründeten Meth anwenden und dadurch zu einem Zusammenhange zwischen der unserer Substitutionen A und der Geometrie auf gewissen Fl

geführt werden, welcher auch für spätere allgemeinere Untersuchungen von Wichtigkeit ist.

Wir spalten die complexe Grösse η in ihren realen und imaginären Theil

$$\eta = p + qi$$

und schreiben die Gleichung des Orthogonalkreises in der Form

$$(2)\qquad (\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c = (p-m)^2 + (q-n)^2 - c = 0.$$

Es soll dann

$$(3)\qquad ds^2 = \frac{4\,|\,d\eta\,|^2}{[(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c]^2} = \frac{4(dp^2 + dq^2)}{[(p-m)^2 + (q-n)^2 - c]^2}$$

als das Quadrat des Linienelementes einer Curve auf einer Fläche aufgefasst werden, auf der wir uns p, q als krummlinige Coordinaten denken. Die gewöhnlichen rechtwinkeligen Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 eines Punktes dieser Fläche sind dann, als Functionen von p, q gegeben,

$$\xi_1 = \varphi_1(p, q), \quad \xi_2 = \varphi_2(p, q), \quad \xi_3 = \varphi_3(p, q),$$

und es werde nach Gauss

$$E = \sum_{\varkappa=1}^{3} \left(\frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial p}\right)^2, \quad F = \sum_{\varkappa=1}^{3} \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial p}\frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial q}, \quad G = \sum_{\varkappa=1}^{3} \left(\frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial q}\right)^2$$

gesetzt. Aus der von Gauss gegebenen Form des Linienelementes

$$ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$$

schliessen wir dann, dass für unsere Fläche

$$(4)\qquad E = G = \frac{4}{[(p-m)^2 + (q-n)^2 - c]^2}, \quad F = 0$$

ist. Das Gauss'sche Krümmungsmaass für die Fläche ist folglich nach Art. 19 der genannten Gauss'schen Abhandlung durch die Formel

$$k = \frac{1}{4E^4}\left\{2E\left[\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)^2\right] - 2E^2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial q^2}\right)\right\}$$

dargestellt; setzt man hierin für E und seine partiellen Ableitungen die sich aus (4) ergebenden Werthe ein, so findet man durch einfache Rechnung für das Krümmungsmaass den Werth

$$k = -c.$$

Unsere Fläche hat also die constante Krümmung $-c$, sie ist demnach, wenn c negativ ist, auf eine Kugel vom Radius

$$\left|\frac{1}{\sqrt{-c}}\right|,$$

wenn c verschwindet, auf eine Ebene, und wenn c positiv ist, auf eine pseudosphärische Fläche von der Krümmung $-c$ abwickelbar. Ferner

ist die Fläche, wenn wir p, q als rechtwinkelige Coordinaten der η-Ebene deuten, in den kleinsten Theilen ähnlich d. h. winkeltreu auf die η-Ebene abgebildet, da ja das Linienelement ds auf der Fläche dem Linienelemente

$$|d\eta| = \sqrt{dp^2 + dq^2}$$

in der η-Ebene proportional ist.

Betrachten wir irgend eine rectificirbare Curve $\mathfrak{C}$ auf der Fläche, dann wird ihre Länge zwischen zweien ihrer Punkte (p_1, q_1), (p_2, q_2) durch das längs $\mathfrak{C}$ genommene Integral

$$(5) \qquad \int_{(p_1, q_1)}^{(p_2, q_2)} ds = 2 \int_{(p_1, q_1)}^{(p_2, q_2)} \sqrt{\frac{dp^2 + dq^2}{[(p-m)^2 + (q-n)^2 - c]^2}}$$

dargestellt. Wir sehen, dass für den Fall eines positiven c diese Länge stets einen endlichen Werth hat, wenn kein Punkt der Curve die Gleichung

$$(6) \qquad (p-m)^2 + (q-n)^2 - c = 0$$

befriedigt. Für verschwindendes c ist die Curvenlänge nur unendlich, wenn der Punkt

$$p = m, \quad q = n$$

auf der betrachteten Strecke liegt. Für negatives c kann für kein reales Werthesystem (p, q) die Gleichung (6) befriedigt werden, d. h. die Curvenlänge besitzt stets einen endlichen Werth.

284. Geodätische Linien auf der Fläche. Geodätische Polarcoordinaten. Inhalt eines Flächenstückes.

Bestimmen wir nunmehr die geodätischen (kürzesten) Linien auf unserer Fläche.

Die Differentialgleichung für die geodätischen Linien ergiebt sich aus den Formeln des Art. 18 der Gauss'schen Disquisitiones in der Form

$$\left(E + \frac{dq}{dp}F\right)\left\{\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q} + \frac{\partial G}{\partial p}\frac{dq}{dp} + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q}\left(\frac{dq}{dp}\right)^2 + G\frac{d^2q}{dp^2}\right\}$$
$$- \left(F + \frac{dq}{dp}G\right)\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p} + \frac{\partial E}{\partial q}\frac{dq}{dp} + \left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}\right)\left(\frac{dq}{dp}\right)^2 + F\frac{d^2q}{dp^2}\right\} = 0,$$

also lautet dieselbe für unsere Fläche, wo E, F, G die Werthe (4) haben:

$$[(p-m)^2 + (q-n)^2 - c]\frac{d^2q}{dp^2} - 2(p-m)\left(\frac{dq}{dp}\right)^3 + 2(q-n)\left(\frac{dq}{dp}\right)^2$$
$$- 2(p-m)\frac{dq}{dp} + 2(q-n) = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung ergiebt sich leicht in der Form

$$(7)\quad \mathfrak{a}[(p-m)^2+(q-n)^2+c]+2\mathfrak{b}(p-m)+2\mathfrak{c}(q-n)=0,$$

wo die $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ willkürliche (Integrations-)Constanten bedeuten. Diese Gleichung stimmt aber mit der Gleichung (VI) der Nr. 280 (S. 84) überein, d. h.:

Die geodätischen Linien auf der Fläche sind diejenigen Curven, die solchen Kreisen der η-Ebene entsprechen, welche den Orthogonalkreis (2) unter rechtem Winkel schneiden.

Wählen wir die $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ als reale Constanten, so ist die entsprechende geodätische Linie für nicht positive Werthe von c stets real; die Gleichung derselben lässt sich nämlich in die Form setzen

$$\left(p-m+\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right)^2+\left(q-n+\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}\right)^2+c-\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}-\frac{\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{a}^2}=0,$$

und für $c \leq 0$ ist ja stets

$$-c+\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}+\frac{\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{a}^2}>0.$$

Dagegen sind für ein positives c nur diejenigen geodätischen Linien real, für welche

$$\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2-\mathfrak{a}^2 c>0$$

ist.

Betrachten wir die Gesammtheit der geodätischen Linien, die durch den Punkt

$$p=m, \quad q=n$$

hindurchgehen, so muss für dieselben, wenn c von Null verschieden ist, $\mathfrak{a}$ verschwinden, d. h. ihre Gleichung lautet

$$(8)\quad \mathfrak{b}(p-m)+\mathfrak{c}(q-n)=0.$$

Da die Abbildung der Fläche auf die η-Ebene eine winkeltreue ist, so ist der Neigungswinkel φ der geodätischen Linie (8) zu der Curve

$$q=n$$

durch die Formel

$$\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{-\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}}\right)$$

gegeben. Tragen wir nun auf den geodätischen Linien des Büschels (8) vom Punkte (m, n) aus constante geodätische Längen r ab, so ist für die Endpunkte (p, q) derselben

$$r=2\int_{(m,n)}^{(p,q)}\sqrt{\frac{dp^2+dq^2}{[(p-m)^2+(q-n)^2-c]^2}}.$$

ı wir nun
$$\begin{cases} p - m = \varrho \cos\varphi, \\ q - n = \varrho \sin\varphi \end{cases}$$
en, wodurch also
$$(p - m)^2 + (q - n)^2 - c = \varrho^2 - c$$
ırd, so verwandelt sich, da φ längs der Curve (8) einen constan
Verth hat, der Ausdruck für r in
$$r = \pm 2 \int_0^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho^2 - c},$$
wo das Vorzeichen so zu wählen ist, dass r positiv ist, wenn es
realen Werth besitzt.

Wenn c negativ ist, so setzen wir
$$k = \sqrt{-c} > 0,$$
dann haben wir

(10)
$$r = 2 \int_0^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho^2 + k^2} = \frac{2}{k} \operatorname{arctg} \frac{\varrho}{k},$$
es ist also für jeden Punkt (p, q) der η-Ebene der en
Werth von r real und endlich.

Ist dagegen c positiv, und setzen wir mit Rücksicht au
zu treffende Convention
$$k = \sqrt{c} > 0,$$

(11)
$$r = 2 \int_0^{\varrho} \frac{d\varrho}{k^2 - \varrho^2} = \frac{1}{k} \log \frac{k + \varrho}{k - \varrho},$$
so folgt, dass r nur für diejenigen Punkte real ist, die
$\varrho < k$ oder
$$(p - m)^2 + (q - n)^2 < c$$
Genüge leisten; d. h.:

Nur den Punkten der η-Ebene, die inner
gonalkreises liegen, entsprechen reale Flä
die den Punkten der Peripherie des Ortho
sprechenden Flächenpunkte ist r unend
Punkte liegen also in unendlicher Entfern

Diejenigen Punkte der η-Ebene, welche Fl
stanten geodätischen Abstande r von dem Punk
…gen auf einem mit dem Orthogonalkreise
…len Werth

(12) $$\varrho = k \operatorname{tg} \frac{rk}{2} \quad \text{für } c = -k^2 < 0,$$

beziehungsweise

(13) $$\varrho = k \frac{e^{kr} - 1}{e^{kr} + 1} \quad \text{für } c = k^2 > 0$$

besitzt. In beiden Fällen bestimmen die Grössen r, φ ein System von sogenannten geodätischen Polarcoordinaten auf der Fläche.

Wir wollen nun noch den Inhalt einer von einer geschlossenen Curve begrenzten Figur auf unserer Fläche zu bestimmen suchen.

Nimmt man als Flächenelement den Inhalt eines unendlich kleinen, von den vier Curven

$$p, \; p + dp, \; q, \; q + dq$$

begrenzten Rechtecks, so wird dieser Inhalt nach Art. 17 der Gaussschen „Disquisitiones" durch die Formel

$$dp\,dq \sqrt{EG - F^2},$$

also in unserem Falle durch

$$\frac{4\,dp\,dq}{[(p-m)^2 + (q-n)^2 - c]^2}$$

gegeben. Der Inhalt des von einer geschlossenen Curve $\mathfrak{C}$ begrenzten Flächenstückes ist demnach gleich dem Doppelintegrale

(14) $$4\int\int \frac{dp\,dq}{[(p-m)^2 + (q-n)^2 - c]^2} = 4\int\int \frac{\varrho\,d\varrho\,d\varphi}{(\varrho^2 - c)^2},$$

erstreckt über das Innere dieser Curve.

285. Verschiebungen auf der Fläche von constanter Krümmung. Superficielle Länge und superficieller Inhalt. Beziehungen zur Nicht-Euklid'schen Geometrie.

Betrachten wir jetzt irgend eine projective Substitution

$$\eta' = A\eta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

die den Orthogonalkreis (2) ungeändert lässt. Setzen wir

$$\eta' = p' + q'i,$$

so entspricht also die Ausübung der linearen Substitution A auf einen Punkt der η-Ebene dem Uebergange von einem Flächenpunkte (p, q) zu dem Punkte (p', q'). Wenn für die Substitution A die Gleichung (VIII) der Nr. 282 (S. 89) erfüllt ist, so bleibt bei Anwendung derselben das Linienelement ds ungeändert, d. h. wenn wir den Punkt (p, q) eine Curve auf der Fläche durchlaufen lassen, so durchläuft der Punkt (p', q') eine Curve von derselben Länge. Dies ist also für $c \neq 0$ für alle

positiven Substitutionen A, für $c = 0$ für die elliptischen und parabolischen unter denselben der Fall.

Ferner folgt daraus, dass die Abbildung der Fläche auf die η-Ebene eine winkeltreue ist, dass, wenn wir den Punkt (p, q) zwei Curven auf der Fläche beschreiben lassen, die sich unter einem gewissen Winkel φ schneiden, die entsprechenden von dem Punkte (p', q') durchlaufenen Curven den selben Winkel φ mit einander einschliessen müssen. Endlich ist nach der Transformationsformel für Doppelintegrale und mit Rücksicht auf die Gleichung (VIII)

$$\int\int \frac{dp'\,dq'}{[(p'-m)^2+(q'-n)^2-c]^2}$$
$$= \int\int \left(\frac{\partial p'}{\partial p}\frac{\partial q'}{\partial q} - \frac{\partial p'}{\partial q}\frac{\partial q'}{\partial p}\right) \frac{(\gamma\eta+\delta)^2(\bar\gamma\bar\eta+\bar\delta)^2 dp\,dq}{[(p-m)^2+(q-n)^2-c]^2}.$$

Nun ist aber für die monogene Function $p'+q'i$ von $p+qi$

$$\frac{\partial p'}{\partial p} = \frac{\partial q'}{\partial q}, \qquad \frac{\partial p'}{\partial q} = -\frac{\partial q'}{\partial p},$$
$$\frac{d\eta'}{d\eta} = \frac{\partial p'}{\partial p} + i\frac{\partial q'}{\partial p} = -i\frac{\partial p'}{\partial q} + \frac{\partial q'}{\partial q},$$

wir haben folglich

$$\text{(X)} \qquad \frac{\partial p'}{\partial p}\frac{\partial q'}{\partial q} - \frac{\partial p'}{\partial q}\frac{\partial q'}{\partial p} = \left|\frac{d\eta'}{d\eta}\right|^2$$

und demnach, mit Rücksicht auf die Gleichung (IX) der Nr. 283 (S. 94)

$$4\int\int \frac{dp'\,dq'}{[(p'-m)^2+(q'-n)^2-c]^2} = 4\int\int \frac{dp\,dq}{[(p-m)^2+(q-n)^2-c]^2},$$

d. h. wenn der Punkt (p, q) eine geschlossene Curve beschreibt, so beschreibt der Punkt (p', q') eine ebenfalls geschlossene Curve, und die von beiden Curven umschlossenen Flächeninhalte haben denselben Werth.

Aus diesen drei Bemerkungen (von denen übrigens die dritte eine unmittelbare Folge der beiden ersten ist) ergiebt sich, dass der Anwendung einer Substitution A, die der Gleichung (VIII) genügt, auf die complexe Variable η eine Transformation der Punkte unserer Fläche vom constanten Krümmungsmaasse $-c$ entspricht, bei der jede auf der Fläche gezeichnete Figur in eine ihr congruente Figur übergeht.

Wir sehen also, dass die Fläche vom constanten Krümmungsmaasse $-c$ im allgemeinen Falle für die Substitutionen A, die der Gleichung (VIII) genügen, genau dasselbe Verhalten zeigt, wie die gewöhnliche η-Ebene in dem Falle

$$c = 0, \quad \eta_0 = m + ni = \infty,$$

den wir in der Nr. 283 (S. 93) betrachtet hatten, für die Verschiebungen.

Die von der Gesammtheit der Substitutionen A, die die Gleichung (VIII) befriedigen, gebildete Gruppe liefert, aufgefasst als Gruppe von Transformationen der Punkte (p, q) unserer Fläche, die doppelt unendliche Mannigfaltigkeit der *Verschiebungen* der Fläche in sich selbst.

Kommen wir überein, die Fläche, welche die Abbildung der η-Ebene oder für $c > 0$ der Punkte im Innern des Orthogonalkreises darstellt, als eine „*Ebene*" zu bezeichnen, nennen wir ferner die geodätischen Linien dieser Fläche „*Geraden*", so erhalten wir in dieser „Ebene" eine Geometrie, die für $c = 0$ mit der gewöhnlichen *Euklid*schen, für $c > 0$ mit der von *Lobatscheffskij* und *J. Bólyai* begründeten, für $c < 0$ mit der sogenannten *Riemann*'schen übereinstimmt.

In der That ist z. B. zufolge des Satzes der Nr. 281 (S. 86) die Summe der Winkel eines „geradlinigen" Dreieckes in dieser „Ebene", je nachdem c gleich Null, positiv oder negativ ist, gleich, kleiner oder grösser als π, eine Eigenschaft, die sich übrigens aus den entwickelten flächentheoretischen Formeln auch leicht ableiten lässt.

In Uebertragung dieser Verhältnisse auf die η-Ebene werden wir uns allgemein für $c \gtreqless 0$ bei der Betrachtung von Gruppen von Substitutionen A, die der Gleichung (VIII) genügen, der folgenden Bezeichnungen bedienen.

Eine Substitution A, die der Gleichung (VIII) genügt, heisst eine *Verschiebung*. Punkte, die durch eine Verschiebung aus einander hervorgehen, heissen *correspondirend*, ebene Figuren, die durch eine Verschiebung aus einander entstehen, heissen *congruent*. Für eine Curve $\mathfrak{C}$, die zwischen zwei Punkten η_1, η_2 verläuft, heisst das längs derselben erstreckte Integral

$$2\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{|d\eta|}{|(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c|}$$

ihre *superficielle Länge*, für eine geschlossene Figur das über dieselbe genommene Integral

$$4\iint \frac{dp\,dq}{[(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c]^2}$$

ihr *superficieller Inhalt*. Es gelten dann nach den vorhergehenden Betrachtungen die folgenden Sätze:

1) *Wenn $c > 0$ ist, so liegen die mit einem Punkte innerhalb des Orthogonalkreises correspondirenden Punkte ebenfalls innerhalb des Orthogonalkreises.*

2) Für $c \gtreqless 0$ haben congruente Figuren in correspondi
den Ecken gleiche Winkel. Congruente Curven haben gle
superficielle Länge, congruente geschlossene Figuren gleic
superficiellen Inhalt.

3) Die superficielle Länge einer Curve, die keinen Pu
mit dem Orthogonalkreise gemein hat, besitzt einen
lichen Werth. Ebenso der superficielle Inhalt einer
schlossenen Figur, die keinen Punkt des Orthogonalkre
in ihrem Innern enthält. Für $c < 0$ gilt dieser Satz also
jede beliebige Curve und jede beliebige geschlossene Fi
selbst wenn sich dieselbe in's Unendliche erstreckt.
$c \geqq 0$ ist die superficielle Länge einer Curve, die den Or
gonalkreis trifft, unendlich gross.

Wenn c einen negativen Werth hat, so sind alle Substitutione
die den Orthogonalkreis ungeändert lassen, Verschiebungen. Für
tives c sind es nur die positiven unter diesen Substitutionen, für c
nur die elliptischen und parabolischen. Allemal bildet aber die
sammtheit aller Verschiebungen eine Gruppe, da offenbar zwei
schiebungen hintereinander angewandt wieder eine Verschiebung g
Ferner ist klar, dass eine Gruppe, die aus einer gewissen Anzahl
Verschiebungen als Basis gebildet ist, nur Verschiebungen (d. h. als
Falle $c=0$ nur elliptische und parabolische Substitutionen) enthalten

Dass es für $c = 0$ nebst den Verschiebungen noch Substituti
giebt, die den Punkt η_0 ungeändert lassen, jedoch den Differe
ausdruck (1) mit einer von Eins verschiedenen Constanten multipli
nämlich diejenigen Substitutionen, die den für $\eta_0 = \infty$ als Aehn
keitstransformationen bezeichneten entsprechen, bedingt die specif
Eigenthümlichkeit der dem Falle $c = 0$ entsprechenden Euklid's
Geometrie, wonach es in dieser Geometrie eine Aehnlichkeit von Fig
giebt, was weder für die Lobatscheffskij-Bólyai'sche noch fü
Riemann'sche Geometrie der Fall ist. Es möge noch hervorgeh
werden, dass in der Euklid'schen Geometrie der Ebene, von der
die Rede ist, die sämmtlichen geraden Linien der Ebene als
einen und denselben „unendlich fernen Punkt" hindurchgehend
zustellen sind, eine Vorstellung, die ja auch der Darstellung der
plexen Grössen durch die Punkte einer Ebene zu Grunde liegt,
die gegenüber der in der projectivischen Geometrie üblichen Ann
einer „unendlich fernen Geraden" nur den einen Nachtheil hat,
dem „unendlich fernen Punkte" andere Eigenschaften zukommen,
den im Endlichen gelegenen Punkten.

In Bezug auf die parabolischen Substitutionen ist für den Fall eines realen Orthogonalkreises ($c \geqq 0$) noch Folgendes zu bemerken:

Setzen wir für

$$\frac{1}{\eta' - \lambda} = \frac{1}{\eta - \lambda} + \gamma,$$

wo λ der Gleichung

$$(\lambda - \eta_0)(\bar{\lambda} - \bar{\eta}_0) = c$$

genügt, wie oben

$$\zeta = \frac{1}{\eta - \lambda}, \quad \zeta' = \frac{1}{\eta' - \lambda},$$

so bewegt sich, wenn ζ eine gerade Linie durchläuft, der correspondirende Punkt ζ' auf einer parallelen Geraden. D. h. wenn η einen durch den Punkt λ hindurchgehenden Kreis beschreibt, so durchläuft der correspondirende Punkt η' einen Kreis, der den von η beschriebenen im Punkte λ berührt. Bewegt sich also η auf einem Kreise C_0, der den Orthogonalkreis O in λ unter rechtem Winkel schneidet, so beschreibt η' einen Kreis C_1, der O ebenfalls in λ unter rechtem Winkel schneidet und C_0 berührt; ebenso beschreibt

$$\eta^{(\varkappa)} = A^{\varkappa}\eta \qquad (\varkappa = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$$

einen Kreis $C_\varkappa$, der $C_0, C_1, \cdots$ in λ berührt. Da aber (Nr. 199, Bd. II, 1, S. 269)

$$\lim_{\varkappa} A^{\varkappa}\eta = \lambda$$

ist, so nähern sich die Kreise $C_\varkappa$ mit wachsenden Werthen von $|\varkappa|$ unbegrenzt dem Doppelpunkte λ. Wir schliessen hieraus den für das Folgende wichtigen Satz:

Eine Curve, die den Orthogonalkreis nicht schneidet, kann stets nur eine endliche Anzahl der Kreise $C_\varkappa$ treffen.

Zweites Kapitel.

286. Ansatz zum Discontinuitätsbeweise für die Gruppe gewisser Dreiecksfunctionen.

Wir kehren nun zur Untersuchung der Dreiecksfunctionen

$$\eta = s(\delta_1, \delta_2, \delta_3, z)$$

zurück, wo $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ reciproke ganze positive Zahlen oder Null sind. Sei

$$(\eta - \eta_0)(\eta - \eta_0') - c = 0$$

die Gleichung des Orthogonalkreises O, der zu den Seiten s_0, s_1, s_2 des Ausgangsdreieckes $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ gehört, und setzen wir fest, dass wir, falls $c > 0$ ist (in Uebereinstimmung mit der bereits in der Theorie der Modulfunction festgehaltenen Convention) von den beiden Kreisbogendreiecken mit den Winkeln

$$\pi\delta_1, \quad \pi\delta_2, \quad \pi\delta_3,$$

von denen (Nr. 280, S. 86) das eine ganz innerhalb, das andere ganz ausserhalb des Orthogonalkreises liegt, immer das im Innern von O gelegene als Ausgangsdreieck ansehen wollen. Dann haben wir für die Dreiecksfunctionen der in der Nr. 281 (S. 86) unterschiedenen drei Arten zunächst die folgenden Resultate.

In allen drei Fällen schneiden die Seiten der sämmtlichen Dreiecke der Theilung unserer Fläche F, die über der η-Ebene ausgebreitet die Verzweigung der Function z darstellt, den Orthogonalkreis unter rechtem Winkel (Nr. 281, S. 87) und die Substitutionen der projectiven Monodromiegruppe ϑ sind Verschiebungen.

Für ein negatives c folgt das letztere unmittelbar aus dem Satze der Nr. 281 (S. 87), wonach die Substitutionen von ϑ den Orthogonalkreis in sich selbst transformiren, für ein positives c aus dem Satze der Nr. 282 (S. 89). Für $c = 0$ sind die Fundamentalsubstitutionen A_1, A_2 (da δ_1, δ_2 reale Grössen sind) elliptische oder parabolische Substitutionen, also Verschiebungen; nach den Ergebnissen am Schlusse der vorigen Nummer gilt folglich das Gleiche auch für alle Substitutionen von ϑ.

Für die Dreiecksfunctionen zweiter Art sind also alle Substitutionen ϑ elliptische oder parabolische von der Form

$$\frac{\eta' - \eta_0}{\eta' - \mu} = K \frac{\eta - \eta_0}{\eta - \mu}, \quad |K| = 1,$$

iehungsweise

$$\frac{1}{\eta' - \eta_0} = \frac{1}{\eta - \eta_0} + \gamma,$$

nn η_0 den Punkt bedeutet, in welchem sich die drei Kreise s_0, s_1, s_2' neiden.

Für die Dreiecksfunctionen dritter Art sind die Substitutionen der uppe ϑ elliptische. Für die Dreiecksfunctionen erster Art endlich nen elliptische, parabolische oder hyperbolische Substitutionen vornmen; über die Lage der Doppelpunkte geben die Sätze der Nr. 282 92) erschöpfenden Aufschluss.

Wir stellen uns nun die Aufgabe zu beweisen, dass unter für die δ_1, δ_2, δ_3 gemachten Annahme die Gruppe ϑ stets e discontinuirliche, d. h. dass die Function z von η eine deutige ist.

Das Fundamentalpolygon F_0, welches durch Spiegelung des Ausgsdreieckes $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ in Bezug auf die Seite s_0 entsteht, ist ein lichtes Kreisbogenviereck, welches für die Dreiecksfunctionen erster t jedenfalls ganz innerhalb des realen Orthogonalkreises liegt. Die s F_0 durch die Substitutionen der Gruppe ϑ hervorgehenden Bereiche

$$F_{\pm \varkappa_1, \pm \varkappa_2, \cdots \pm \varkappa_\nu}$$

id untereinander und mit F_0 congruent und befinden sich für die nctionen erster Art ebenfalls ganz innerhalb des Kreises O. Es sind n zwei Fälle als möglich in's Auge zu fassen.

1) Die Bereiche $F_{\pm \varkappa_1, \pm \varkappa_2, \cdots \pm \varkappa_\nu}$ lagern sich schlicht und lücken- s nebeneinander, d. h. die Fläche F bedeckt die η-Ebene nirgends hrfach; dann ist nach den Ergebnissen der Nr. 216 (Bd. II, 1, S. 344 ff.) e Gruppe ϑ discontinuirlich.

2) Dies ist nicht der Fall, sondern es kommt vor, dass mehrere ner Bereiche übereinander greifen.

In den Fällen

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = 0, \quad \delta_3 = 0,$$

$$\delta_1 = \frac{1}{3}, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}, \quad \delta_3 = 0,$$

$$\delta_1 = \frac{1}{3}, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}, \quad \delta_3 = \frac{1}{2}$$

hatten wir gezeigt, dass nur die unter 1) angegebene Möglichkeit ei treten kann. Um dies auch in dem allgemeinen Falle

$$\delta_1 = \frac{1}{g_1}, \quad \delta_2 = \frac{1}{g_2}, \quad \delta_3 = \frac{1}{g_3},$$

wo g_1, g_2, g_3 positive ganze Zahlen oder unendlich sind, beweisen können, müssen wir uns einer Methode bedienen, die Herr Poinca für die Untersuchung analoger Fragen von viel grösserer Allgemeinh angegeben hat. Der Grund, weshalb die im Falle

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$$

angewandte Beweismethode (Nr. 272, S. 50) im Allgemeinen nicht au reicht, ist in dem Umstande zu suchen, dass, wenn nicht alle drei verschwinden, nothwendig Ecken von F_0 vorhanden sein müssen, d nicht auf dem Orthogonalkreise liegen. Es sind dies nämlich die Ecke die Doppelpunkte elliptischer Substitutionen sind.

Im Falle einer Dreiecksfunction erster Art liegen alle Bereic

$$F_{\pm \varkappa_1, \pm \varkappa_2, \cdots \pm \varkappa_\nu}$$

nothwendig innerhalb des Orthogonalkreises O, da jeder ihrer Punk mit einem Punkte von F_0 correspondirt. Die von der Gesammth dieser Bereiche gebildete Fläche F kann also nicht über den Kreis hinweggreifen. Für die Dreiecksfunctionen zweiter Art ist der Punkt η durch den alle Seiten der mit F_0 congruenten Bereiche hindurchgehe keinesfalls ein Punkt, der im Innern der Fläche F liegt. Für d Functionen dritter Art kann F dagegen die ganze η-Ebene erfüllen.

Denken wir uns einen Punkt a im Innern des Fundament bereiches F_0 und einen beliebigen Punkt b der η-Ebene. Legen w von a nach b hin eine Curve $\mathfrak{C}$, die sich nicht unendlich oft wind und verfolgen wir den Verlauf dieser Curve in der Fläche F. D Curve $\mathfrak{C}$ wird F_0 über eine gewisse Seite hinweg verlassen und in d benachbarten Bereich F_{ω_1} eintreten, wird dann diesen Bereich aberm über eine Seite hinweg verlassen, um in den benachbarten Bereich F zu gelangen u. s. w. Wenn wir auf diese Weise fortfahrend die Rei der Bereiche

$$F_0, \; F_{\omega_1}, \; F_{\omega_2}, \; F_{\omega_3}, \cdots$$

bestimmen, die von der Curve $\mathfrak{C}$ durchquert werden, so sind zw Fälle möglich.

Es wird sich entweder ein Bereich F_{ω_n} ergeben, den die Curve nicht mehr verlässt, dann befindet sich der Punkt b in diesem Bereic d. h. b liegt jedenfalls in dem von der Fläche F bedeckten Theile d

η-Ebene und $\mathfrak{C}$ verläuft ganz innerhalb F. Wenn der Bereich F_{ω_n}, den die Curve nicht mehr verlässt, nach einer endlichen Anzahl von Schritten erreicht wird, so sagen wir, die Curve $\mathfrak{C}$ sei von der ersten Art.

Oder man wird, wie weit man auch gehen mag, niemals auf einen Bereich der Fläche F stossen, den die Curve $\mathfrak{C}$ nicht verlässt, dann sagen wir, $\mathfrak{C}$ sei von der zweiten Art.

Wenn der Punkt b so beschaffen ist, dass jede Curve $\mathfrak{C}$, die denselben mit a verbindet, von der zweiten Art ist, dann liegt b offenbar ausserhalb des von der Fläche F bedeckten Theiles der η-Ebene.

Giebt es dagegen Curven $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots$ erster Art, die a mit b verbinden, und endet $\mathfrak{C}_1$ in F_{α_1}, $\mathfrak{C}_2$ in $F_{\alpha_2}, \cdots$, so befindet sich der Punkt b innerhalb des von der Fläche F bedeckten Gebietes der η-Ebene, und zwar lagern sich in der Nähe von b die Bereiche $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \cdots$ übereinander. Wenn also die Gruppe ϑ eine discontinuirliche sein soll, so müssen die Bereiche

$$F_{\alpha_1},\ F_{\alpha_2}, \cdots,$$

in denen die von a nach b gelegten Curven erster Art endigen, mit einander identisch sein.

Lassen wir b mit a zusammenfallen, so sind die Curven $\mathfrak{C}$ geschlossen, und es giebt unter ihnen jedenfalls solche, die von erster Art sind. Für die Discontinuität der Gruppe ϑ ist dann offenbar nothwendig, dass der Bereich F_α, in welchem irgend eine von a ausgehende geschlossene Curve erster Art endet, mit F_0 identisch ist. Hinreichend für die Discontinuität von ϑ ist, dass jede von a ausgehende, innerhalb der Fläche F verlaufende Curve, die zu demselben Punkte $\eta = a$ zurückführt, auch in dem Bereiche F_0 endet, d. h. eine in der Fläche F geschlossene Curve ist, denn aus der Congruenz der Bereiche

$$F_{\pm\varkappa_1,\ \pm\varkappa_2, \cdots \pm\varkappa_\nu}$$

mit F_0 folgt dann, dass jede Curve, die von einem beliebigen Punkte des von der Fläche F bedeckten Theiles der η-Ebene ausgeht, ganz innerhalb F verläuft und zu demselben η-Werthe zurückkehrt, auch eine innerhalb F geschlossene Curve sein muss, und dies besagt nichts anderes, als dass sich die Fläche F an keiner Stelle mehrfach überdeckt.

287. Beweis eines Hülfssatzes. Sätze über Dreiecksfunctionen. Discontinuitätsbeweis.

Wir beweisen zuvörderst den folgenden Hülfssatz:

Jede Curve $\mathfrak{C}$ die von a ausgeht und nach einem Punkte b [illegible] hinführt, ohne den Orthogonalkreis O zu treffen, ist von der [illegible] ersten Art.

Denken wir uns die Reihe der von $\mathfrak{C}$ durchquerten Bereiche

$$F_0,\ F_{\omega_1},\ F_{\omega_2},\ \cdots$$

bestimmt, und bezeichnen wir mit l_p das innerhalb F_{ω_p} gelegene Stück der Curve $\mathfrak{C}$, mit l_0 das innerhalb F_0 verlaufende Stück dieser Curve, so ist also

$$\mathfrak{C} = l_0 + l_1 + l_2 + \cdots.$$

Das Curvenstück l_p verbindet offenbar zwei Punkte der Begrenzung von F_{ω_p}; diese Punkte können entweder auf zwei in einer Ecke $\lambda^{(p)}$ von F_{ω_p} zusammenstossenden Seiten dieses Bereiches liegen, wir sagen dann, l_p umspannt die Ecke $\lambda^{(p)}$, oder sie gehören zwei nicht benachbarten Seiten von F_{ω_p} an. Wenn l_p keine Ecke umspannt, so construiren wir die mit l_p congruente, innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 verlaufende Curve $l_p^{(0)}$; dann umspannt $l_p^{(0)}$ auch keine Ecke von F_0, die superficielle Länge von $l_p^{(0)}$ hat demnach einen endlichen, von Null verschiedenen Werth, der eine bestimmte angebbare Grösse K übertreffen muss. Also ist auch die superficielle Länge von l_p selbst grösser wie K.

Da die Curve $\mathfrak{C}$ den Orthogonalkreis O nicht trifft, so hat ihre superficielle Länge einen endlichen Werth L, die Anzahl derjenigen Curvenstücke, die keine Ecke umspannen, ist also jedenfalls kleiner wie

$$\frac{L}{K}.$$

Wir können folglich die positive ganze Zahl q so gross wählen, dass alle Curvenstücke, die keine Ecke umspannen, unter den

$$l_1,\ l_2,\ \cdots l_{q-1}$$

enthalten sind; die folgenden

$$l_q,\ l_{q+1},\ \cdots$$

umspannen also Ecken.

Betrachten wir unter den letzteren zwei auf einander folgende und den durch Vereinigung derselben entstehenden Bogen

$$m_p = l_p + l_{p+1}, \qquad (p \geq q),$$

dann können l_p und l_{p+1} entweder dieselbe Ecke $\lambda^{(p)}$ umspannen, so dass also m_p selbst diese Ecke umspannt, oder l_p, l_{p+1} umspannen verschiedene Ecken.

Wenn m_p keine Ecke umspannt, so beginnt dieser Curvenbogen in einem Punkte einer Seite $s^{(p)}$ von F_{ω_p}, der in der Ecke $\lambda^{(p)}$ mündet, überschreitet die Seite $(\lambda^{(p)}, \lambda^{(p+1)})$, die die gemeinsame Grenze der beiden Bereiche F_{ω_p}, $F_{\omega_{p+1}}$ bildet, und endet in einem Punkte der Seite $s^{(p+1)}$ von $F_{\omega_{p+1}}$, die von der Ecke $\lambda^{(p+1)}$ ausgeht (vergl. Fig. 24). Construiren wir die mit l_p, l_{p+1} congruenten Curven innerhalb F_0, so erhalten wir einen Curvenzug $m_p^{(0)}$ innerhalb F_0, der Punkte von drei Seiten des Fundamentalbereiches mit einander verbindet. Die superficielle Länge von $m_p^{(0)}$ besitzt folglich einen endlichen von Null verschiedenen Werth, der nicht unterhalb einer gewissen angebbaren Grenze $\overline{K}$ liegen kann. Die Anzahl der Curvenbogen m_p, die keine Ecke umspannen, ist demnach ebenfalls eine endliche, nämlich kleiner wie

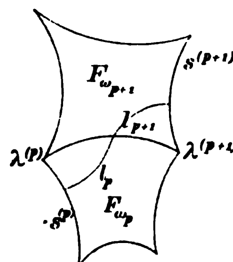


Fig. 24.

$$\frac{L}{\overline{K}}.$$

Wir können also die positive ganze Zahl r so gross wählen, dass alle Curvenstücke

$$l_r,\ l_{r+1}, \ldots$$

eine und dieselbe Ecke $\lambda^{(r)}$ umspannen. Es sind dann zwei Fälle möglich.

Die Ecke $\lambda^{(r)}$ kann Doppelpunkt einer elliptischen Substitution der Gruppe ϑ sein. Diese Substitution geht dann nothwendig aus einer der drei Substitutionen

$$A_1,\ A_2,\ A_3$$

durch Transformation mittelst einer Substitution von ϑ hervor. Ihr Multiplicator hat also die Form

$$e^{2\pi i\delta_\varkappa} = e^{\frac{2\pi i}{g_\varkappa}}. \qquad (\varkappa = 1, 2, 3).$$

Es lagern sich folglich genau $g_\varkappa$ Bereiche der Fläche F um den Punkt $\lambda^{(r)}$ herum, die Anzahl der Curvenstücke l_p, die die Ecke $\lambda^{(r)}$ umspannen, kann demnach nicht grösser wie $g_\varkappa$ sein. In diesem Falle ist also gezeigt, dass die Anzahl aller Curvenstücke

Die Ecke $\lambda^{(r)}$ kann aber auch Doppelpunkt einer parabolischen Substitution der Gruppe ϑ sein. In diesem Falle liegt $\lambda^{(r)}$ auf dem Orthogonalkreise O, und die in $\lambda^{(r)}$ mündenden Seiten der Bereiche $F_{\pm x_1, \pm x_2, \cdots \pm x_\nu}$ schneiden den Kreis O unter rechtem Winkel und berühren einander in $\lambda^{(r)}$. Nach dem Satze der Nr. 285 (S. 103) kann eine Curve, die den Orthogonalkreis nicht trifft, nur eine endliche Anzahl solcher sich in $\lambda^{(r)}$ berührender Kreise durchschneiden, die Curve $\mathfrak{C}$ kann folglich auch nur eine endliche Anzahl der sich um $\lambda^{(r)}$ herumlagernden Bereiche von F durchqueren, d. h. auch in diesem Falle ist die Anzahl der Curvenstücke

$$l_r,\ l_{r+1}, \cdots$$

und folglich auch die der Curvenstücke

$$l_0,\ l_1,\ l_2, \cdots$$

überhaupt eine endliche.

Damit ist also der Beweis unseres Hülfssatzes geliefert.

Für die Dreiecksfunctionen dritter Art, wo der Orthogonalkreis imaginär ist, folgt hieraus, dass jede in der η-Ebene gelegene Curve $\mathfrak{C}$ von der ersten Art sein muss, das ist offenbar nur möglich, wenn die Anzahl der Bereiche

$$F_{\pm x_1, \pm x_2, \cdots \pm x_\nu}$$

und folglich auch die Anzahl der Substitutionen der Gruppe ϑ eine endliche ist. D. h.:

Für die Dreiecksfunctionen dritter Art ist η eine algebraische Function der unabhängigen Variabeln z.

Für die Dreiecksfunctionen erster und zweiter Art ist der Orthogonalkreis real. Denken wir uns eine von a ausgehende, ganz innerhalb der Fläche F verlaufende Curve $\mathfrak{C}$, die den Orthogonalkreis in einem Punkte trifft und die durch keine Ecke eines der Bereiche von F hindurchgeht. Möge $\mathfrak{C}$ die Bereiche

$$F_0,\ F_{\omega_1},\ F_{\omega_2}, \cdots$$

durchqueren, und bezeichne wieder l_p das innerhalb F_{ω_p} gelegene Stück dieser Curve. Dann ist die superficielle Länge eines jeden solchen Stückes l_p eine endliche, die superficielle Länge der ganzen Curve $\mathfrak{C}$ ist aber nach dem Satze 3 der Nr. 285 (S. 102) unendlich gross; es muss folglich die Anzahl der Stücke l_p eine unendliche sein. Da für $c > 0$ nicht jeder Punkt des Orthogonalkreises eine Ecke sein kann, und für $c = 0$ der Punkt η_0, auf den der Orthogonalkreis zusammenschrumpft, keine Ecke ist (es schneiden sich ja alle Seiten der Bereiche von F

in diesem Punkte), so giebt es stets Curven von der für 𝔆 geforderten Beschaffenheit. D. h.:

Für die Dreiecksfunctionen erster und zweiter Art ist die Anzahl der Bereiche von F und folglich die Anzahl der Substitutionen der Gruppe ϑ unendlich gross, η ist eine transcendente Function von z, und jede Curve, die den Orthogonalkreis in einem Punkte trifft der keine Ecke ist, ist im Sinne der oben (Nr. 286, S. 107) gegebenen Definition von der zweiten Art.

Hieraus folgt ferner:

Für die Dreiecksfunctionen erster Art bedeckt die Fläche F das Innere des Orthogonalkreises vollständig und lückenlos. Für die Dreiecksfunctionen zweiter und dritter Art gilt das Gleiche für die ganze unendliche η-Ebene; nur ist bei den Functionen zweiter Art die Fläche F durch den Punkt η_0 begrenzt, während sie für die dritte Art unbegrenzt ist.

In allen drei Fällen ist also die Fläche F eine einfach zusammenhängende.

Der Discontinuitätsbeweis lässt sich nunmehr mit Leichtigkeit führen.

Eine von dem Punkte a des Fundamentalbereiches F_0 ausgehende und zu demselben η-Werthe zurückkehrende ganz innerhalb der Fläche F verlaufende Curve 𝔆 könnte, da F einfach zusammenhängend ist, nur dann in einem von F_0 verschiedenen Bereiche endigen, wenn diese Curve einen Windungspunkt der Fläche F einschlösse. Die Fläche F besitzt aber, da die δ_1, δ_2, δ_3 reciproke ganze Zahlen oder Null sind, in ihrem Innern keinen Windungspunkt, also führt jede Curve 𝔆 nothwendig in den Bereich F_0 zurück. Etwas anders gefasst lautet dieser Beweis so:

Zwischen der Zusammenhangszahl $2p+1$, der Anzahl der Windungspunkte w und der Anzahl der Blätter n einer Fläche besteht nach Riemann die Beziehung

$$w - 2n = 2p - 2,$$

für unsere Fläche F ist $p = 0$, $w = 0$, folglich

$$n = 1.$$

288. Die Dreiecksfunctionen erster Art.

Wir erkennen, dass für die allgemeinste Dreiecksfunction

$$\eta = s(\delta_1, \delta_2, \delta_3, z),$$

wo die δ_1, δ_2, δ_3 reciproke ganze Zahlen oder Null sind, ähnliche Verhältnisse bestehen, wie im Falle

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0.$$

Allemal ist die zugehörige Monodromiegruppe ϑ **eigentlich** discontinuirlich für **alle** Punkte der η-Ebene, die nicht auf dem Orthogonalkreise liegen. Dies ist für die Dreiecksfunctionen zweiter und dritter Art unmittelbar evident, für die Functionen erster Art haben wir dagegen die Discontinuität der Gruppe ϑ nur für die Punkte innerhalb des Orthogonalkreises bewiesen. Man braucht aber nur zu beachten, dass die Punkte ausserhalb des Orthogonalkreises Spiegelbilder sind von den Punkten innerhalb dieses Kreises, um zu erkennen, dass, wenn wir von dem Spiegelbilde des Fundamentalbereiches F_0 in Bezug auf O ausgegangen wären, die sämmtlichen Bereiche, die aus diesem Spiegelbilde durch die Substitutionen von ϑ hervorgehen, eine Fläche gebildet hätten, die als das Spiegelbild von F das Aeussere des Orthogonalkreises vollständig lückenlos und einfach bedeckt.

Wir haben also für die **Dreiecksfunctionen erster Art zwei** Continua von Punkten, innerhalb derer die Gruppe ϑ eigentlich discontinuirlich ist, diese beiden Continua werden durch die Peripherie des Orthogonalkreises von einander getrennt. Diese Peripherie ist also die in der Nr. 202 (Bd. II, 1, S. 280) charakterisirte Punktmenge P, die aus der Gesammtheit Q der Doppelpunkte der nicht elliptischen Substitutionen von ϑ und aus der ersten Ableitung Q' dieser Gesammtheit besteht. Die allgemeinen Resultate der Nr. 204 (Bd. II, 1, S. 28[illegible]) geben uns nunmehr vollständigen Aufschluss über die Natur der Umkehrungsfunction z von η.

Wir hatten das Ausgangsdreieck als innerhalb des Orthogonalkreises gelegen angenommen, d. h. wir hatten uns den Integralquotienten η so gewählt gedacht, dass für einen bestimmten regulären Werth $z = z_0$ der zugehörige η-Werth im Innern von O lag. Halten wir an dieser Voraussetzung fest, so ist also z eine eindeutige Function von η, die ungeändert bleibt, wenn η eine Substitution der Gruppe ϑ erfährt, die nur im Innern des Orthogonalkreises O existirt und für welche jede Stelle der Peripherie von O eine Unbestimmtheitsstelle ist. Diese Function z nimmt innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 jeden Werth nur ein einziges Mal an, und es ist jede eindeutige Function von η, die die Gruppe ϑ zulässt und sich innerhalb F_0 wie eine rationale Function verhält, nach den Ergebnissen der Nr. 215 (Bd. II, 1, S. 336) rational durch z darstellbar.

Würden wir η so gewählt haben, dass dieser Integralquotient für inen regulären Werth von z einen Werth erhält, der ausserhalb des rthogonalkreises der entsprechenden Gruppe liegt, d. h. hätten wir las Ausgangsdreieck als ausserhalb des Orthogonalkreises befindlich gewählt, so würden wir zu einer eindeutigen, bei den Substitutionen ler Gruppe unveränderlichen Function gelangt sein, die ausserhalb lieses Orthogonalkreises existirt.

Die Gesammtheit der eindeutigen Functionen, die bei den Substitutionen unserer Gruppe ϑ ungeändert bleiben, zerfällt demnach in zwei Typen. Der eine Typus existirt innerhalb, der andere ausserhalb les Orthogonalkreises O dieser Gruppe. Der Uebergang von einer Function des einen Typus zu einer Function des anderen erfolgt, indem man z. B. in einer dieser Functionen an die Stelle der unabhängigen Variabeln η das Spiegelbild derselben in Bezug auf den Orthogonalkreis setzt. Wir werden späterhin eine Darstellung dieser Functionen kennen lernen, bei welcher dieser Uebergang in höchst anschaulicher Weise vollzogen werden kann.

Wir heben noch einmal hervor, dass also für diejenigen Dreiecksunctionen, für welche

$$\delta_1 = \frac{1}{g_1}, \quad \delta_2 = \frac{1}{g_2}, \quad \delta_3 = \frac{1}{g_3}$$

nd die Summe

$$\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3} < 1$$

t, die eben dargelegten Verhältnisse Platz greifen. Solcher Dreiecksnctionen erster Art mit eindeutiger Umkehrungsfunction giebt es fenbar unendlich viele.

289. Die Dreiecksfunctionen zweiter Art.

Die Dreiecksfunctionen zweiter Art, die zu discontinuirlichen ruppen führen, sind durch die Bedingung

$$\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3} = 1 \qquad (\alpha)$$

arakterisirt. Für dieselben ergiebt sich sofort nur eine sehr beschränkte nzahl von Möglichkeiten; in der That besitzt die Gleichung (α), als iophantische Gleichung für die ganzen positiven Zahlen g_1, g_2, g_3 ifgefasst, nur die folgenden Lösungen, wenn wir von Permutationen er g_1, g_2, g_3 absehen:

$$g_1 = 2,\quad g_2 = 2,\quad g_3 = \infty,$$
$$g_1 = 2,\quad g_2 = 4,\quad g_3 = 4,$$
$$g_1 = 2,\quad g_2 = 3,\quad g_3 = 6,$$
$$g_1 = 3,\quad g_2 = 3,\quad g_3 = 3,$$

wir erhalten also die Dreiecksfunctionen zweiter Art:

$$s\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0,\ z\right),$$
$$s\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ z\right),$$
$$s\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ z\right),$$
$$s\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ z\right)$$

und die aus denselben durch Permutation der δ_1, δ_2, δ_3 hervorgehenden. Von diesen Permutationen können wir aber absehen, da dieselben nach den Ergebnissen der Nr. 73 (Bd. I, S. 264) auf den Uebergang von z zu einer linear gebrochenen Function dieser Grösse hinauskommen.

In diesen vier Fällen ist z eine in der ganzen η-Ebene existirende eindeutige Function von η, die nur in dem Punkte $\eta = \eta_0$, auf den der Orthogonalkreis zusammengeschrumpft ist, eine Unbestimmtheitsstelle besitzt. Wenn wir den Integralquotienten η so wählen, dass der Punkt η_0 in's Unendliche fällt, so sind die Seiten der Dreieckstheilung gerade Linien in der η-Ebene, die Substitutionen der Gruppe ϑ sind wirkliche Verschiebungen der η-Ebene, und wir können uns nun auch mit Leichtigkeit die entsprechenden Ausgangsdreiecke und Fundamentalbereiche construiren.

Für die erste Function

$$s\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0,\ z\right)$$

ist die dem Umlaufe um $z = \infty$ entsprechende Substitution eine parabolische, ihr Doppelpunkt, d. h. die Ecke λ_3 des Ausgangsdreieckes, befindet sich folglich in dem unendlich fernen Punkte η_0 der η-Ebene. Die beiden anderen Ecken λ_1, λ_2 können wir noch nach Belieben wählen und dadurch den Integralquotienten η völlig bestimmen. Sei z. B.

$$\lambda_1 = 0,\quad \lambda_2 = 1,$$

dann lauten also die Substitutionen A_1, A_2 in der canonischen Form

$$A_1\eta = -\eta,\quad A_2\eta - 1 = -(\eta - 1),$$

da ja die Multiplicatoren

$$e^{2\pi\delta_1 i} = e^{2\pi\delta_2 i} = -1$$

nd. Die Substitution A_3 lautet demgemäss

$$A_3\eta = \eta - 2,$$

nd der Fundamentalbereich F_0' hat die in der Fig. 25 dargestellte orm. Die Function z von η t demnach eine einfach-periodische Function mit der Periode 2, ie aber innerhalb des Periodenreifens, der von den Parallelen ur lateralen Axe in den Punkten -1 und $+1$ begrenzt wird, den Werth zweimal annimmt, ämlich in zwei Punkten η und $-\eta$. Wir können diese Function einfachster Weise finden, wenn ir beachten, dass nach den Gleichungen (1) der Nr. 268 (S. 32) unserem Falle

$$\alpha = \beta = 0, \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

Fig. 25.

genommen werden kann. Es ist folglich z. B.

$$u_{01} = 1,$$

$$u_{02} = z^{\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z\right).$$

un ist aber, wie Gauss bemerkt hat,

$$t = \sin t \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \sin^2 t\right)$$

nd demnach

$$u_{02} = \arcsin \sqrt{z},$$

h. wir haben

$$z = \sin^2\left(\frac{u_{02}}{u_{01}}\right),$$

o, da für $z = 0$, $\eta = 0$ und für $z = 1$, $\eta = 1$ sein sollte,

$$z = \sin^2 \frac{\pi\eta}{2}.$$

Für die Function

$$\eta = s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, z\right)$$

ist das Ausgangsdreieck ein rechtwinkelig gleichschenkeliges, der Fundamentalbereich F_0 hat also die in der Fig. 26 dargestellte Form. Die Abbildung von F_0 mittelst der Substitution A_1 liefert den Bereich F_1, der mit F_0 zusammen ein Quadrat bildet. Innerhalb dieses Quadrates $(\lambda_2, \lambda_3', \lambda_2', \lambda_3)$ nimmt die eindeutige Function z von η jeden Werth zweimal an und zwar immer in Punkten, die der Gleichung

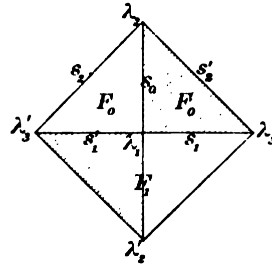


Fig. 26.

$$\eta' - \lambda_1 = -(\eta - \lambda_1)$$

Genüge leisten. Insbesondere hat also z auf je zwei gegenüberliegenden Seiten jenes Quadrates denselben Werth, es ist demnach z eine eindeutige doppeltperiodische Function von η mit den Perioden

$$\omega_1 = \lambda_2 - \lambda_3, \quad \omega_2 = \lambda_3' - \lambda_2,$$

die innerhalb des Periodenparallelogramms jeden Werth zweimal annimmt. Da der Quotient der Perioden

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\lambda_3' - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} = i$$

ist, so haben wir in z eine lemniscatische Function von η.

Für die Function

$$\eta = s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, z\right)$$

ist das Ausgangsdreieck ebenfalls rechtwinkelig, der Fundamentalbereich F_0 ist in der Fig. 27 dargestellt. Auch hier ist z eine doppeltperiodische eindeutige Function von η mit den Perioden

$$\omega_1 = \lambda_2 - \lambda_3, \quad \omega_2 = \lambda_3' - \lambda_2,$$

die in zwei Punkten des Periodenparallelogramms $(\lambda_2, \lambda_3', \lambda_2', \lambda_3)$, die durch die Gleichung

$$\eta' - \lambda_1 = -(\eta - \lambda_1)$$

mit einander verknüpft sind, denselben Werth annimmt.

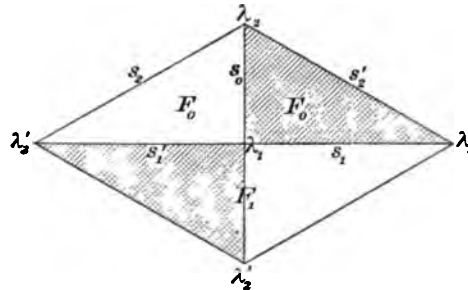


Fig. 27.

Der Periodenquotient hat den Werth

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = e^{\frac{\pi i}{3}}.$$

Für die Function

$$\eta = s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, z\right)$$

llich ist das Ausgangsdreieck ein gleichseitiges; die Fig. 28 veran-
ıaulicht den Fundamentalbereich F_0. Die Substitutionen A_1, A_2, A_3
ıten

$$A_x \eta - \lambda_x = e^{\frac{2\pi i}{3}} (\eta - \lambda_x),$$
$$(x = 1, 2, 3).$$

ɔiegeln wir das Ausgangsdreieck $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ in Bezug auf die Seite s_2',
ıs so entstehende Dreieck $(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1')$ in Bezug auf die Seite (λ_1', λ_3),
ıs entstandene Spiegel-
ild $(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3)$ in Bezug
ıf die Seite (λ_1', λ_2'),
das neue Dreieck
$(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'')$ weiter in
ezug auf $(\lambda_2', \lambda_3'')$, das
eue Dreieck $(\lambda_2', \lambda_3'', \lambda_1'')$

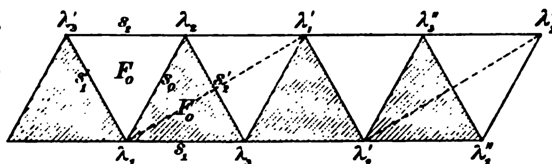


Fig. 28.

ı Bezug auf $(\lambda_1'', \lambda_3'')$, so erhalten wir drei schraffirte und drei un-
chraffirte Dreiecke. Innerhalb des Parallelogramms $(\lambda_1, \lambda_1', \lambda_2'', \lambda_2')$
ımmt dann die Function z von η jeden Werth zweimal an, und die
egenüberliegenden Seiten dieses Parallelogramms bestehen aus corre-
pondirenden Punkten.

Es ist folglich z eine eindeutige doppeltperiodische Function von η,
ie innerhalb des Periodenparallelogramms $(\lambda_1, \lambda_1', \lambda_2'', \lambda_2')$ jeden Werth
reimal annimmt, und die Perioden haben die Werthe

$$\omega_1 = \lambda_2' - \lambda_1, \quad \omega_2 = \lambda_1' - \lambda_1,$$

hrend der Quotient derselben

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{\pi i}{6}}$$

unden wird.

Die Darstellung der drei so gefundenen doppeltperiodischen Func-
ıen bietet hiernach keine Schwierigkeiten, wenn man sich der aus
Elementen der Theorie der elliptischen Functionen bekannten
meln bedient.

Drittes Kapitel.

290. Die möglichen Fälle von Dreiecksfunctionen dritter Art. Allgemeine Festsetzungen.

Durch die Betrachtungen der beiden letzten Nummern sind alle Fälle erschöpft, in denen für eine Gauss'sche Differentialgleichung die unabhängige Variable z eine transcendente eindeutige Function des Integralquotienten η darstellt. Wir haben nun noch die Dreiecksfunctionen dritter Art zu studiren, für welche

$$\delta_1 = \frac{1}{g_1}, \quad \delta_2 = \frac{1}{g_2}, \quad \delta_3 = \frac{1}{g_3}$$

ist, und die ganzen positiven Zahlen g_1, g_2, g_3 der Ungleichung

$$(\beta) \qquad \frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3} > 1$$

Genüge leisten.

Wir wissen, dass in diesen Fällen die Gruppe ϑ eine endliche, aus lauter elliptischen Substitutionen zusammengesetzte sein muss, dass also η eine algebraische Function von z, und folglich, da die Gruppe discontinuirlich und demnach z eindeutig in η ist, z eine rationale Function von η darstellen muss.

Da jede der Zahlen g_1, g_2, g_3 grösser wie Eins ist, ergeben sich, von Permutationen abgesehen, für diese Zahlen gemäss der Ungleichung (β) nur die folgenden Möglichkeiten:

I. $g_1 = 2, \quad g_2 = 2, \quad g_3 = \text{beliebig} = n,$

II. $g_1 = 2, \quad g_2 = 3, \quad g_3 = 3,$

III. $g_1 = 2, \quad g_2 = 3, \quad g_3 = 4,$

IV. $g_1 = 2, \quad g_2 = 3, \quad g_3 = 5.$

Dieselben stellen alle Fälle dar, in denen für eine Gauss'sche Differentialgleichung die unabhängige Variable z eine rationale Function des Integralquotienten ist. Der bereits früher aufgetretene Fall der Dreiecksfunction

$$s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z\right)$$

(vergl. Nr. 277, S. 73), ordnet sich nach Vertauschung von δ_1 mit δ_3 in den Fall I ein. Wir stellen uns die Aufgabe, in allen vier angegebenen Fällen die rationale Function z von η wirklich aufzufinden und die Integration der entsprechenden Gaussschen Differentialgleichung, beziehungsweise der entsprechenden Differentialgleichung (2) der Nr. 268, S. 32

$$(1)\qquad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{4}\left\{\frac{\delta_1^2-1}{z^2} + \frac{\delta_2^2-1}{(1-z)^2} + \frac{\delta_1^2+\delta_2^2-\delta_3^2-1}{z(1-z)}\right\} w,$$

durch explicite Formeln zu vollziehen.

Wir nehmen den Integralquotienten η so, dass der Mittelpunkt η_0 des imaginären Orthogonalkreises O in den Nullpunkt fällt, und dass das Quadrat c des imaginären Radius von O den Werth -1 erhält. Die Gleichung von O lautet dann

$$\eta\bar{\eta} = -1,$$

und die Verschiebungen der Fläche, deren Linienelement durch

$$\frac{2\,|\,d\eta\,|}{\eta\bar{\eta}+1}$$

dargestellt wird, sind nach dem Satze 3 der Nr. 282 (S. 93) von der Form

$$(2)\qquad \eta' = A\eta, \qquad \frac{\eta'-\lambda}{\eta'-\mu} = K\,\frac{\eta-\lambda}{\eta-\mu},$$

woselbst

$$(3)\qquad |\,K\,| = 1, \qquad \lambda\bar{\mu} = \bar{\lambda}\mu = -1$$

ist. Wenn

$$\eta = p + qi$$

gesetzt wird, so besteht nach Nr. 284 (S. 98) zwischen p, q und den geodätischen Polarcoordinaten r, φ auf der Fläche vom constanten Krümmungsmaasse

$$\left|\frac{1}{\sqrt{-c}}\right| = 1$$

die Beziehung (vergl. a. a. O. Glgn. (9), (12))

$$(4)\qquad \begin{cases} p = \varrho\cos\varphi, \quad q = \varrho\sin\varphi, \\ \varrho = \operatorname{tg}\frac{r}{2}\cdot \end{cases}$$

Wir können jetzt die Fläche vom constanten Krümmungsmaasse 1 speciell als eine Kugel S vom Radius 1 wählen, dann sind also auf dieser Kugel die Grössen r, φ nichts anderes, wie die Polhöhe und die geographische Länge, und wenn wir demgemäss durch die Formeln

$$\xi_1 = \sin r\cos\varphi,$$
$$\xi_2 = \sin r\sin\varphi,$$
$$\xi_3 = \cos r$$

die rechtwinkeligen Coordinaten eines Punktes dieser Kugel darstellen, so erscheint dieselbe durch Vermittelung der Gleichungen

$$p = \frac{\xi_1}{1+\xi_3}, \quad q = \frac{\xi_2}{1+\xi_3}, \quad \eta = \operatorname{tg}\frac{r}{2}\cdot e^{\varphi i}$$

auf die η-Ebene durch stereographische Projection abgebildet.

Sei $A\eta$ eine Verschiebung, und möge der eine Doppelpunkt

$$\lambda = \operatorname{tg}\frac{r_0}{2}\cdot e^{\varphi_0 i}$$

sein, so hat der andere Doppelpunkt den Werth

$$\mu = -\frac{1}{\bar\lambda} = \operatorname{tg}\frac{r_0+\pi}{2}\cdot e^{\varphi_0 i},$$

d. h. die beiden Doppelpunkte entsprechen den beiden Endpunkten eines Durchmessers auf der Kugel S. Die Verschiebung selbst ist nichts anderes, wie eine Drehung der Kugel S um diesen Durchmesser als Axe, und zwar eine Drehung um den Winkel

$$\operatorname{Arg} K.$$

291. **Abbildung auf die Kugel. Zusammenhang mit den regulären Körpern.**

Denken wir uns die der projectiven Gruppe ϑ entsprechende Theilung der η-Ebene, insbesondere den Fundamentalbereich F_0, auf die Kugel S übertragen, so entspricht dem F_0 ein von geodätischen Linien, d. h. also von grössten Kreisen gebildetes Viereck, welches durch die Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt wird, die jetzt in Bezug auf den diese Diagonale bildenden grössten Kreis im gewöhnlichen Sinne des Wortes symmetrisch sind. Wir bezeichnen die Ecken und Seiten dieser sphärischen Dreiecke durch dieselben Buchstaben, wie die ihnen entsprechenden Punkte und Kreise der η-Ebene und denken uns auch, wie in der η-Ebene, das der unteren z-Halbebene entsprechende Dreieck (das Ausgangsdreieck) schraffirt. Die den übrigen Bereichen der η-Ebene entsprechenden Bereiche auf der Kugel sind dann mit dem dem Fundamentalbereiche F_0 entsprechenden sphärischen Vierecke im gewöhnlichen Sinne congruent und bestehen auch wie dieses aus je zwei symmetrischen sphärischen Dreiecken, die wir uns ebenfalls abwechselnd schraffirt und unschraffirt denken wollen.

Die Kugel S erscheint auf diese Weise mit einem Netze theils schraffirter, theils unschraffirter Dreiecke überzogen, von denen je zwei längs einer Seite benachbarte in Bezug auf den diese Seite bildenden grössten Kreis symmetrisch sind. Diese Dreiecke erfüllen die Oberfläche

der Kugel vollständig und lückenlos und lagern sich schlicht neben einander. Die Winkel eines solchen sphärischen Dreiecks werden durch die Zahlen

$$\frac{\pi}{g_1}, \quad \frac{\pi}{g_2}, \quad \frac{\pi}{g_3}$$

gegeben, die sämmtlichen Dreiecke haben demnach gleichen Flächeninhalt, nämlich

$$J = \frac{\pi}{g_1} + \frac{\pi}{g_2} + \frac{\pi}{g_3} - \pi.$$

Dividiren wir also die Oberfläche 4π der gesammten Kugel durch diesen Flächeninhalt J, so erhalten wir die Anzahl der Dreiecke unserer Theilung, d. h. die doppelte Anzahl der aus F_0 durch die Substitutionen der Gruppe ϑ hervorgehenden Bereiche, also die doppelte Anzahl der Substitutionen von ϑ.

Wenn wir die Anzahl der Substitutionen von ϑ durch ν bezeichnen, so ist demnach

$$2\nu = \frac{4\pi}{\frac{\pi}{g_1} + \frac{\pi}{g_2} + \frac{\pi}{g_3} - \pi} = \frac{4}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3} - 1},$$

wir finden also in den vier möglichen Fällen

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \nu = 2n, \\ \text{II.} \quad & \nu = 12, \\ \text{III.} \quad & \nu = 24, \\ \text{IV.} \quad & \nu = 60. \end{aligned}$$

Die Zahl ν giebt allemal zugleich die Anzahl der Zweige der algebraischen Function η von z an.

Von der geometrischen Gestalt der auf der Kugel entstehenden Dreieckstheilung können wir uns nun leicht eine klare Vorstellung bilden.

Im Falle I stehen die Seiten (λ_1, λ_3) und (λ_2, λ_3) des Ausgangsdreiecks auf der Seite (λ_1, λ_2) senkrecht und schneiden sich im Punkte λ_3 unter dem Winkel $\frac{\pi}{n}$; der Punkt λ_3 ist also der Pol des die Seite (λ_1, λ_2) bildenden grössten Kreises, den wir als den Aequator der Kugel auffassen wollen, Durch symmetrische Abbildung in Bezug auf den Aequator entsteht dann das Dreieck $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3')$, welches mit dem Ausgangsdreiecke zusammen den Fundamentalbereich F_0 bildet. Die Ecke λ_3' liegt der Ecke λ_3 diametral gegenüber und ist folglich der zweite Pol des Aequatorkreises. Wir erhalten also die Kugeltheilung in diesem Falle, wenn wir von λ_1 ausgehend den Aequator in $2n$ gleiche Theile theilen und die Theilpunkte mit den beiden Polen λ_3, λ_3' durch

grösste Kreise verbinden. Die Ecken dieser Theilung sind nicht anderes wie die Eckpunkte einer der Kugel eingeschriebenen Doppel pyramide.

Denken wir uns mit Herrn Klein in der Aequatorebene ein den Aequatorkreise eingeschriebenes regelmässiges n-Eck, dessen eine Eck in λ_1 liegt, doppelt genommen und diese Doppelfläche als die Begren zung eines Körpers (vom Rauminhalte Null), des sogenannten Dieders aufgefasst, so können wir kurz sagen: Die Ebenen der die Seiten unsere Kugeltheilung bildenden grössten Kreise sind die Symmetrieebenen dieses Dieders, und die Substitutionen der Gruppe ϑ sind nicht anderes als Drehungen der Kugel, bei welchen die durch die Dieder ecken gebildete Punktgruppe in sich selbst übergeht. Bei denselben Drehungen bleibt dann auch die Polarfigur des Dieders, d. h. die Gruppe der beiden Punkte λ_3, λ_3' und ebenso die Gruppe der mit λ correspondirenden Punkte, die als Centralprojectionen der Kanten halbirungspunkte des Dieders vom Kugelmittelpunkte aus auf die Kugel aufgefasst werden können, ungeändert.

Im Falle II bilden die $\frac{\nu}{g_2} = 4$ mit λ_2 correspondirenden Eckpunkte der Dreieckstheilung die Eckpunkte eines der Kugel eingeschriebenen regelmässigen Tetraeders, die $\frac{\nu}{g_3} = 4$ mit λ_3 correspondirenden Eck punkte die Ecken des Polar- oder Gegentetraeders, die $\frac{\nu}{g_1} = 6$ mit λ_1 correspondirenden Eckpunkte die Centralprojectionen der Kanten halbirungspunkte beider Tetraeder auf die Kugel. Die Ebenen der die Seiten der Dreieckstheilung bildenden grössten Kreise sind die Symmetrieebenen der beiden Tetraeder, und den Substitutionen der Gruppe ϑ entsprechen diejenigen Drehungen der Kugel, bei denen die beiden Eckenquadrupel der beiden Tetraeder und die Gruppe der sechs Projectionen der Kantenhalbirungspunkte in sich selbst übergehen.

Im Falle III bilden die $\frac{\nu}{g_3} = 6$ mit λ_3 correspondirenden Ecken der Dreieckstheilung die Eckpunkte eines regelmässigen Oktaeders, die $\frac{\nu}{g_2} = 8$ mit λ_2 correspondirenden Ecken die Eckpunkte seiner Polar figur, d. i. eines Hexaeders, die $\frac{\nu}{g_1} = 12$ mit λ_1 correspondirenden die Centralprojectionen der Kantenhalbirungspunkte des Oktaeders auf die Kugel. Die Ebenen der die Dreiecksseiten bildenden grössten Kreise sind die Symmetrieebenen des Oktaeders, und den Substitutionen der Gruppe ϑ entsprechen diejenigen Drehungen der Kugel, die die Oktaederecken, die Hexaederecken und die Projectionen der Kanten halbirungspunkte in sich selbst überführen.

Im Falle IV endlich bilden die $\frac{\nu}{g_3} = 12$ mit λ_3 correspondirenden Ecken der Dreieckstheilung die Ecken eines regelmässigen Ikosaeders, die $\frac{\nu}{g_2} = 20$ mit λ_2 correspondirenden Eckpunkte die Ecken seiner Polarfigur, d. i. eines regelmässigen Dodekaeders, die $\frac{\nu}{g_1} = 30$ mit λ_1 correspondirenden Eckpunkte die Centralprojectionen der Kantenhalbirungspunkte des Ikosaeders auf die Kugel. Die Ebenen der die Seiten der Dreieckstheilung bildenden grössten Kreise sind die Symmetrieebenen des Ikosaeders, und die den Substitutionen der Gruppe ϑ entsprechenden Kugeldrehungen sind genau diejenigen, bei denen die Ikosaederecken, die Dodekaederecken und die Gruppe der Projectionen der Kantenhalbirungspunkte in sich selbst übergeführt werden.

Entsprechend dieser von den Herren Schwarz und Klein gegebenen Deutung der den vier Fällen der Dreiecksfunctionen dritter Art mit eindeutiger Umkehrungsfunction entsprechenden Kugeltheilungen charakterisirt man diese Fälle wohl auch kurz als die des Dieders, Tetraeders, Oktaeders und Ikosaeders und nennt die zugehörige Gruppe ϑ die Dieder-, Tetraeder-, Oktaeder- beziehungsweise Ikosaeder-Gruppe.

292. Analytische Discussion der Dreiecksfunctionen dritter Art. Homogene Formen der Elemente eines Fundamentalsystems.

Wir wenden uns nun zur analytischen Untersuchung der eben geometrisch charakterisirten Dreiecksfunctionen.

Da η eine ν-deutige algebraische Function von z ist, so wird, wenn wir uns die rationale Function z von η in der Form

$$z = \frac{g(\eta)}{h(\eta)} \tag{5}$$

dargestellt denken, wo $g(\eta)$, $h(\eta)$ ganze rationale Functionen ohne gemeinsamen Theiler sind, der Grad dieser ganzen Functionen gleich ν sein.

Die einzigen Verzweigungspunkte der algebraischen Function η von z sind die singulären Stellen

$$z = 0,\ 1,\ \infty$$

der Differentialgleichung (1); in der Umgebung derselben ist η beziehungsweise nach ganzen Potenzen von

$$z^{\frac{1}{g_1}},\quad (z-1)^{\frac{1}{g_2}},\quad \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{g_3}}$$

entwickelbar. Bezeichnen wir durch

$$A_1 = 1, \quad A_2, \quad A_3, \cdots A_\nu$$

die sämmtlichen Substitutionen der Gruppe ϑ, so gehören zu einem regulären z-Werthe die ν von einander verschiedenen Werthe

$$\eta, \quad A_2\eta, \quad A_3\eta, \cdots A_\nu\eta$$

von η; dagegen fallen von diesen ν Werthen für $z = 0$ je g_1, für $z = 1$ je g_2 und für $z = \infty$ je g_3 zusammen.

Nun ist aber

$$\begin{array}{lll} \text{für} & z = 0, & g(\eta) = 0, \\ \text{für} & z = 1, & g(\eta) - h(\eta) = 0, \\ \text{für} & z = \infty, & h(\eta) = 0, \end{array}$$

es muss folglich

(6) $$g(\eta) = [f_1(\eta)]^{g_1}, \quad g(\eta) - h(\eta) = [f_2(\eta)]^{g_2}, \quad h(\eta) = [f_3(\eta)]^{g_3}$$

sein, wo $f_1(\eta)$, $f_2(\eta)$, $f_3(\eta)$ ganze rationale Functionen von η sind, die lauter einfache lineare Factoren enthalten. Zwischen diesen drei ganzen Functionen besteht die Beziehung

(7) $$[f_1(\eta)]^{g_1} - [f_2(\eta)]^{g_2} - [f_3(\eta)]^{g_3} = 0.$$

Bezeichnen wir mit ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die Grade der ganzen Functionen f_1, f_2, f_3, so ist

$$\varrho_1 = \frac{\nu}{g_1} = \frac{\nu}{2}, \quad \varrho_2 = \frac{\nu}{g_2}, \quad \varrho_3 = \frac{\nu}{g_3},$$

wir haben also in unseren vier Fällen für diese drei Zahlen die Werthe:

$$\begin{array}{llll} \text{I.} & \varrho_1 = n, & \varrho_2 = n, & \varrho_3 = 2, \\ \text{II.} & \varrho_1 = 6, & \varrho_2 = 4, & \varrho_3 = 4, \\ \text{III.} & \varrho_1 = 12, & \varrho_2 = 8, & \varrho_3 = 6, \\ \text{IV.} & \varrho_1 = 30, & \varrho_2 = 20, & \varrho_3 = 12. \end{array}$$

Da für $z = 0, 1, \infty$ der Ausgangszweig η die Werthe λ_1, λ_2, λ_3 an nimmt, ist

$$[f_1(\eta)]^{g_1} = c_1 \prod_{\varkappa=1}^{\nu} (\eta - A_\varkappa \lambda_1), \qquad [f_2(\eta)]^{g_2} = c_2 \prod_{\varkappa=1}^{\nu} (\eta - A_\varkappa \lambda_2),$$

$$[f_3(\eta)]^{g_3} = c_3 \prod_{\varkappa=1}^{\nu} (\eta - A_\varkappa \lambda_3),$$

wo die c_1, c_2, c_3 Constanten bedeuten.

In der Umgebung von $z = 0$ ist $\eta - \lambda_1$ in der Form

$$\eta - \lambda_1 = \alpha_1 z^{\frac{1}{g_1}} + \alpha_2 z^{\frac{1}{g_1}+1} + \cdots, \qquad \alpha_1 \neq 0,$$

dargestellt; durch Umkehrung dieser Entwickelung ergiebt sich

$$z = \beta_1 (\eta - \lambda_1)^{g_1} + \beta_2 (\eta - \lambda_1)^{g_1 + 1} + \cdots, \quad \beta_1 = \frac{1}{\alpha_1},$$

und hieraus folgt

$$(8) \qquad \frac{dz}{d\eta} = \beta_1 g_1 (\eta - \lambda_1)^{g_1 - 1} + \beta_2 (g_1 + 1)(\eta - \lambda_1)^{g_1} + \cdots.$$

Analog ist in der Umgebung von $\eta = \lambda_2$

$$(9) \qquad \frac{dz}{d\eta} = \gamma_1 g_2 (\eta - \lambda_2)^{g_2 - 1} + \gamma_2 (g_2 + 1)(\eta - \lambda_2)^{g_2} + \cdots,$$

und in der Umgebung von $\eta = \lambda_3$

$$(10) \qquad -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{d\eta} = \varepsilon_1 g_3 (\eta - \lambda_3)^{g_3 - 1} + \varepsilon_2 (g_3 + 1)(\eta - \lambda_3)^{g_3} + \cdots.$$

Aehnliche Entwickelungen gelten in der Umgebung der mit λ_1, λ_2, λ_3 correspondirenden η-Werthe.

Hieraus schliessen wir, dass die ganze Function $(2\nu - 1)^{\text{ten}}$ Grades

$$h(\eta) g'(\eta) - h'(\eta) g(\eta)$$

für die mit λ_1 correspondirenden Punkte, d. h. für die Wurzeln der Gleichung

$$f_1(\eta) = 0,$$

von der Ordnung $g_1 - 1$, für die mit λ_2 correspondirenden Punkte, d. h. für die Wurzeln der Gleichung

$$f_2(\eta) = 0,$$

von der Ordnung $g_2 - 1$, für die mit λ_3 correspondirenden Punkte, d. h. für die Wurzeln der Gleichung

$$f_3(\eta) = 0,$$

von der Ordnung $g_3 - 1$ verschwinden muss. Bei geeigneter Wahl der Constanten c_1, c_2, c_3 ist demnach

$$(11) \qquad h(\eta) g'(\eta) - g(\eta) h'(\eta) = [f_1(\eta)]^{g_1 - 1} [f_2(\eta)]^{g_2 - 1} [f_3(\eta)]^{g_3 - 1}.$$

Für die folgenden Untersuchungen ist es zweckmässig, die hier auftretenden ganzen rationalen Functionen von η durch Multiplication mit geeigneten Factoren in homogene Functionen von zwei Grössen umzuwandeln. Zu dem Ende führen wir die beiden Lösungen

$$(12) \qquad w_1 = \sqrt{\frac{dz}{d\eta}}, \quad w_2 = \eta \sqrt{\frac{dz}{d\eta}}$$

der Differentialgleichung (1) ein, als deren Quotient

$$\frac{w_2}{w_1} = \eta$$

unser Integralquotient η erscheint.

Setzen wir dann

$$(13)\qquad w_1^{\nu}\, g(\eta) = G(w_1, w_2), \quad w_1^{\nu} h(\eta) = H(w_1, w_2),$$

$$(14)\qquad \begin{cases} w_1^{\varrho_1} f_1(\eta) = F_1(w_1, w_2), \quad w_1^{\varrho_2} f_2(\eta) = F_2(w_1, w_2), \\ w_1^{\varrho_3} f_3(\eta) = F_3(w_1, w_2), \end{cases}$$

so ergeben sich aus den Gleichungen (6) und (7)

$$(15)\qquad \begin{cases} G(w_1, w_2) = F_1^{g_1}(w_1, w_2), \quad H(w_1, w_2) = F_3^{g_3}(w_1, w_2), \\ G(w_1, w_2) - H(w_1, w_2) = F_2^{g_2}(w_1, w_2), \end{cases}$$

$$(16)\qquad F_1^{g_1}(w_1, w_2) - F_2^{g_2}(w_1, w_2) - F_3^{g_3}(w_1, w_2) = 0.$$

Die Discussion der Gleichung (16), die eine identische Beziehung zwischen drei binären Formen der w_1, w_2 darstellt, reicht, wie Halphén gezeigt hat, zur vollständigen Bestimmung der möglichen Gestalten dieser Formen aus. Wir wollen aber zur Herstellung der F_1, F_2, F_3 den Weg einschlagen, den Herr Fuchs ursprünglich bei analogen Fragen von grösserer Allgemeinheit angegeben hat und der zu mannigfachen Eigenschaften dieser Formen führen wird.

293. Reducirtes Werthesystem eines Integrals. Begriff der Primformen.

Sei u ein beliebiger regulärer Werth von z, und betrachten wir die Form

$$(17)\qquad G(w_1, w_2) - uH(w_1, w_2) = F(w_1, w_2),$$

so lässt sich dieselbe in der Gestalt

$$F(w_1, w_2) = w_1^{\nu}[g(\eta) - uh(\eta)]$$

schreiben. Die Wurzeln der Gleichung

$$g(\eta) - uh(\eta) = 0$$

sind offenbar nichts anderes, wie die η-Werthe, die dem Werthe $z = u$ entsprechen, d. h. also die Ausdrücke

$$\eta(u), \quad A_2\eta(u), \quad A_3\eta(u), \cdots A_\nu\eta(u).$$

Wir haben folglich

$$F(w_1, w_2) = c w_1^{\nu} \prod_{\varkappa=1}^{\nu} [\eta(z) - A_\varkappa \eta(u)],$$

wo c eine Constante bedeutet.

Setzen wir

$$A_\varkappa \eta = \frac{d_\varkappa \eta + c_\varkappa}{b_\varkappa \eta + a_\varkappa}, \qquad a_\varkappa d_\varkappa - b_\varkappa c_\varkappa = 1,$$
$$(\varkappa = 1, 2, \cdots \nu)$$

so verwandelt der Umlauf von z, durch welchen η in $A_\varkappa \eta$ übergeht, die Integrale w_1, w_2 in

$$\Theta_\varkappa w_1 = \pm (a_\varkappa w_1 + b_\varkappa w_2),$$
$$\Theta_\varkappa w_2 = \pm (c_\varkappa w_1 + d_\varkappa w_2).$$

Wir erhalten demnach

$$F(w_1, w_2) = \frac{c}{\prod\limits_{\varkappa=1}^{\nu} (b_\varkappa \eta(u) + a_\varkappa)} \prod_{\varkappa=1}^{\nu} [\eta(u)(-d_\varkappa w_1 + b_\varkappa w_2) - (c_\varkappa w_1 - a_\varkappa w_2)].$$

Nun ist aber

$$\begin{pmatrix} a_\varkappa & b_\varkappa \\ c_\varkappa & d_\varkappa \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -d_\varkappa & b_\varkappa \\ c_\varkappa & -a_\varkappa \end{pmatrix},$$

und da die Gesammtheit der Substitutionen $A_\varkappa^{-1}$ mit der Gesammtheit der Substitutionen $A_\varkappa$ identisch ist, so können wir auch schreiben

$$F(w_1, w_2) = -\frac{c}{\prod\limits_{\varkappa=1}^{\nu} (b_\varkappa \eta(u) + a_\varkappa)} \prod_{\varkappa=1}^{\nu} [(a_\varkappa w_1 + b_\varkappa w_2)\eta(u) - (c_\varkappa w_1 + d_\varkappa w_2)].$$

Da u ein willkürlicher fester Werth von z sein sollte, so können wir auch $\eta(u)$ als eine willkürliche Constante, also auch die Werthe der Integrale w_1, w_2 im Punkte u

$$w_1(u) = \gamma_2, \quad w_2(u) = -\gamma_1$$

als willkürliche Constanten ansehen. Setzen wir ferner

$$-\frac{c}{\gamma_2^{\nu} \prod\limits_{\varkappa=1}^{\nu} (b_\varkappa \eta(u) + a_\varkappa)} = C,$$

so ist auch C eine Constante, und wir erhalten

$$(18) \qquad F(w_1, w_2) = C \prod_{\varkappa=1}^{\nu} [\gamma_1 (a_\varkappa w_1 + b_\varkappa w_2) + \gamma_2 (c_\varkappa w_1 + d_\varkappa w_2)].$$

Der Ausdruck

$$\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 = w$$

ist nichts anderes wie das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1); die Gesammtheit aller Zweige von w, die durch alle möglichen Umläufe

der unabhängigen Variabeln z zum Vorschein kommen können, ist in der Formel

$$\pm [\gamma_1(a_\varkappa w_1 + b_\varkappa w_2) + \gamma_2(c_\varkappa w_1 + d_\varkappa w_2)]$$

enthalten. Für unbestimmtes u kann es sich nicht ereignen, dass der Quotient

$$\frac{\gamma_1(a_\varkappa w_1 + b_\varkappa w_2) + \gamma_2(c_\varkappa w_1 + d_\varkappa w_2)}{\gamma_1(a_i w_1 + b_i w_2) + \gamma_2(c_i w_1 + d_i w_2)} \qquad (i \neq \varkappa)$$

einen von z unabhängigen Werth erhält, da sonst zwei lineare Factoren der ganzen Function

$$g(\eta) - u\,h(\eta)$$

identisch sein müssten, was wegen der Irreductibilität der Gleichung

$$g(\eta) - z\,h(\eta) = 0$$

nicht möglich ist.

Dagegen ist für $u = 0$

$$F(w_1, w_2) = F_1^{g_1}(w_1, w_2),$$

d. h. wenn wir

$$w_1(0) = \mathfrak{a}_2, \quad w_2(0) = -\,\mathfrak{a}_1$$

setzen, so erhalten wir in

$$\mathfrak{w}_1 = \mathfrak{a}_1 w_1 + \mathfrak{a}_2 w_2$$

ein Integral von (1), welches so beschaffen ist, dass von den ν Zweigen

$$\mathfrak{a}_1(a_\varkappa w_1 + b_\varkappa w_2) + \mathfrak{a}_2(c_\varkappa w_1 + d_\varkappa w_2) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu)$$

je g_1 sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden.

Setzen wir analog

$$w_1(1) = \mathfrak{b}_2, \quad w_2(1) = -\,\mathfrak{b}_1,$$
$$w_1(\infty) = \mathfrak{c}_2, \quad w_2(\infty) = -\,\mathfrak{c}_1,$$

so hat das Integral

$$\mathfrak{w}_2 = \mathfrak{b}_1 w_1 + \mathfrak{b}_2 w_2$$

nur ϱ_2 Zweige, die nicht durch Multiplication mit constanten Factoren aus einander hervorgehen, und das Integral

$$\mathfrak{w}_3 = \mathfrak{c}_1 w_1 + \mathfrak{c}_2 w_2$$

nur ϱ_3 Zweige von dieser Beschaffenheit.

Wir bezeichnen mit Herrn Fuchs ein System von Zweigen eines Integrals w, in welchem keine zwei Zweige enthalten sind, die einen von z unabhängigen Quotienten haben, als ein reducirtes Werthsystem dieses Integrals. Die eben angestellten Betrachtungen liefern dann den Satz:

Für unbestimmte γ_1, γ_2 besteht ein reducirtes Werthsystem des Integrals

$$\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2$$

aus ν Zweigen, und es giebt (abgesehen von constanten Factoren) nur drei Integrale, deren reducirte Werthesysteme weniger wie ν Zweige enthalten. Es sind dies nämlich die Integrale

$$\mathfrak{w}_1, \quad \mathfrak{w}_2, \quad \mathfrak{w}_3,$$

deren reducirte Werthesysteme beziehungsweise aus ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 Zweigen bestehen.

Bezeichnen wir durch

$$\mathfrak{w}^{(1)}, \quad \mathfrak{w}^{(2)}, \cdots \mathfrak{w}^{(\mu)}$$

ein reducirtes Werthesystem des Integrals

$$\mathfrak{w} = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2,$$

so ist das Product

$$\text{const. } \mathfrak{w}^{(1)} \mathfrak{w}^{(2)} \cdots \mathfrak{w}^{(\mu)} = \mathfrak{F}(w_1, w_2)$$

eine homogene ganze Function μ-ten Grades von w_1, w_2. Diese Form $\mathfrak{F}$ hat die Eigenschaft, dass sie sich nur mit einem constanten Factor multiplicirt, wenn z irgend welche geschlossene Wege beschreibt. Die logarithmische Ableitung von $\mathfrak{F}$ ist demnach eine eindeutige Function, und zwar, da die Differentialgleichung (1) zur Fuchs'schen Classe gehört, eine rationale Function von z. Da aber $\mathfrak{F}$ eine algebraische Function von z sein muss, so schliessen wir:

Die Form $\mathfrak{F}$ ist gleich der Wurzel aus einer rationalen Function von z.

Nun ist $F(w_1, w_2)$ das Product der Elemente eines reducirten Werthesystems des allgemeinen Integrals w, die Formen

$$F_1(w_1, w_2), \quad F_2(w_1, w_2), \quad F_3(w_1, w_2)$$

sind beziehungsweise die Producte der Elemente je eines reducirten Werthesystems der Integrale $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$, $\mathfrak{w}_3$; wir können also sagen:

Die Formen

$$(19) \qquad F(w_1, w_2), \quad F_1(w_1, w_2), \quad F_2(w_1, w_2), \quad F_3(w_1, w_2)$$

sind Wurzeln aus rationalen Functionen von z.

Eine Form $\mathfrak{F}(w_1, w_2)$, die gleich dem Producte der Elemente eines reducirten Werthesystems eines Integrals der Differentialgleichung (1) ist, nennen wir nach Herrn Fuchs eine Primform. Abgesehen von einem constanten Factor stellen uns die Formen (19) alle möglichen Primformen dar, und zwar enthält die Primform ν-ten Grades $F(w_1, w_2)$ noch den willkürlichen Parameter u, während die Primformen niedrigeren als ν-ten Grades F_1, F_2, F_3 vollkommen bestimmt sind.

294. Invariante Formen. Neue Definition der Primformen. Sätze von Fuchs.

Betrachten wir allgemeiner eine homogene ganze Function von w_1, w_2, die gleich der Wurzel aus einer rationalen Function von z ist, so nennen wir eine solche Function (vergl. Nr. 195, Bd. II, 1, S. 250) eine invariante Form der w_1, w_2. Sei

$$(20) \qquad M(w_1, w_2) = w_1^r m(\eta) = R(z)$$

eine so beschaffene Form vom Grade r, also $m(\eta)$ eine ganze Function r-ten Grades von η, $R(z)$ die Wurzel aus einer rationalen Function von z. Da $m(\eta)$ für keinen endlichen Werth von η unendlich wird, kann $R(z)$ nur so unendlich werden, wie w_1^r. Nun ist aber bei geeigneter Wahl von η das Integral w_1 für jeden regulären Werth von z endlich und von Null verschieden. Da ferner

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{g_x}\right), \quad \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{g_x}\right)$$

für $x = 1, 2$ die Wurzeln der zu $z = 0$ und $z = 1$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen,

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{g_3}\right), \quad -\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{g_3}\right)$$

die Wurzeln der zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung sind, so verschwindet w_1

$$\text{für} \quad z = 0 \quad \text{von der Ordnung} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_1}\right),$$

$$\text{für} \quad z = 1 \quad \text{von der Ordnung} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_2}\right)$$

und wird

$$\text{für} \quad z = \infty \quad \text{von der Ordnung} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{g_3}\right)$$

unendlich gross. Wenn wir also, wie üblich, die Unendlichkeitsstelle $z = \infty$ als Nullstelle von negativer Ordnung auffassen, so ist die Gesammtzahl der Nullstellen erster Ordnung von w_1 gleich

$$(21) \qquad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_3} = \frac{-1}{\nu}.$$

Die Function $R(z)$ hat demnach die Gestalt

$$(22) \qquad R(z) = z^{r\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{g_1}\right)}(z-1)^{r\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{g_2}\right)}\Gamma(z),$$

wo Γ die Wurzel aus einer ganzen Function von z bedeutet, deren

ıension in z gleich $\frac{r}{\nu}$ sein muss, damit $R(z)$ für $z = \infty$ von der-
ıen Ordnung unendlich werde, wie w_1^r. Setzen wir

$$) \qquad \Gamma(z) = \prod_{\varkappa=1}^{\lambda} (z - c_\varkappa)^{\mu_\varkappa},$$

die $c_1, c_2, \cdots c_\lambda$ sämmtlich von einander verschieden und die $\mu_2, \cdots \mu_\lambda$ positive rationale Zahlen sind, so ist also

$$) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\lambda} \mu_\varkappa = \frac{r}{\nu}.$$

Sei $\gamma_\varkappa$ derjenige innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 gelegene Werth, für welchen z den Werth $c_\varkappa$ annimmt, dann wird die Function

$$m(\eta) = w_1^{-r} R(z)$$

$\gamma_\varkappa$ und die aus $\gamma_\varkappa$ durch die Substitutionen der Gruppe Θ hervor-enden Werthe

$$A_2\gamma_\varkappa, \quad A_3\gamma_\varkappa, \quad \cdots A_\nu\gamma_\varkappa$$

ıchwinden, und zwar wenn $c_\varkappa$ ein regulärer Punkt ist, von der Ordg $\mu_\varkappa$, wenn $c_\varkappa = 0$ ist, von der Ordnung $\mu_\varkappa g_1$, und wenn $c_\varkappa = 1$ von der Ordnung $\mu_\varkappa g_2$. Da aber $m(\eta)$ eine ganze rationale Func- von η sein sollte, so folgt hieraus:

Für einen regulären Werth $c_\varkappa$ ist $\mu_\varkappa$ eine ganze Zahl, für $= 0$ beziehungsweise $c_\varkappa = 1$ ist $\mu_\varkappa$ ein ganzzahliges Vielıes von

$$\frac{1}{g_1} \text{ beziehungsweise } \frac{1}{g_2}.$$

Wenn umgekehrt diese Bedingungen für die Exponenten $\mu_\varkappa$ eines ıruckes von der Form (23) erfüllt sind, so ist das Product

$$w_1^{-r} R(z),$$

$R(z)$ durch die Gleichung (22) und r als ganze Zahl durch die ıhung (24) bestimmt ist, eine in der Umgebung jeder Stelle η ıutige, also unverzweigte Function von η; dieses Product ist ıich eine ganze Function von η, und der Ausdruck $R(z)$ stellt dem-eine invariante Form von w_1, w_2 vom Grade r dar.

Hierdurch ist die allgemeine Gestalt einer invarianten ın als Function von z vollkommen bestimmt.

Wenn eine invariante Form nur an einer Stelle des Fundamental-ıches F_0 von der ersten Ordnung verschwindet, so ist dieselbe ıbar eine Primform. Wir können also für die Primformen auch folgende Definition aufstellen:

Eine invariante Form $M(w_1, w_2)$ ist eine Primform, wenn das zu derselben gehörige $m(\eta)$ nur an einer Stelle des Fundamentalbereiches und an den sämmtlichen correspondirenden Stellen von der ersten Ordnung verschwindet.

Eine Primform ist demnach durch Angabe ihrer Nullstelle innerhalb des Fundamentalbereiches F_0, abgesehen von einem constanten Factor, vollkommen bestimmt. Wenn diese Nullstelle $\eta = \gamma$ keine Ecke von F_0 ist, so ist die betreffende Primform

$$F_\gamma(w_1, w_2) = G(w_1, w_2) - uH(w_1, w_2) = w_1^{\nu} f_\gamma(\eta),$$

wo u den zu $\eta = \gamma$ gehörigen Werth von z bedeutet; sie ist also vom ν-ten Grade und hat als Function von z die Gestalt:

$$(25)\qquad F_\gamma(w_1, w_2) = (z-u)\, z^{\nu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_1}\right)} (z-1)^{\nu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_2}\right)}.$$

Die für $\eta = \lambda_1$ verschwindende Primform F_1 ist vom Grade ϱ_1 und hat die Gestalt:

$$(26)\qquad F_1(w_1, w_2) = z^{\frac{1}{g_1}+\varrho_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_1}\right)} (z-1)^{\varrho_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_2}\right)},$$

ebenso lautet die für $\eta = \lambda_2$ verschwindende Primform

$$(27)\qquad F_2(w_1, w_2) = (z-1)^{\frac{1}{g_2}+\varrho_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_2}\right)} z^{\varrho_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_1}\right)},$$

und die für $\eta = \lambda_3$ verschwindende Primform ist

$$(28)\qquad F_3(w_1, w_2) = z^{\varrho_3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_1}\right)} (z-1)^{\varrho_3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_2}\right)};$$

Aus dieser Darstellung ergiebt sich der Satz:

Jede invariante Form ist als ein Product von Primformen darstellbar.

Dieser Satz ist aber auch eine unmittelbare Folge aus der Definition einer invarianten Form. Wenn nämlich die invariante Form $M(w_1, w_2)$ einen linearen Factor

$$\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2$$

enthält, so muss sie, da sie sich als Wurzel aus einer rationalen Function bei jedem Umlaufe von z nur mit einer Constanten multipliciren kann, die sämmtlichen Elemente eines reducirten Werthesystems des Integrals $\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2$ ebenfalls als Factoren enthalten. Da ferner auch alle Elemente eines reducirten Werthesystems eines Integrals in M zur selben Potenz erhoben auftreten müssen, so folgt hieraus in der That, dass M nur ein Product von Primformen sein kann.

Aus diesem von Herrn Fuchs herrührenden Satze ergeben sich die folgenden Consequenzen.

1) Wenn eine invariante Form von niedrigerem als dem ν-ten Grade ist, so kann ihr Grad nicht kleiner sein als die kleinste der Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, d. h. nicht kleiner als ϱ_3. Ist derselbe gleich ϱ_3, so ist die invariante Form die Primform $F_3(w_1, w_2)$.

2) Ergiebt sich für eine invariante Form, dass ihr Grad kleiner ist wie ϱ_3, so verschwindet diese Form identisch.

Wenn eine Form $M(w_1, w_2)$ eine invariante Form ist, so gilt, wie Herr Fuchs bemerkt hat, das Gleiche für jede Covariante dieser Form.

In der That multiplicirt sich $M(w_1, w_2)$ als invariante Form mit einem constanten Factor, wenn wir auf w_1, w_2 eine Substitution der Transformationsgruppe der Differentialgleichung (1) anwenden. Eine Covariante von $M(w_1, w_2)$ wird also (vergl. Nr. 191, Bd. II, 1, S. 228) bei Anwendung einer solchen Substitution auf die w_1, w_2 ebenfalls in sich selbst multiplicirt mit einer Constanten übergehen. Also ist die logarithmische Ableitung einer solchen Covariante nach z eine bei den Substitutionen der Transformationsgruppe unveränderliche rationale Differentialfunction von w_1, w_2 und demnach eine rationale Function von z. Da ferner die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen von (1) rationale Zahlen sind, so ergiebt sich ohne Weiteres, dass die Covariante nur eine Potenz mit rationalem Exponenten von einer rationalen Function von z sein kann.

Hieraus folgt mit Rücksicht auf 2) der Satz:

3) Für die Primform niedrigsten Grades F_3 muss jede Covariante, die von niedrigerem Grade ist wie die Form selbst, identisch verschwinden.

295. Gestalt der Primformen. Covarianten von Primformen. Hülfssatz von Fuchs.

Auf Grund der in der vorigen Nummer entwickelten Sätze können wir nun nach dem Vorgange von Herrn Fuchs die Gestalt der Primformen F_1, F_2, F_3 wirklich angeben.

Wir entwickeln zunächst einige einfache Beziehungen, die zwischen diesen drei Primformen und der Primform ν-ten Grades F_γ bestehen.

Setzt man die Werthe

$$(29) \qquad z = \frac{f_1^{g_1}}{f_3^{g_3}}, \qquad z - 1 = \frac{f_2^{g_2}}{f_3^{g_3}}$$

in die Gleichung (28) ein und beachtet, dass

$$F_3(w_1, w_2) = w_1^{\varrho_3} f_3(\eta) = \left(\frac{dz}{d\eta}\right)^{\frac{\nu}{2 g_3}} f_3(\eta)$$

ist, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung (21)

$$(30) \qquad \frac{dz}{d\eta} = \frac{f_1^{g_1-1} f_2^{g_2-1}}{f_3^{g_3+1}}.$$

Andererseits folgen durch directe Differentiation der Gleichungen (2 und der Gleichung

$$z - u = \frac{f_\gamma(\eta)}{f_3^{g_3}(\eta)}$$

die Gleichungen

$$(31) \quad \begin{cases} \dfrac{dz}{d\eta} = \dfrac{f_1^{g_1-1}(g_1 f_3 f_1' - g_3 f_1 f_3')}{f_3^{g_3+1}} = \dfrac{f_2^{g_2-1}(g_2 f_3 f_2' - g_3 f_2 f_3')}{f_3^{g_3+1}}, \\ \dfrac{dz}{d\eta} = \dfrac{f_3 f_\gamma' - g_3 f_\gamma f_3'}{f_3^{g_3+1}}. \end{cases}$$

Berücksichtigt man die Homogenitätsgleichungen

$$\varrho_\varkappa F_\varkappa(w_1, w_2) = \frac{\nu}{g_\varkappa} w_1^{\frac{\nu}{g_\varkappa}} f_\varkappa(\eta) = w_1 \frac{\partial F_\varkappa}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial F_\varkappa}{\partial w_2} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3),$$

$$\nu F_\gamma(w_1, w_2) = \nu w_1^\nu f_\gamma(\eta) = w_1 \frac{\partial F_\gamma}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial F_\gamma}{\partial w_2},$$

so erhält man durch Vergleichung von (30) und (31) die Relatione

$$(32) \quad \begin{cases} \dfrac{g_1 g_3}{\nu}(F_3, F_1) = F_2^{g_2-1}, \\ \dfrac{g_2 g_3}{\nu}(F_3, F_2) = F_1^{g_1-1}, \\ \dfrac{g_3}{\nu}(F_3, F_\gamma) = F_1^{g_1-1} F_2^{g_2-1}, \end{cases}$$

wo durch das Symbol (φ, ψ) die Functionaldeterminante

$$(\varphi, \psi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial w_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial w_2} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial w_1} & \dfrac{\partial \psi}{\partial w_2} \end{vmatrix}$$

der beiden Formen φ, ψ bezeichnet wurde.

Im Falle des Dieders ist $\varrho_3 = 2$, in den drei anderen Fäll dagegen haben wir

$$\varrho_3 = 4,\ 6,\ 12 > 2.$$

Bilden wir also die Hesse'sche Covariante

$$H(w_1, w_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_3}{\partial w_1^2} & \frac{\partial^2 F_3}{\partial w_1 \partial w_2} \\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial w_1 \partial w_2} & \frac{\partial^2 F_3}{\partial w_2^2} \end{vmatrix}$$

der Form F_3, so ist diese vom Grade $2\varrho_3 - 4$, also keine Constante, wenn wir jetzt den Fall des Dieders bei Seite lassen.

Wenn die Hesse'sche Covariante einer binären Form identisch verschwindet, so ist die Form eine Potenz eines linearen Factors, also ist die Form $H(w_1, w_2)$ nicht identisch Null, sie ist folglich gleich der Wurzel aus einer rationalen Function von z. Die Form $H(w_1, w_2)$ ist aber auch eine Primform; denn wäre dies nicht der Fall, so müsste $H(w_1, w_2)$ das Product von mindestens zwei Primformen sein, von denen also die eine von niedrigerem als dem ϱ_3^{ten} Grade sein müsste, was nicht möglich ist. Nun haben wir

$$\text{für das Tetraeder } 2\varrho_3 - 4 = 4,$$
$$\text{für das Oktaeder } 2\varrho_3 - 4 = 8,$$
$$\text{für das Ikosaeder } 2\varrho_3 - 4 = 20,$$

d. h. der Grad von $H(w_1, w_2)$ stimmt mit ϱ_2 überein, also kann sich H von der Primform F_2 nur durch einen constanten Factor unterscheiden.

Wir haben also mit Rücksicht auf die zweite der Gleichungen (32) den Satz:

4) Für die Fälle des Tetraeders, Oktaeders und Ikosaeders stimmt die Primform F_2 mit der Hesse'schen Covariante von F_3 und die Primform F_1 mit der Functionaldeterminante von F_3 und dessen Hesse'scher Covariante, abgesehen von einem constanten Factor, überein.

Betrachten wir nun ein Integral $\mathfrak{w}$ der Differentialgleichung (1), essen reducirtes Werthesystem aus weniger wie ν Gliedern besteht. Sei

$$\mathfrak{w}^{(1)}, \quad \mathfrak{w}^{(2)}, \cdots \mathfrak{w}^{(\varrho)}$$

ieses reducirte Werthesystem, dann ist die Anzahl ϱ seiner Elemente ffenbar ein Theiler von ν; wir setzen

$$\frac{\nu}{\varrho} = g.$$

Das Integral $\mathfrak{w}$ genügt einer irreductiblen algebraischen Gleichung [illegible] Grade 2ν und mit in z rationalen Coefficienten; sei diese Gleichung

(33) $$\Phi(\mathfrak{w}) = 0.$$

Bedeutet dann

$$j = e^{\frac{2\pi i}{2g}}$$

irgend eine primitive $(2g)^{\text{te}}$ Einheitswurzel, so ist nach einfachen algebraischen Sätzen die Gesammtheit der Wurzeln der Gleichung (33) durch die Grössen

$$\mathfrak{w}^{(\varkappa)},\quad j\mathfrak{w}^{(\varkappa)},\quad j^2\mathfrak{w}^{(\varkappa)},\ \cdots j^{2g-1}\mathfrak{w}^{(\varkappa)}$$
$$(\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho)$$

dargestellt. Herr Fuchs nennt demgemäss die Zahl $2g$ den Index des reducirten Werthesystems oder reducirten Wurzelsystems

$$\mathfrak{w}^{(1)},\quad \mathfrak{w}^{(2)},\ \cdots \mathfrak{w}^{(\varrho)}.$$

Hieraus folgt, dass die symmetrischen Functionen der Grössen

$$(\mathfrak{w}^{(1)})^{2g},\quad (\mathfrak{w}^{(2)})^{2g},\ \cdots (\mathfrak{w}^{(\varrho)})^{2g}$$

rationale Functionen von z sind; die Gleichung (33) hat demnach die [illegible]e Gestalt

(33a) $\Phi(\mathfrak{w}) = (\mathfrak{w}^{2g})^{\varrho} + \varphi_1(z)(\mathfrak{w}^{2g})^{\varrho-1} + \cdots + \varphi_{\varrho-1}(z)\mathfrak{w}^{2g} + \varphi_{\varrho}(z) = 0$ [illegible],

wo $\varphi_1(z), \cdots \varphi_{\varrho-1}(z), \varphi_{\varrho}(z)$ rationale Functionen von z bedeuten.

Sei $\bar{\mathfrak{w}}$ irgend ein Element des reducirten Werthesystems von $\mathfrak{w}$, [illegible], dann giebt es wegen der Irreductibilität der Gleichung (33) und zufolge des Puiseux'schen Satzes einen Umlauf $\mathfrak{U}$ von z, durch welchen $\bar{\mathfrak{w}}$ [illegible] die Wurzel $j\bar{\mathfrak{w}}$ übergeht. Zufolge unserer Voraussetzung $\varrho < \nu$ ist $g > 1$, also ist j nicht gleich ± 1. Wir beweisen nun mit Herrn Fuchs, dass es nothwendig auch ein Integral $\bar{w}$ der Differentialgleichung (1) geben muss, welches durch den Umlauf $\mathfrak{U}$ von z in $j^{-1}\bar{w}$ verwandelt wird.

Sei w ein willkürliches Integral der Differentialgleichung (1), und setzen wir

$$\frac{w}{\bar{\mathfrak{w}}} = \zeta,$$

so ist

$$\bar{\mathfrak{w}} = \sqrt{\frac{dz}{d\zeta}},$$

also haben wir

$$\zeta = \frac{w}{\bar{\mathfrak{w}}} = \int \frac{dz}{\bar{\mathfrak{w}}^2}.$$

Nun ist $\bar{\mathfrak{w}}^2$ eine algebraische Function von z, ebenso ist auch ζ eine algebraische Function von z; wenn aber das Integral einer algebraischen Function selbst algebraisch ist, so muss nach einem bekannten Satze von Abel das Integral gleich einer rationalen Function des Integranden und der Integrationsvariabeln sein. Es ist folglich w eine rationale

Function von $\overline{\mathfrak{w}}$ und z, die wir, da $\overline{\mathfrak{w}}$ der Gleichung $(2\nu)^{\text{ten}}$ Grades (33) Genüge leistet, in der Form

$$w = c_0 + c_1\overline{\mathfrak{w}} + \cdots + c_{2\nu-1}\overline{\mathfrak{w}}^{2\nu-1} = \varphi(\overline{\mathfrak{w}})$$

darstellen können, wo die $c_0, c_1, \cdots c_{2\nu-1}$ rationale Functionen von z bedeuten.

Bei dem Umlaufe $\mathfrak{U}$ von z, der $\overline{\mathfrak{w}}$ in $j\overline{\mathfrak{w}}$ überführt, wird das Integral w in

$$\varphi(j\overline{\mathfrak{w}})$$

verwandelt. Da dieser Ausdruck selbst wieder ein Integral von (1) sein muss, ist derselbe in der Form

$$\varphi(j\overline{\mathfrak{w}}) = \alpha\overline{\mathfrak{w}} + \beta\varphi(\overline{\mathfrak{w}})$$

darstellbar, wo α, β Constanten bedeuten. Das Fundamentalsystem w, $\overline{\mathfrak{w}}$ erleidet also beim Umlaufe $\mathfrak{U}$ von z die Substitution

$$\begin{pmatrix} j & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix},$$

die zufolge der Form der Differentialgleichung (1) eine unimodulare sein muss. Wir haben also

$$j\beta = 1,$$

d. h. es ist

$$\varphi(j\overline{\mathfrak{w}}) = \alpha\overline{\mathfrak{w}} + j^{-1}\varphi(\overline{\mathfrak{w}}).$$

Diese Gleichung muss wegen der Irreductibilität der Gleichung (33) eine in $\overline{\mathfrak{w}}$ identische sein; wir erhalten also die Gleichungen

$$jc_1 = \alpha + j^{-1}c_1,$$
$$j^{\varkappa}c_{\varkappa} = j^{-1}c_{\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 2, 3, \cdots 2\nu-1).$$

Da j nicht gleich ± 1 ist, so folgt hieraus zunächst

$$c_1 = \frac{\alpha}{j - j^{-1}},$$

d. h. c_1 ist eine Constante, und ferner ergiebt sich, dass $c_{\varkappa}$ für $\varkappa = 0, 2, \cdots 2\nu - 1$ nur dann von Null verschieden sein kann, wenn

$$\varkappa \equiv (-1) \pmod{2g}$$

Der Ausdruck $\varphi(\overline{\mathfrak{w}})$ hat demnach die Gestalt

$$\varphi(\overline{\mathfrak{w}}) = c_1\overline{\mathfrak{w}} + \overline{\mathfrak{w}}^{2g-1}(\bar{c}_0 + \bar{c}_1\overline{\mathfrak{w}}^{2g} + \cdots + \bar{c}_{\varrho-1}\overline{\mathfrak{w}}^{2(\varrho-1)g}),$$

wo die $\bar{c}_0, \bar{c}_1, \cdots \bar{c}_{\varrho-1}$ rationale Functionen von z bedeuten.

Da c_1 eine Constante ist, so haben wir in

$$\bar{w} = \overline{\mathfrak{w}}^{2g-1}(\bar{c}_0 + \bar{c}_1\overline{\mathfrak{w}}^{2g} + \cdots + \bar{c}_{\varrho-1}\overline{\mathfrak{w}}^{2(\varrho-1)g})$$

ein Integral der Differentialgleichung (1), und dieses verwandelt sich, wenn z den Umlauf $\mathfrak{U}$ vollzieht, offenbar in $j^{-1}\overline{\mathfrak{w}}$.

296. Die Primformen im Falle des Dieders.

Es sei nun w_1 ein linearer Factor der Primform niedrigsten Grades F_3; nehmen wir ein reducirtes Werthesystem dieses Integrals, so enthält dasselbe ϱ_3 Elemente, die entsprechende Einheitswurzel j ist folglich

$$j = e^{\frac{2\pi i}{2\varrho_3}}.$$

Sei $\mathfrak{U}$ derjenige Umlauf von z, der w_1 in jw_1 verwandelt, und bezeichnen wir durch w_2 dasjenige Integral, welches durch denselben Umlauf $\mathfrak{U}$ in $j^{-1}w_2$ übergeführt wird. Dann können wir uns die sämmtlichen Primformen F_γ, F_1, F_2, F_3 durch das Fundamentalsystem w_1, w_2 dargestellt denken; wir nehmen also der Einfachheit wegen an, es sei dieses Fundamentalsystem dasjenige, welches wir von vorneherein zu Grunde gelegt hatten.

Betrachten wir nun zuvörderst den Fall des Dieders.

Es ist, da $\nu = 2n$ angenommen wurde:

$$F_3 = w_1(\alpha w_1 + \beta w_2),$$

$$F_2 = \sum_{\varkappa=0}^{n} b_\varkappa w_1^{n-\varkappa} w_2^{\varkappa},$$

$$F_1 = \sum_{\varkappa=0}^{n} a_\varkappa w_1^{n-\varkappa} w_2^{\varkappa},$$

wo α, β, $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ Constanten bedeuten. Durch den Umlauf $\mathfrak{U}$ von z verwandelt sich F_3 in

$$jw_1(\alpha j w_1 + \beta j^{-1} w_2), \qquad j = e^{\frac{\pi i}{n}};$$

da aber nach (28)

$$F_3 = \sqrt{z(z-1)}$$

ist, so muss

$$jw_1(\alpha j w_1 + \beta j^{-1} w_2) = \varepsilon w_1(\alpha w_1 + \beta w_2)$$

sein, wo $\varepsilon = \pm 1$ ist. Wir haben demnach

$$j^2 \alpha = \varepsilon \alpha, \qquad \beta = \varepsilon \beta.$$

Wäre $\varepsilon = -1$, so müsste β verschwinden; dann hätte F_3 die Gestalt αw_1^2, dies ist aber, da F_3 eine Primform sein soll, nicht möglich. Also muss $\varepsilon = 1$, und folglich, da j nicht ± 1 sein kann, $\alpha = 0$ sein; d. h. wir haben

$$F_3(w_1, w_2) = \beta w_1 w_2.$$

Die Primform F_2 multiplicirt sich, wenn z den Umlauf $\mathfrak{U}$ voll-
ht, mit einem constanten Factor c; es ist also

$$\sum_{\varkappa=0}^{n}{}' b_\varkappa j^{n-2\varkappa} w_1^{n-\varkappa} w_2^{\varkappa} = c \sum_{\varkappa=0}^{n}{}' b_\varkappa w_1^{n-\varkappa} w_2^{\varkappa},$$

l hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$c b_\varkappa = b_\varkappa e^{\frac{\pi i}{n}(n-2\varkappa)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n).$$

ınn $b_\varkappa$ von Null verschieden ist, so muss

$$c = e^{\pi i - \frac{2\varkappa\pi i}{n}}$$

n, es können also dann nur diejenigen b_l von Null verschiedene
erthe haben, für welche

$$l \equiv \varkappa \pmod{n}$$

. Da F_2 als Primform keinen mehrfachen Factor enthalten kann,
ıss b_0 von Null verschieden sein, wir haben also

$$F_2 = b_0 w_1^n + b_n w_2^n,$$

ıd ebenso ergiebt sich

$$F_1 = a_0 w_1^n + a_n w_2^n.$$

Nun ist aber nach der zweiten Gleichung des Systems (32) (S. 134)

$$F_1 = \frac{\partial F_3}{\partial w_1}\frac{\partial F_2}{\partial w_2} - \frac{\partial F_2}{\partial w_1}\frac{\partial F_3}{\partial w_2},$$

· haben demnach

$$F_1 = -n\beta(b_0 w_1^n - b_n w_2^n),$$

dass wir, wenn wir uns die Integrale w_1, w_2 von vornherein mit
igneten constanten Factoren multiplicirt denken,

$$F_2 = \frac{w_1^n - w_2^n}{2},$$

$$F_1 = -n\beta \frac{w_1^n + w_2^n}{2},$$

$$F_3 = c w_1 w_2$$

en können, wo c eine Constante bedeutet. Beachten wir noch, dass
n nach Gleichung (16) der Nr. 292 (S. 126)

$$-(w_1^{2n} + 2w_1^n w_2^n + w_2^{2n}) - \frac{1}{4}(w_1^{2n} - 2w_1^n w_2^n + w_2^{2n}) - c^n w_1^n w_2^n = 0$$

ı muss, so finden wir

$$\beta^2 = \frac{1}{n^2}, \qquad c^n = 1.$$

Bei geeigneter Wahl der constanten Factoren in den w_1, w_2 haben wir also

$$\text{(d)}\qquad \begin{cases} F_1(w_1, w_2) = \frac{1}{2}(w_1^n + w_2^n), \\ F_2(w_1, w_2) = \frac{1}{2}(w_1^n - w_2^n), \\ F_3(w_1, w_2) = w_1 w_2. \end{cases}$$

Die Gleichung, welche η als Function von z definirt, ergiebt sich demnach in der Form

$$z = \frac{1}{4}\frac{w_1^{2n} + 2w_1^n w_2^n + w_2^{2n}}{w_1^n w_2^n} = \frac{1}{4}\frac{1 + 2\eta^n + \eta^{2n}}{\eta^n},$$

oder etwas anders geschrieben

$$\text{(D)}\qquad \eta^{2n} + 2\eta^n(1 - 2z) + 1 = 0,$$

und die allgemeine Primform lautet

$$F(w_1, w_2) = \frac{1}{4}(w_1^n + w_2^n)^2 - u w_1^n w_2^n.$$

In den drei übrigen Fällen setzen wir

$$F_3(w_1, w_2) = \sum_{\varkappa=0}^{\varrho_3} a_\varkappa w_1^{\varrho_3 - \varkappa} w_2^{\varkappa}, \qquad a_{\varrho_3} = 0.$$

Durch den Umlauf $\mathfrak{U}$ multiplicirt sich F_3 mit einer Constanten c, es ist demnach

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varrho_3-1} a_\varkappa j^{\varrho_3 - 2\varkappa} w_1^{\varrho_3-\varkappa} w_2^{\varkappa} = c \sum_{\varkappa=0}^{\varrho_3-1} a_\varkappa w_1^{\varrho_3-\varkappa} w_2^{\varkappa}.$$

Wenn also $a_\varkappa$ von Null verschieden ist, so haben wir

$$c = j^{\varrho_3 - 2\varkappa} = e^{\frac{\pi i}{\varrho_3}(\varrho_3 - 2\varkappa)},$$

es können folglich nur diejenigen a_l von Null verschieden sein, für welche

$$l \equiv \varkappa \pmod{g_3}$$

ist.

297. Die Primformen in den Fällen des Tetraeders und Oktaeders.

Betrachten wir den Fall des Tetraeders. Dann ist $\varrho_3 = 4$, $g_3 = 3$. Wäre $a_3 = 0$, so würde F_3 den Factor w_1^2 enthalten, was nicht möglich ist, es sind also nur a_3 und a_0 von Null verschieden, d. h. F_3 hat die Gestalt

$$F_3 = a_0 w_1^4 + a_3 w_1 w_2^3$$

der bei geeigneter Wahl der constanten Factoren in w_1, w_2

$$F_3(w_1, w_2) = w_1^4 + w_1 w_2^3.$$

)er Satz 4) der Nr. 295 (S. 135) liefert nun sofort für F_1, F_2 die
ıusdrücke

$$F_2 = c_2(8w_1^3 w_2 - w_2^4),$$

$$F_1 = c_1(8w_1^6 - 20w_1^3 w_2^3 - w_2^6),$$

ınd durch Berücksichtigung der Relation (16) finden wir für die con-
stanten Factoren c_1, c_2 die Werthe

$$c_2^2 = \frac{1}{64}, \qquad c_1^3 = c_2^2 = \frac{1}{64},$$

vir können folglich

$$) \qquad \begin{cases} F_2(w_1, w_2) = \frac{1}{8}(8w_1^3 w_2 - w_2^4), \\ F_1(w_1, w_2) = \frac{1}{4}(8w_1^6 - 20w_1^3 w_2^3 - w_2^6), \\ F_3(w_1, w_2) = w_1^4 + w_1 w_2^3 \end{cases}$$

hmen.

Die Gleichung für η als Function von z lautet demgemäss

$$z = \frac{1}{16}\,\frac{(8 - 20\eta^3 - \eta^6)^2}{(1 + \eta^3)^3},$$

er

$$) \qquad 16z(\eta^3 + 1)^3 - (\eta^6 + 20\eta^3 - 8)^2 = 0,$$

d die allgemeine Primform hat die Gestalt

$$F(w_1, w_2) = \frac{1}{16}(8w_1^6 - 20w_1^3 w_2^3 - w_2^6)^2 - u(w_1^4 + w_1 w_2^3)^3.$$

Durch Einführung anderer Integrale an die Stelle von w_1, w_2
nnen wir den Formen F_1, F_2, F_3 eine etwas andere Gestalt geben,
durch dieselben mit den in der Invariantentheorie der binären Formen
lichen Bezeichnungen in unmittelbaren Zusammenhang treten.

Betrachten wir nämlich die biquadratische Form

$$F_3(w_1, w_2) = w_1^4 + w_1 w_2^3,$$

erkennen wir, dass für dieselbe die in der Nr. 276 (S. 70) mit g_2
ezeichnete Invariante vom Grade 2 und vom Gewichte 4 verschwindet.
)enken wir uns die Form F_3 durch Einführung neuer Unbestimmter
v_1, v_2, die mit w_1, w_2 durch lineare homogene Beziehungen mit con-
stanten Coefficienten verknüpft sind, auf die sogenannte canonische
Form gebracht:

$$w_1^4 + w_1 w_2^3 = v_1^4 + 6mv_1^2 v_2^2 + v_2^4,$$

so ist für diese canonische Form offenbar

$$g_2 = 1 + 3m^2,$$

also, da g_2 verschwindet,

$$m = \frac{1}{3}\sqrt{-3}.$$

Wir haben demnach

$$F_3(w_1, w_2) = v_1^4 + 2\sqrt{-3}\, v_1^2 v_2^2 + v_2^4 = \Phi(v_1, v_2).$$

Bilden wir die Hesse'sche Covariante von Φ

$$H(v_1, v_2) = \frac{1}{12^2}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_1^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_2^2} - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_1 \partial v_2}\right)^2\right],$$

wo der numerische Factor vor der Parenthese hinzugefügt wurde, um $H(v_1, v_2)$ direct als die sogenannte zweite Ueberschiebung der Form Φ über sich selbst erscheinen zu lassen (vergl. Nr. 298, S. 146), so ergiebt sich

$$H(v_1, v_2) = \frac{1}{\sqrt{-3}}(v_1^4 - 2\sqrt{-3}\, v_1^2 v_2^2 + v_2^4).$$

Ferner finden wir die Functionaldeterminante von H und Φ, die wir als die erste Ueberschiebung dieser beiden Formen in der Gestalt

$$T(v_1, v_2) = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v_1}\frac{\partial H}{\partial v_2} - \frac{\partial\Phi}{\partial v_2}\frac{\partial H}{\partial v_1}\right)$$

schreiben, den Ausdruck

$$T(v_1, v_2) = 4v_1 v_2(v_1^4 - v_2^4).$$

Die beiden Covarianten H und T von Φ müssen dann bis auf constante Factoren mit den beiden Primformen F_2 und F_1 übereinstimmen.

Die zwischen den Primformen F_1, F_2, F_3 bestehende Relation (16) ergiebt sich als unmittelbare Folge der Cayley'schen Relation, die zwischen einer biquadratischen Form Φ, deren beiden Covarianten H, T und den beiden Invarianten g_2, g_3 besteht. Diese Relation lautet nämlich allgemein

$$T^2 + g_3\Phi^3 - g_2\Phi^2 H + 4H^3 = 0.$$

Da für unsere Form Φ die Invariante g_2 verschwindet und g_3 den Werth

$$g_3 = \frac{4}{9}\sqrt{-3}$$

besitzt, so nimmt die Cayley'sche Relation die Form an

$$(34) \qquad T^2 + \frac{4}{9}\sqrt{-3}\,\Phi^3 + 4H^3 = 0.$$

Bezeichnen wir den Quotienten der beiden Integrale v_1, v_2 durch

$$\zeta = \frac{v_2}{v_1},$$

so ergiebt sich aus der Gleichung

$$z - 1 = \frac{F_2^3}{F_3^3}$$

die Beziehung zwischen z und ζ in der Form

$$(\mathrm{T}_1) \qquad z - 1 = \frac{(1 - 2\sqrt{-3}\,\zeta^2 + \zeta^4)^3}{(1 + 2\sqrt{-3}\,\zeta^2 + \zeta^4)^3},$$

aus welcher unmittelbar ersichtlich ist, dass die Gleichung zwölften Grades, die im Falle des Tetraeders den Integralquotienten als Function von z definirt, algebraisch, d. h. durch Wurzelausziehungen aufgelöst werden kann.

Wir wenden uns zum Falle des Oktaeders, wo $\varrho_3 = 6$, $g_3 = 4$ ist.

Da in $F_3(w_1, w_2)$ der Coefficient a_6 von Null verschieden sein muss, ist nur noch a_1 von Null verschieden, d. h. F_3 hat die Gestalt

$$F_3 = a_1 w_1^5 w_2 + a_5 w_1 w_2^5$$

oder, wenn wir die constanten Factoren in w_1, w_2 passend wählen,

$$F_3(w_1, w_2) = w_1 w_2 (w_1^4 - w_2^4).$$

Bilden wir die Hesse'sche Covariante dieser Form und dann die Functionaldeterminante zwischen dieser Covariante und der Form selbst, so erhalten wir nach dem Satze 4) der Nr. 295 (S. 135) die Primformen F_2 und F_1, abgesehen von constanten Factoren. Es ergiebt sich

$$F_2 = c_2(w_1^8 + 14 w_1^4 w_2^4 + w_2^8),$$
$$F_1 = c_1(w_1^{12} - 33 w_1^8 w_2^4 - 33 w_1^4 w_2^8 + w_2^{12}).$$

Die Relation (16) liefert für die Constanten c_1, c_2 die Bestimmung

$$c_1^2 = c_2^3 = -\frac{1}{108},$$

so dass also die Primformen in der Gestalt

$$(\mathrm{o}) \qquad \begin{cases} F_1 = \dfrac{1}{\sqrt{-108}}(w_1^{12} - 33 w_1^8 w_2^4 - 33 w_1^4 w_2^8 + w_2^{12}), \\ F_2 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{-108}}(w_1^8 + 14 w_1^4 w_2^4 + w_2^8), \\ F_3 = w_1 w_2 (w_1^4 - w_2^4) \end{cases}$$

angenommen werden können.

Die Gleichung zwischen z und η lautet

$$z = -\frac{1}{108}\frac{(\eta^{12} - 33\eta^8 - 33\eta^4 + 1)^2}{\eta^4(\eta^4 - 1)^4}$$

oder auch

(O) $$z - 1 = -\frac{1}{108}\frac{(\eta^8 + 14\eta^4 + 1)^3}{\eta^4(\eta^4 - 1)^4}.$$

Die Form, welche im Falle des Oktaeders $F_3(w_1, w_2)$ darstellt, ist abgesehen von einem constanten Factor nichts anderes, wie die Form $T(w_1, w_2)$, die im Falle des Tetraeders für das Fundamentalsystem v_1, v_2 die Primform F_1 war. Nun ist $T(w_1, w_2)$ eine Covariante der biquadratischen Form

$$\Phi(w_1, w_2) = w_1^4 + 2\sqrt{-3}\, w_1^2 w_2^2 + w_2^4,$$

und da Covarianten von Covarianten einer Form selbst wieder Covarianten der ursprünglichen Form sind, so folgt hieraus, dass auch die Covarianten

$$F_1(w_1, w_2), \qquad F_2(w_1, w_2)$$

der Form $F_3(w_1, w_2)$, wie sie durch die Gleichungen (o) dargestellt werden, Covarianten von $\Phi(w_1, w_2)$ sein müssen.

Wir schliessen hieraus, dass, wenn wir η als den Integralquotienten einer Tetraederdifferentialgleichung mit der unabhängigen Variabeln z_1 auffassen, d. h. wenn wir

$$\eta = s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, z_1\right)$$

setzen, so dass also nach Gleichung (T_1)

(35) $$z_1 - 1 = \frac{(1 - 2\sqrt{-3}\,\eta^2 + \eta^4)^3}{(1 + 2\sqrt{-3}\,\eta^2 + \eta^4)^3}$$

ist, die durch die Gleichungen (o) definirten Formen F_1, F_2 invariante Formen dieser Tetraederdifferentialgleichung sein müssen. Dieselben sind folglich als Producte der Primformen

$$\Phi, \; H, \; T$$

darstellbar. Nun ist $F_2(w_1, w_2)$ vom 8ten Grade; da es eine Primform des Oktaeders ist, kann es weder gleich Φ^2 noch gleich H^2 sein, haben also nothwendig

(36) $$F_2(w_1, w_2) = c \cdot \Phi(w_1, w_2) H(w_1, w_2).$$

Ferner ist nach Gleichung (34) (S. 142)

(37) $$T^2(w_1, w_2) = 16F_3^2(w_1, w_2) = -\tfrac{4}{9}\sqrt{-3}\,\Phi^3(w_1, w_2) - 4H^3(w_1$$

wir erhalten demnach mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$z - 1 = \frac{F_2^3}{F_3^4}, \qquad z_1 - 1 = (\sqrt{-3})^3 \frac{H^3}{\Phi^3}$$

aus (36) und (37) die Gleichung

(38) $$z - 1 = \bar{c}\,\frac{z_1 - 1}{z_1^2},$$

wo $\bar{c}$ einen constanten Factor bedeutet.

Die Gleichung (O) ist somit auf die Kette der beiden Gleichungen (38) und (35) zurückgeführt; wir erkennen hieraus, dass auch die Gleichung vierundzwanzigsten Grades (O) durch Wurzelzeichen auflösbar ist.

Wir bemerken noch, dass die allgemeine Primform für den Fall des Oktaeders die Gestalt:

$$F(w_1, w_2) = \frac{-1}{108}(w_1^{12} - 33 w_1^8 w_2^4 - 33 w_1^4 w_2^8 + w_2^{12})^2 - u w_1^4 w_2^4 (w_1^4 - w_2^4)^4$$

besitzt.

298. Die Primformen im Falle des Ikosaeders.

Im Falle des Ikosaeders, wo $\varrho_3 = 12$, $g_3 = 5$ ist, haben wir in der Primform $F_3(w_1, w_2)$ nothwendig ein von Null verschiedenes a_{11}, da a_{12} verschwindet und F_3 nicht den Factor w_1^2 enthalten darf. Es sind also nur noch a_6 und a_1 von Null verschieden, d. h. F_3 hat die Gestalt

$$F_3 = a_1 w_1^{11} w_2 + a_6 w_1^6 w_2^6 + a_{11} w_1 w_2^{11},$$

oder, wenn wir die constanten Factoren in den w_1, w_2 geeignet wählen,

$$F_3 = w_1^{11} w_2 + \alpha w_1^6 w_2^6 - w_1 w_2^{11},$$

wo jetzt α eine noch zu bestimmende Constante bedeutet. In diesem Falle reicht also der Satz von der Existenz zweier Integrale w_1, w_2, die sich bei einem und demselben Umlaufe beziehungsweise mit j und j^{-1} multipliciren, zur vollständigen Bestimmung der Primform F_3 nicht hin. Wir bedienen uns zur Auffindung der Constanten α des Satzes 3) der Nr. 294 (S. 133).

Hat man zwei binäre Formen

$$\varphi(w_1, w_2) = \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_\varkappa w_1^{n-\varkappa} w_2^\varkappa,$$

$$\psi(w_1, w_2) = \sum_{\varkappa=1}^{m} \beta_\varkappa w_1^{m-\varkappa} w_2^\varkappa,$$

so bezeichnet man bekanntlich den Ausdruck

$$(\varphi, \psi)^{(\varkappa)} = \frac{(n-\varkappa)!}{n!}\,\frac{(m-\varkappa)!}{m!}\left\{\frac{\partial^\varkappa \varphi}{\partial w_1{}^\varkappa}\,\frac{\partial^\varkappa \psi}{\partial w_2{}^\varkappa} - \varkappa_1\,\frac{\partial^\varkappa \varphi}{\partial w_1^{\varkappa-1}\partial w_2}\,\frac{\partial^\varkappa \psi}{\partial w_1 \partial w_2^{\varkappa-1}}\right.$$

$$\left. + \varkappa_2\,\frac{\partial^\varkappa \varphi}{\partial w_1^{\varkappa-2}\partial w_2{}^2}\,\frac{\partial^\varkappa \psi}{\partial w_1{}^2 \partial w_2^{\varkappa-2}} - \cdots + (-1)^\varkappa \frac{\partial^\varkappa \varphi}{\partial w_2{}^\varkappa}\,\frac{\partial^\varkappa \psi}{\partial w_1{}^\varkappa}\right\}$$

als die $\varkappa$-te Ueberschiebung der Form ψ über die Form φ. So ist also die erste Ueberschiebung $(\varphi, \psi)^{(1)}$ nichts anderes wie die mit dem Factor

$$\frac{1}{nm}$$

multiplicirte Functionaldeterminante von φ und ψ; dieselbe ist offenbar eine simultane Covariante des Formensystems

$$\varphi(w_1, w_2), \qquad \psi(w_1, w_2).$$

Allgemein ist auch die $\varkappa$-te Überschiebung

$$(\varphi, \psi)^{(\varkappa)},$$

eine simultane Covariante des Formensystems φ, ψ und zwar eine Covariante vom Grade

$$n - \varkappa + m - \varkappa = n + m - 2\varkappa$$

in den Variabeln w_1, w_2.

Bedeutet insbesondere $\psi(w_1, w_2)$ eine Covariante der Form $\varphi(w_1, w_2)$, so ist jede Ueberschiebung von ψ über φ selbst wieder eine Covariante von φ; wir erhalten also jedenfalls Covarianten von φ, wenn wir die Ueberschiebungen dieser Form über sich selbst

$$(\varphi, \varphi)^{(\varkappa)} \qquad (\varkappa = 2, 4, 6, \cdots)$$

bilden. So ist z. B. die zweite Ueberschiebung der Form φ über sich selbst nichts anderes, wie die mit dem Factor

$$\frac{1}{n^2(n-1)^2}$$

multiplicirte Hesse'sche Covariante.

Die Form $F_3(w_1, w_2)$ ist vom Grade 12, ihre achte Ueberschiebung über sich selbst wäre demnach eine Covariante vom Grade 8. Diese muss folglich, da sie von niedrigerem Grade ist wie F_3, zufolge des Satzes 3) identisch verschwinden. Berechnen wir

$$(F_3, F_3)^{(8)} = \frac{2(4!)^2}{(12!)^2}\left\{\frac{\partial^8 F_3}{\partial w_1{}^8}\,\frac{\partial^8 F_3}{\partial w_2{}^8} - 8\,\frac{\partial^8 F_3}{\partial w_1{}^7 \partial w_2}\,\frac{\partial^8 F_3}{\partial w_1 \partial w_2{}^7} + \cdots\right\},$$

so finden wir

$$(F_3, F_3)^{(8)} = w_1{}^4 w_2{}^4 (11^2 - \alpha^2);$$

es muss folglich $\alpha^2 = 11^2$

sein. Nehmen wir $\alpha = 11$ (die Wahl $\alpha = -11$ würde einer Vertauschung von w_1 mit w_2 entsprechen), so haben wir also für die Primform F_3 die Gestalt

$$F_3(w_1, w_2) = w_1 w_2 (w_1^{10} + 11 w_1^5 w_2^5 - w_2^{10}).$$

Bilden wir für diese Form die Hesse'sche Covariante, sowie die Functionaldeterminante dieser Covariante und der Form selbst, so erhalten wir im Sinne des Satzes 4) die Primformen F_2 und F_1, abgesehen von constanten Factoren. Die Beziehung (16) liefert dann, ähnlich wie in früheren Fällen, eine Bestimmung dieser Constanten, und wir finden auf diese Weise für das Ikosaeder das folgende Formensystem:

$$(i)\begin{cases} F_1(w_1, w_2) = \frac{1}{24\sqrt{3}}\left\{w_1^{30} + w_2^{30} + 522(w_1^{25}w_2^5 - w_1^5 w_2^{25}) \right. \\ \qquad\qquad \left. - 10005(w_1^{20}w_2^{10} + w_1^{10}w_2^{20})\right\}, \\ F_2(w_1, w_2) = \frac{1}{12}\left\{w_1^{20} + w_2^{20} - 228(w_1^{15}w_2^5 - w_1^5 w_2^{15}) \right. \\ \qquad\qquad \left. + 494 w_1^{10} w_2^{10}\right\}, \\ F_3(w_1, w_2) = w_1 w_2 (w_1^{10} + 11 w_1^5 w_2^5 - w_2^{10}). \end{cases}$$

Die Gleichung zwischen z und η ergiebt sich als

$$(J) \qquad z = \frac{1}{1728} \frac{[\eta^{30} + 522(\eta^5 - \eta^{25}) - 10005(\eta^{10} + \eta^{20}) + 1]^2}{\eta^5(1 + 11\eta^5 - \eta^{10})^5},$$

und die allgemeine Primform hat die Gestalt

$$F(w_1, w_2) = \frac{1}{1728}\{w_1^{30} + w_2^{30} + 522(w_1^{25}w_2^5 - w_1^5 w_2^{25}) - 10005(w_1^{20}w_2^{10} + w_1^{10}w_2^{20})\}^2 - u w_1^5 w_2^5 (w_1^{10} + 11 w_1^5 w_2^5 - w_2^{10})^5.$$

Die Gleichung sechzigsten Grades (J), der η als Function von z genügt, unterscheidet sich dadurch wesentlich von den bei den früheren Fällen gefundenen Gleichungen, dass dieselbe durch Wurzelzeichen **nicht auflösbar** ist. Eine ausführliche Theorie dieser „**Ikosaedergleichung**“ hat Herr **Klein** in seinen „Vorlesungen über das Ikosaeder“ entwickelt; wir begnügen uns damit, als wesentlichstes Resultat dieser Theorie hervorzuheben, dass die durch die Gleichung (J) definirte algebraische Irrationalität zur Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades ausreicht, und dass sich nach den Methoden, die von Herrn **Hermite**, **Kronecker** u. A. für die Lösung einer allgemeinen Gleichung fünften Grades durch Reihen, die der Theorie der elliptischen Functionen entstammen, ausgebildet worden sind, auch eine Darstellung der durch die Gleichung (J) definirten algebraischen Function η durch solche Reihen angeben lässt.

Viertes Kapitel.

299. Der Klein'sche Satz. Der Satz von Fuchs über die Grade der Primformen niedrigsten Grades.

Wir haben jetzt die am Schlusse der Nr. 267 (S. 31) formulirte Aufgabe vollständig gelöst, indem wir uns eine Uebersicht über alle möglichen Fälle verschafft haben, in denen die unabhängige Variable einer Gauss'schen Differentialgleichung eine eindeutige Function des Integralquotienten ist. Wir werden nun die gefundenen Ergebnisse nach den verschiedenartigsten Richtungen hin zu verallgemeinern suchen und beginnen mit einer Ueberlegung, die sich an die in den letzten Nummern behandelten algebraisch integrirbaren Fälle der Gauss'schen Differentialgleichung anknüpfen lässt.

In diesen Fällen erwies sich z als eine rationale Function des Integralquotienten η; wir fragen nun allgemein nach denjenigen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten, deren unabhängige Variable eine rationale Function des Integralquotienten ist.

Die Bedeutung dieser Frage erhellt aus dem in der Nr. 195 (Bd. II, 1, S. 248) bewiesenen Satze von Herrn Fuchs. Gelingt es uns nämlich, alle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 w}{d z^2} = q(z)\, w \tag{1}$$

aufzustellen, deren unabhängige Variable z eine rationale Function des Integralquotienten ist, so gehen durch die Transformation

$$y = \lambda w, \qquad z = \varphi(x), \tag{2}$$

wo $\varphi(x)$ eine rationale Function, λ die Wurzel aus einer rationalen Function ist, alle algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen zweiter Ordnung aus den Differentialgleichungen (1) hervor.

In Bezug auf die Differentialgleichungen von der für (1) geforderten Beschaffenheit hat nun Herr Klein einen interessanten und wichtigen Satz aufgestellt, den wir zunächst entwickeln wollen.

Die singulären Punkte der Differentialgleichung (1) seien

$$a_1,\ a_2,\ \cdots a_\varrho, \qquad a_{\varrho+1} = \infty,$$

dann folgt aus der Forderung, dass z eine rationale Function des Integralquotienten η sein soll, zunächst, dass die Differenz $\delta_\varkappa$ der Wurzeln der zu dem singulären Punkte $a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung gleich einer reciproken ganzen Zahl

$$\delta_\varkappa = \frac{1}{g_\varkappa} \qquad {\scriptstyle (\varkappa=1,\,2,\,\cdots\,\varrho+1)}$$

sein muss. Sei ν die Anzahl der Substitutionen der projectiven Monodromiegruppe ϑ, die zu dem Integralquotienten η gehört, dann ist also die irreductible algebraische Gleichung, die η als Function von z definirt, vom ν-ten Grade; wir schreiben dieselbe gleich in der Form

$$h(\eta)z - g(\eta) = 0,$$

wo $g(\eta)$, $h(\eta)$ ganze rationale Functionen ν-ten Grades ohne gemeinsamen Theiler bedeuten. Die Discriminantengleichung

$$g(\eta)h'(\eta) - h(\eta)g'(\eta) = 0,$$

der die η-Werthe, welche den Verzweigungspunkten $a_\varkappa$ entsprechen, Genüge leisten, ist vom Grade $2\nu - 2$. In der Umgebung von $a_\varkappa$ sind alle Zweige von η nach ganzen Potenzen von

$$(z - a_\varkappa)^{\frac{1}{g_\varkappa}}$$

entwickelbar, es fallen folglich für $z = a_\varkappa$ je $g_\varkappa$ der ν sonst verschiedenen η-Werthe zusammen. Also sind in $a_\varkappa$ genau

$$\frac{\nu}{g_\varkappa}$$

$g_\varkappa$-fache Windungspunkte oder $(g_\varkappa - 1)$-fach zu zählende Verzweigungspunkte vereinigt. Wir haben demnach die Gleichung

$$\text{(3)} \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varrho+1} \frac{\nu}{g_\varkappa}(g_\varkappa - 1) = 2\nu - 2.$$

Da wir ν grösser als Eins voraussetzen müssen, ist

$$2 > 2\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) \geqq 1,$$

aus (3) folgt demnach

$$2 > \varrho + 1 - \sum_{\varkappa=1}^{\varrho+1} \frac{1}{g_\varkappa} \geqq 1,$$

und hieraus ergiebt sich, dass ϱ nur die Werthe 1 und 2 haben kann.

Für $\varrho = 2$ verwandelt sich die Gleichung (1) durch Einführung von

$$\bar{z} = \frac{z - a_1}{a_2 - a_1}$$

als neuer unabhängiger Variabeln in eine Gauss'sche Differentialgleichung; diese Annahme führt also auf die bereits discutirten Fälle des Dieders, Tetraeders, Oktaeders und Ikosaeders.

Für $\varrho = 1$ ist

$$\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} = \frac{2}{\nu},$$

also, da keines der g_x grösser wie ν sein kann,

$$\frac{1}{g_1} = \frac{1}{g_2} = \frac{1}{\nu}.$$

Die diesem Falle entsprechende Differentialgleichung lautet folglich, wenn wir $a_1 = 0$ nehmen:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{1}{4}\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2}\frac{1}{z^2} w, \tag{4}$$

und die Gleichung für η als Function von z hat die einfache Form

$$z = \left(\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}\right)^\nu,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ noch willkürliche Constanten sind, die der Ungleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

genügen. Wählen wir η so, dass dieser Integralquotient für $z = 0$ verschwindet, für $z = \infty$ unendlich gross wird und für $z = 1$ den Werth Eins erhält, so ist

$$z = \eta^\nu,$$

und die Integrale w_1, w_2, deren Quotient η ist, lauten

$$w_1 = z^{\frac{\nu - 1}{2\nu}}, \qquad w_2 = z^{\frac{\nu + 1}{2\nu}}. \tag{5}$$

Die projective Monodromiegruppe der Differentialgleichung (4) besteht aus den Potenzen der elliptischen Substitution

$$A\eta = e^{\frac{2\pi i}{\nu}}\eta,$$

sie ist also eine sogenannte cyklische Gruppe; wir wollen darum den Fall der Differentialgleichung (4) als den cyklischen bezeichnen.

Nebst diesen cyklischen Fällen sind also die für die Gauss'sche Differentialgleichung gefundenen Fälle die einzigen, in denen die unabhängige Variable einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung als rationale Function des Integralquotienten erscheint. Wir haben also mit

icksicht auf den zu Anfang dieser Nummer erwähnten Satz des Herrn ıchs (Nr. 195, Bd. II, 1, S. 248) den Klein'schen Satz:

Jede algebraisch integrirbare lineare Differentialglei-ung zweiter Ordnung geht durch Anwendung einer Trans-rmation von der Form (2) entweder aus der Differential-eichung (4) oder aus der Differentialgleichung des Dieders, :traeders, Oktaeders oder Ikosaeders hervor.

Umgekehrt kann in (2) für $\varphi(x)$ eine beliebige rationale ınction, für λ eine beliebige Wurzel aus einer beliebigen tionalen Function genommen werden; es wird dann stets y ıer algebraisch integrirbaren, linearen Differentialglei-ung zweiter Ordnung mit in x rationalen Coefficienten nüge leisten.

Soll diese Differentialgleichung gleich die canonische Form haben, h. soll der Coefficient der ersten Ableitung verschwinden, so muss rgl. Nr. 181, Bd. II, 1, S. 189)

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{\varphi'(x)}}$$

ıommen werden. D. h. wenn die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p(x)\,y, \tag{6}$$

$p(x)$ eine rationale Function bedeutet, algebraisch integrirbar sein ll, so muss dieselbe durch die Transformation

$$y = \sqrt{\frac{1}{\varphi'(x)}}\,w, \qquad z = \varphi(x), \tag{7}$$

$\varphi(x)$ eine rationale Function darstellt, in eine Differentialgleichung (1) ɘrgeführt werden können, die entweder die Form (4) hat oder mit er Gauss'schen Differentialgleichung mit rational umkehrbarem ɘgralquotienten übereinstimmt.

Betrachten wir eine invariante Form

$$M(w_1, w_2) = w_1^r\, m(\eta) = R(z)$$

aus (6) durch die Transformation (7) hervorgehenden Differential-chung (1), wo also r eine positive ganze Zahl, $R(z)$ die Wurzel aus r rationalen Function von z bedeutet, setzen wir ferner

$$y_1 = \sqrt{\frac{1}{\varphi'(x)}}\,w_1, \qquad y_2 = \sqrt{\frac{1}{\varphi'(x)}}\,w_2,$$

st die Form

$$M(y_1, y_2) = \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-\frac{r}{2}} M(w_1, w_2) = y_1^r\, m(\eta) = \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-\frac{r}{2}} R(z) = P(x),$$

auch gleich der Wurzel aus einer rationalen Function von x.

Wenn die Differentialgleichung (1) von der Form (4) ist, so haben wir nach (5) und (8)

$$(10) \qquad y_1 = \sqrt{\frac{1}{\varphi'(x)}}\,[\varphi(x)]^{\frac{\nu-1}{2\nu}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{1}{\varphi'(x)}}\,[\varphi(x)]^{\frac{\nu+1}{2\nu}},$$

in diesem Falle besitzt also die Differentialgleichung (6) ein Fundamentalsystem von Integralen, die selbst Wurzeln aus rationalen Functionen sind. D. h. mit anderen Worten, es ist eine Form ersten Grades, gebildet aus den Elementen eines beliebigen Fundamentalsystems von (6), gleich der Wurzel aus einer rationalen Function.

Ist (1) nicht von der Form (4), so ist nach (9) die Form

$$F_3(y_1, y_2)$$

gleich der Wurzel aus einer rationalen Function von x, wir finden also mit Rücksicht auf die für die Gauss'sche Differentialgleichung erlangten Resultate den folgenden von Herrn Fuchs herrührenden Satz:

Wenn die Differentialgleichung (6) algebraisch integrirbar ist, so ist entweder ein Integral selbst oder eine aus den Elementen eines Fundamentalsystems gebildete Form vom Grade

$$2,\ 4,\ 6,\ 12$$

gleich der Wurzel aus einer rationalen Function von x.

Die Bedeutung dieses Satzes liegt darin, dass sich, wie Herr Fuchs gezeigt hat, auf Grund desselben ein Verfahren angeben lässt, welches durch Anwendung rein rationaler Processe zu entscheiden gestattet, ob eine vorgelegte Differentialgleichung von der Form (6) algebraisch integrirbar ist oder nicht. Um dieses Verfahren darlegen zu können, müssen wir noch einige Eigenschaften der algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen von der Form (6) entwickeln.

300. Nothwendige Bedingung für die algebraische Integrabilität einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Wenn die Differentialgleichung (6) durch die Transformation [illegible] in (1) übergeht, so könnte es sich ereignen, dass die projective Monodromiegruppe ϑ von (6) mit der projectiven Monodromiegruppe ϑ' von (1) nicht übereinstimmt. Da aber jedem geschlossenen Umlaufe von x ein geschlossener Weg von z entspricht, so muss jedenfalls ϑ in ϑ' als Untergruppe enthalten sein. Wenn wir uns die Differentialgleichung (1) nach dem in der Nr. 194 beschriebenen Verfahren gebildet denken, so ist der Grad der rationalen Function $\varphi(x)$ genau gleich der Anzahl der x-Werthe, für welche auf geeigneten Wegen fortgesetzt der Integralquotient η von (6) denselben Werth anzunehmen

vermag, in diesem Falle stimmt also die projective Monodromiegruppe ϑ' von (1) mit ϑ genau überein.

Wir wollen uns die Differentialgleichung (1) so eingerichtet denken, dass ihre projective Monodromiegruppe mit der von (6) identisch ist und sagen dann, die Differentialgleichung (6) gehöre in den cyklischen, beziehungsweise den Dieder-, Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaeder-Typus, jenachdem die Differentialgleichung (1) dem einen oder dem anderen dieser Typen angehört. Dann gilt offenbar der folgende Satz:

Wenn $M(y_1, y_2)$ eine homogene ganze Function der Elemente y_1, y_2 eines Fundamentalsystems von (6) bedeutet, die gleich der Wurzel aus einer rationalen Function von x ist, so ist die aus den entsprechenden Integralen w_1, w_2 von (1) gebildete Form $M(w_1, w_2)$ eine invariante Form von (1), d. h. gleich der Wurzel aus einer rationalen Function von z.

Daraus folgt, dass die über die invarianten Formen einer Gauss'-chen Differentialgleichung aufgestellten Sätze ohne Weiteres für die us den Integralen einer algebraisch integrirbaren Differentialgleichung 3) gebildeten Formen gültig bleiben.

Denken wir uns nun eine Differentialgleichung (6) vorgelegt. Betzt dieselbe ein particulares Integral y_1, welches eine algebraische unction von x ist, ohne dass ihr allgemeines Integral algebraisch äre, so muss dieses Integral y_1 nothwendig die Wurzel aus iner rationalen Function von x sein. Denn wäre y_1 nicht Wurzel aus einer rationalen Function, so würde dieses Integral einer gebraischen irreductiblen Gleichung mit in x rationalen Coefficienten enüge leisten, für welche mindestens zwei Zweige der durch dieselbe efinirten algebraischen Function vorhanden wären, deren Quotient icht constant ist. Da aber jeder Zweig dieser algebraischen Function ne Lösung von (6) sein muss, so besässe die Differentialgleichung (6) wei linear unabhängige Integrale, die algebraische Functionen sind.

Besitzt die Differentialgleichung (6) ein Integral y_1, welches die Wurzel aus einer rationalen Function ist, und ist dieselbe algebraisch itegrirbar, so muss die zu (6) gehörige Differentialgleichung (1) von er Form (4) sein, da sonst keine homogene Function ersten Grades rer Integrale eine invariante Form sein könnte. Dann giebt es aber nfolge der Gleichungen (10) noch ein von y_1 linear unabhängiges ntegral der Differentialgleichung (6), welches Wurzel aus einer rationalen Function ist.

Mit Hülfe des in der Nr. 178 (Bd. II, 1, S. 171 ff.) entwickelten Verfahrens können wir für die Differentialgleichung (6) stets entcheiden, ob sie durch die Wurzel aus einer rationalen Function be-

friedigt werden kann, und finden zugleich, wenn die Entscheidung im bejahenden Sinne erfolgt, die sämmtlichen Lösungen von der gedachten Beschaffenheit.

Ergiebt sich, dass, abgesehen von einem constanten Factor, nur ein Integral existirt, welches gleich der Wurzel aus einer rationalen Function ist, so ist das allgemeine Integral von (6) nicht algebraisch; allgemein können wir sagen:

Durch Anwendung der Methode der Nr. 178 auf die Differentialgleichung (6) können wir feststellen

1) ob ein einziges particuläres Integral algebraisch ist,
2) ob die Differentialgleichung (6) dem cyklischen Falle angehört.

Wenn also die Anwendung dieser Methode ein negatives Resultat ergiebt, so hat die Differentialgleichung entweder kein algebraisches Integral, oder sie gehört dem Dieder-, Tetraeder-, Oktaeder- oder Ikosaeder-Typus an.

Soll die Differentialgleichung dem Dieder-Typus angehören, so muss eine quadratische Form ihrer Integrale gleich der Wurzel aus einer rationalen Function sein. Denken wir uns nach der Methode der Nr. 185 die Differentialgleichung dritter Ordnung aufgestellt, de[m] die homogenen Functionen zweiten Grades der Integrale y_1, y_2 von (6 genügen, so können wir diese Differentialgleichung mit Hülfe des Verfahrens der Nr. 178 daraufhin untersuchen, ob eine Lösung derselbe[n] die Wurzel aus einer rationalen Function ist.

Wenn sich das Vorhandensein einer solchen Lösung ergiebt, so liefert das angewandte Verfahren zugleich den explicite[n] Ausdruck $\varphi(x)$ dieser Lösung; es ist also in diesem Falle

$$(11) \qquad a_0 y_1^2 + a_1 y_1 y_2 + a_2 y_2^2 = \varphi(x),$$

wo die a_0, a_1, a_2 Constanten bedeuten, für welche

$$(12) \qquad a_1^2 - 4a_0 a_2 \neq 0$$

ist, da sonst schon eine homogene Function ersten Grades der y_1, y_2 gleich der Wurzel aus einer rationalen Function wäre.

Nun ist offenbar

$$(13) \qquad \eta = \frac{y_2}{y_1} = C\int \frac{dx}{y_1^2},$$

wo C eine Constante bedeutet, setzen wir also

$$a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 = f(\eta),$$

so erhalten wir durch Differentiation der Gleichung

$$(14) \qquad f(\eta) = \frac{\varphi(x)}{y_1^2}$$

die Gleichung

$$(15) \qquad C\frac{d\log f(\eta)}{d\eta} = y_1^2\frac{d\log\varphi(x)}{dx} - 2y_1\frac{dy_1}{dx}.$$

Differentiiren wir diese Gleichung noch einmal, ersetzen die zweite Ableitung von y_1 durch den aus (6) folgenden Werth

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = p(x)y_1$$

und eliminiren dann aus der so entstehenden Gleichung und den Gleichungen (13), (14), (15) die Grössen

$$\frac{d\eta}{dx},\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},$$

so erhalten wir

$$C^2\left[2f(\eta)\frac{d^2f(\eta)}{d\eta^2} - \left(\frac{df(\eta)}{d\eta}\right)^2\right] = \varphi(x)^2\left[\left(\frac{d\log\varphi(x)}{dx}\right)^2 + 2\frac{d^2\log\varphi(x)}{dx^2} - 4p(x)\right]$$

oder einfach

$$(16) \quad C^2(4a_0a_2 - a_1^2) = \varphi(x)^2\left[\left(\frac{d\log\varphi(x)}{dx}\right)^2 + 2\frac{d^2\log\varphi(x)}{dx^2} - 4p(x)\right].$$

Den Werth der Constanten

$$c = C^2(4a_0a_2 - a_1^2)$$

können wir z. B. dadurch bestimmen, dass wir auf der rechten Seite der Gleichung (16) für x einen besonderen Werth einsetzen. Wir erkennen zugleich aus dieser Gleichung, dass $\varphi(x)$ die Quadratwurzel aus einer rationalen Function sein muss.

Setzen wir

$$\frac{-c}{4\varphi(x)^2} = \psi(x),$$

so ergiebt sich aus (16)

$$p(x) = \frac{5}{16}\left(\frac{d\log\psi(x)}{dx}\right)^2 - \frac{1}{4\psi(x)}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \psi(x).$$

Die Differentialgleichung (6) besitzt demgemäss die beiden Lösungen:

$$y_1 = [\psi(x)]^{-\frac{1}{4}}e^{\int\sqrt{\psi(x)}\,dx},\quad y_2 = [\psi(x)]^{-\frac{1}{4}}e^{-\int\sqrt{\psi(x)}\,dx}.$$

Diese Integrale sind dann und nur dann algebraisch, wenn

$$\int\sqrt{\psi(x)}\,dx$$

der Logarithmus einer algebraischen Function ist, die Entscheidung darüber erfolgt (vergl. Nr. 190, Bd. II, 1, S. 226) durch Untersuchung eines Systems linearer Gleichungen.

Wenn keine homogene Function zweiten Grades der y_1, y_2 (und auch keine ersten Grades) die Wurzel aus einer rationalen Function ist, so muss, wenn die Differentialgleichung (6) algebraisch integrirbar sein soll, eine Form vierten, sechsten oder zwölften Grades der y_1, y_2, die keine Potenz eine Form niedrigeren Grades ist, gleich der Wurzel aus einer rationalen Function sein.

Wir werden also nach der Methode der Nr. 185 die Differentialgleichungen fünfter, siebenter und dreizehnter Ordnung aufstellen, der die vierten, sechsten, zwölften Potenzen der Integrale von (6) genügen, und diese nach dem in der Nr. 178 gelehrten Verfahren daraufhin untersuchen, ob sie durch die Wurzel aus einer rationalen Function befriedigt werden können.

Erfolgt die Entscheidung für alle drei Differentialgleichungen in verneinendem Sinne, so ist die vorgelegte Differentialgleichung (6) nicht algebraisch integrirbar. Es gilt aber auch das Umgekehrte, d. h. wenn eine der erwähnten drei Differentialgleichungen durch die Wurzel aus einer rationalen Function befriedigt wird, so ist die Differentialgleichung (6) algebraisch integrirbar.

Die Richtigkeit dieser letzteren Behauptung folgt unmittelbar aus einem Satze von Herrn Fuchs, den wir jetzt darzulegen haben.

301. Satz von Fuchs zur Entscheidung über die algebraische Integrirbarkeit einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Wenn für eine Differentialgleichung (6) eine aus dem Fundamentalsysteme y_1, y_2 gebildete Form von höherem als dem zweiten Grade, die nicht eine Potenz einer Form niedrigeren Grades ist, gleich der Wurzel aus einer rationalen Function gefunden wird, so ist die Differentialgleichung (6) algebraisch integrirbar.

In der That sei

$$(17)\quad M(y_1, y_2) = a_0 y_1^\varkappa + a_1 y_1^{\varkappa-1} y_2 + \cdots + a_\varkappa y_2^\varkappa = y_1^\varkappa m(\eta) = \varphi(x),$$

wo $\varkappa > 2$ ist und $\varphi(x)$ die Wurzel aus einer rationalen Function bedeutet, so folgt durch logarithmische Differentiation dieser Gleichung mit Rücksicht auf (13)

$$(18)\qquad C\frac{d\log m(\eta)}{d\eta} = y_1^2\,\frac{d\log\varphi(x)}{dx} - \varkappa\, y_1\,\frac{dy_1}{dx}.$$

Differentiirt man noch einmal, beachtet abermals die Gleichung (13), und ersetzt die zweite Ableitung von y_1 durch ihren aus (6) folgenden Werth

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = p(x) y_1,$$

so ergiebt sich

$$(19) \qquad C^2 \frac{d^2 \log m(\eta)}{d\eta^2} = 2 y_1^3 \frac{dy_1}{dx} \frac{d \log \varphi(x)}{dx} + q(x) y_1^4 - \varkappa y_1^2 \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2,$$

wo

$$(20) \qquad q(x) = \frac{d^2 \log \varphi(x)}{dx^2} - \varkappa p(x)$$

gesetzt wurde. Eliminirt man aus den Gleichungen (17), (18), (19) die Grössen

$$y_1, \quad \frac{dy_1}{dx},$$

so erhält man

$$(21)\ C^2 \left\{\varkappa \frac{d^2 \log m(\eta)}{d\eta^2} + \left(\frac{d \log m(\eta)}{d\eta}\right)^2\right\} [m(\eta)]^{-\frac{4}{\varkappa}} = \left(\frac{d \log \varphi(x)}{dx} + \varkappa q(x)\right) [\varphi(x)]^{-\frac{4}{\varkappa}}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich η als algebraische Function von x, und die Gleichungen

$$y_1 = \sqrt{\frac{dx}{d\eta}}, \quad y_2 = \eta \sqrt{\frac{dx}{d\eta}}$$

liefern demnach y_1, y_2 als algebraische Functionen von x, wenn die Gleichung (21) keine Identität ist. Es soll nun gezeigt werden, dass das letztere nicht der Fall sein kann.

Sollte (21) eine Identität sein, so müsste die linke Seite dieser Gleichung von η unabhängig sein. Nun ist zunächst $m(\eta)$ nicht identisch Null, ebenso wenig kann aber

$$\varkappa \frac{d^2 \log m(\eta)}{d\eta^2} + \left(\frac{d \log m(\eta)}{d\eta}\right)^2 = 0$$

sein, da sonst

$$m(\eta) = c_1 (\eta - c_2)^\varkappa$$

wäre, wo c_1, c_2 Constanten bedeuten. Es könnte also nur noch

$$(22) \qquad \left[\varkappa \frac{d^2 \log m(\eta)}{d\eta^2} + \left(\frac{d \log m(\eta)}{d\eta}\right)^2\right] [m(\eta)]^{-\frac{4}{\varkappa}} = r$$

sein, wo r eine von Null verschiedene und von η unabhängige Grösse bedeutet.

Der erste Factor der linken Seite von (22) ist eine rationale Function von η, also müsste, wenn die Gleichung (22) bestünde,

$$[m(\eta)]^{\frac{4}{\varkappa}} = g(\eta)$$

eine rationale Function von η sein. Daraus folgte aber

$$m^4(\eta) = g^\varkappa(\eta). \tag{23}$$

Sei nun in lineare Factoren zerlegt

$$M(y_1, y_2) = \prod_{\lambda=1}^{\nu} (c_{\lambda 1} y_1 + c_{\lambda 2} y_2)^{\alpha_\lambda},$$

wo also

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu} \alpha_\lambda = \varkappa$$

ist, dann können die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\nu$ keinen gemeinsamen Theiler besitzen, da sonst $M(y_1, y_2)$ die Potenz einer Form niedrigeren Grades wäre. Aus (23) folgt aber

$$\prod_{\lambda=1}^{\nu} (c_{\lambda 1} + c_{\lambda 2}\, \eta)^{4\alpha_\lambda} = g^\varkappa(\eta),$$

es müsste also $\varkappa$ ein gemeinsamer Theiler der Zahlen

$$4\alpha_1, \; 4\alpha_2, \; \cdots \; 4\alpha_\nu$$

sein, d. h. es wäre, da die $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\nu$ theilerfremd sind,

$$\varkappa = 4.$$

In diesem Falle ist die linke Seite von (22)

$$4\,\frac{d^2 m(\eta)}{d\eta^2} - \frac{3}{m(\eta)} \left(\frac{d\,m(\eta)}{d\eta}\right)^2; \tag{24}$$

da aber $m(\eta)$ mindestens zwei ungleiche lineare Factoren enthält kann nicht

$$\left(\frac{d\,m(\eta)}{d\eta}\right)^2$$

durch $m(\eta)$ theilbar sein, darum kann sich der Ausdruck (24) nicht auf eine Constante r reduciren.

Man kann also in der That durch rein rationale Processe für eine vorgelegte Differentialgleichung (6) entscheiden

1) ob dieselbe kein algebraisches Integral besitzt,
2) ob sie ein und nur ein algebraisches Integral zulässt,
3) ob sie algebraisch integrirbar ist.

Für die algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten haben wir durch den Klein'schen Satz der Nr. 299 (S. 151) so zu sagen eine explicite Form gefunden; wir sind nämlich im Stande, fünf Typen von Differentialgleichungen hinzuschreiben, die noch eine willkürliche rationale Function $\varphi(x)$ und eine beliebige Wurzel aus einer rationalen Function λ enthalten, und aus denen jede algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichung durch Specialisirung hervorgehen muss.

Offenbar ist dadurch zugleich die Aufgabe gelöst, alle endlichen Gruppen homogener linearer Substitutionen in zwei Variabeln y_1, y_2, beziehungsweise projectiver Substitutionen in einer Variabeln η zu finden. In der That ist klar, dass, wenn ϑ irgend eine endliche Gruppe projectiver Substitutionen von η bedeutet, und wir durch

$$\eta, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{\nu-1}$$

die Werthe bezeichnen, die aus η durch die Substitutionen von ϑ hervorgehen, der Ausdruck

$$\frac{(\eta-a)(\eta_1-a)\cdots(\eta_{\nu-1}-a)}{(\eta-b)(\eta_1-b)\cdots(\eta_{\nu-1}-b)}=Z,$$

wo a, b zwei unbestimmte Constanten sind, eine Grösse Z definirt, für welche die Schwarz'sche Ableitung

$$\varDelta\left(\frac{\eta}{Z}\right)=R(Z)$$

wird, wo $R(Z)$ eine rationale Function von Z bedeutet. Wir haben also unmittelbar η als den Integralquotienten einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren projective Monodromiegruppe mit ϑ übereinstimmt, und deren unabhängige Variable Z als rationale Function von η erscheint. Diese Differentialgleichung muss dann, indem wir Z gleich einer linear gebrochenen Function von z setzen, in einen der fünf Typen, die wir aufgestellt hatten, übergehen. Im cyklischen Falle besteht die Gruppe, wie bereits erwähnt, aus den Potenzen einer periodischen elliptischen Substitution, in den übrigen vier Fällen erhalten wir die Substitutionen der entsprechenden Gruppe, indem wir z. B. die allgemeine Primform in ihre linearen Factoren zerlegen.

Auf diese Weise sind also alle endlichen algebraischen Untergruppen der allgemeinen linearen homogenen Gruppe L für den Fall zweier Variabeln gefunden.

302. Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die durch Wurzeln aus rationalen Functionen befriedigt werden.

Verweilen wir noch einen Augenblick bei der Betrachtung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die durch die Wurzel aus einer rationalen Function befriedigt werden können, ohne algebraisch integrirbar zu sein.

Nehmen wir gleich allgemein eine lineare Differentialgleichung

$$(A_2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + 2p\frac{dy}{dx} + qy = 0,$$

die ein Integral y_1 besitzt, dessen logarithmische Ableitung dem Rationalitätsbereiche angehört. Sind dann die Coefficienten p, q rationale Functionen von x, gehört ferner (A_2) zur Fuchs'schen Classe, und sind die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen rationale Zahlen, so ist y_1 die Wurzel aus einer rationalen Function.

Sei y_2 ein zweites, von y_1 wesentlich verschiedenes Integral von (A_2), so müssen die Substitutionen der Transformationsgruppe G von (A_2) offenbar die Form haben

$$(25) \qquad \begin{cases} \eta_1 = \alpha y_1, \\ \eta_2 = \beta y_1 + \gamma y_2. \end{cases}$$

Diese Substitutionen (25) bilden aber bei willkürlicher Wahl der α, β, γ eine Gruppe, und zwar offenbar eine algebraische Untergruppe der allgemeinen linearen homogenen Gruppe L. Diese Gruppe G ist also die Transformationsgruppe einer Differentialgleichung (A_2), die eine Lösung mit rationaler logarithmischer Ableitung besitzt.

Betrachten wir eine beliebige Differentialgleichung (A_2), deren Transformationsgruppe also L selbst ist. Die rationale Differentialfunction

$$\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx}$$

ist dann eine charakteristische Invariante der Untergruppe G; wir fragen nach der Resolvente, der diese Function Genüge leistet.

Nehmen wir an Stelle der logarithmischen Ableitung von y_1 den Ausdruck

$$u_1 = \frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx} + p,$$

so bleibt derselbe nicht nur bei den Transformationen von G, sondern auch dann ungeändert, wenn wir von der Differentialgleichung (A_2) durch die Substitution

$$y = \lambda \mathfrak{y}$$

ı einer äquivalenten Differentialgleichung übergehen. Wählen wir so λ so, dass die Differentialgleichung für $\mathfrak{y}$ die canonische Form

$$(\mathrm{A}_2)\qquad \frac{d^2\mathfrak{y}}{dx^2}=\left(p^2+\frac{dp}{dx}-q\right)\mathfrak{y}$$

·hält, so ergiebt sich unmittelbar

$$u_1=\frac{1}{\mathfrak{y}_1}\frac{d\mathfrak{y}_1}{dx},\qquad \frac{du_1}{dx}=\frac{1}{\mathfrak{y}_1}\frac{d^2\mathfrak{y}_1}{dx^2}-u_1^{\,2},$$

h. u_1 genügt der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(26)\qquad \frac{du}{dx}+u^2+q-p^2-\frac{dp}{dx}=0,$$

e also die gesuchte Resolvente darstellt.

Man bezeichnet eine Differentialgleichung von der Form (26) gewöhnlich als eine Riccati'sche Differentialgleichung. Wir können ınn sagen:

Damit die Differentialgleichung (A_2) ein Integral mit ·tionaler logarithmischer Ableitung besitze, ist erforderlich ıd hinreichend, dass die Riccati'sche Differentialgleichung 6) durch eine rationale Function befriedigt werde.

Sei $R(x)$ diese rationale Lösung von (26), so ist also

$$q=p^2+\frac{dp}{dx}-\frac{dR}{dx}-R^2,$$

h. eine Differentialgleichung (A_2), die ein Integral mit rationaler garithmischer Ableitung besitzt, hat die Form

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2p\frac{dy}{dx}+\left(p^2+\frac{dp}{dx}-\frac{dR}{dx}-R^2\right)y=0,$$

› R eine beliebige rationale Function bedeutet.

Eine solche Differentialgleichung ist stets durch Quadraturen tegrirbar; man erhält nämlich

$$y_1=e^{\int(R(x)-p)\,dx},\quad y_2=y_1\int e^{-2\int R(x)dx}\,dx.$$

Die Gruppe G ist eine continuirliche, sie wird nämlich aus den ei infinitesimalen Transformationen

$$y_1\frac{\partial f}{\partial y_1},\quad y_1\frac{\partial f}{\partial y_2},\quad y_2\frac{\partial f}{\partial y_2}$$

zeugt. In derselben sind alle continuirlichen algebraischen Unterappen von L als Untergruppen enthalten, wenn man von der speilen linearen Gruppe $\bar{L}$ absieht. Man findet nämlich durch einfache scussion, dass ausser $\bar{L}$ und G nur folgende continuirliche algeische Untergruppen von L möglich sind:

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad a_1 y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + a_2 y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2},$$

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2},$$

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2},$$

$$a_1 y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + a_2 y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2},$$

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_2},$$

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2}.$$

Wir haben die Gruppen durch die infinitesimalen Transformationen charakterisirt, aus denen dieselben erzeugt sind; a_1, a_2 bedeuten zwei beliebige von einander verschiedene Constanten, deren Verhältniss rational sein muss, damit die betreffende Untergruppe eine algebraische sei. Eine weitere Discussion dieser Gruppen führt zu keinem bemerkenswerthen Ergebnisse.

Von einer Differentialgleichung, die ein Integral mit rationaler logarithmischer Ableitung besitzt, kann man durch eine Substitution

$$y = \lambda \mathfrak{y}$$

zu einer Differentialgleichung übergehen, die durch eine ganze rationale Function befriedigt wird (vergl. Nr. 178, Bd. II, 1, S. 172), sofern man voraussetzt, dass die Differentialgleichung etwa rationale Coefficienten besitzt und zur Fuchs'schen Classe gehört. Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren eine Lösung eine ganze rationale Function ist, sind in der Potentialtheorie von hervorragender Bedeutung. Sie besitzen aber auch ein hervorragendes analytisches Interesse, besonders durch die ausgezeichneten Eigenschaften, die für die Nullstellen jener ganzen rationalen Integrale bestehen. In der neueren Zeit haben sich besonders die Herren Hurwitz und Klein mit darauf bezüglichen Untersuchungen beschäftigt; wir begnügen uns damit, auf diese Fragen hinzuweisen.

303. Das Poincaré'sche Princip für den Fall von drei singulären Punkten.

Wir wollen nunmehr eine Verallgemeinerung der für die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe entwickelten Resultate darlegen, die nach der Richtung des in dem elften Abschnitte verfolgten Gedankenganges liegt und von Herrn Poincaré herrührt. Die Bedeutun

ieser Verallgemeinerung wird am klarsten hervortreten, wenn wir ir die Gauss'sche Differentialgleichung das Princip zur Anwendung ringen, vermöge dessen Herr Poincaré aus der in Rede stehenden 'erallgemeinerung das Resultat erzielt hat, dass sich für jede lineare)ifferentialgleichung mit algebraischen Coefficienten abhängige und nabhängige Variable als eindeutige Functionen eines Parameters dartellen lassen.

Wir hatten gezeigt, dass die Function, die aus der Dreiecksfunction

$$\eta = s(\delta_1, \delta_2, \delta_3, z)$$

urch Umkehrung hervorgeht, wenn die $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ die Form

$$\delta_\varkappa = \frac{1}{g_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

esitzen, wo g_1, g_2, g_3 positive ganze Zahlen oder unendlich gross sind, ine eindeutige Function ist, die innerhalb eines einfach zusammenängenden von den Unbestimmtheitsstellen begrenzten Bereiches existirt und bei Anwendung einer gewissen discontinuirlichen Gruppe ϑ rojectiver Substitutionen ungeändert bleibt. Innerhalb des Fundaentalbereiches dieser Gruppe nimmt die Function z von η jeden 'erth mit Ausnahme von $0, 1, \infty$ einmal und nur einmal an.

Sei nun eine Function

$$y = f(x)$$

rgelegt, die sich in der Umgebung jeder Stelle der x-Ebene, mit usnahme der Stellen $0, 1, \infty$, eindeutig verhält. Wenn die Function x) die Eigenschaft hat, dass jeder ihrer Zweige nach einer endlichen nzahl von Umkreisungen der Punkte $0, 1, \infty$ zu seinem Ausgangserthe zurückkehrt, so bezeichnen wir mit h_1 die kleinste positive nze Zahl, die so beschaffen ist, dass jeder Zweig von y nach -maliger Umkreisung des Punktes $x = 0$ zu seinem Ausgangswerthe ırückkehrt, und mit h_2, h_3 die analogen Zahlen für $x = 1$ und $x = \infty$. ılls es für einen der Verzweigungspunkte $0, 1, \infty$ keine endliche ganze ıhl giebt, die die Anzahl der erforderlichen Umläufe liefert, nach ren Ausführung jeder Zweig von $f(x)$ zu seinem Anfangswerthe zuckkehrt, so nehmen wir das entsprechende $h_\varkappa$ unendlich gross. Setzen r dann

$$) \qquad \eta = s\left(\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \frac{1}{h_3}, x\right),$$

ist y eine eindeutige Function von η.

In der That ist y als Function von η in der Umgebung jeder telle des Existenzbereiches der durch die Gleichung (1) definirten 'unction x von η eindeutig, also unverzweigt, und da der Existenz-

bereich der Umkehrungsfunction der Dreiecksfunction η ein einfach zu-sammenhängender ist, so y eine allenthalben eindeutige Function von η Da x ebenfalls eindeutig in η ist, so haben wir also die functionale Beziehung zwischen y und x dadurch dargestellt, dass wir beide Variable als eindeutige Functionen der durch di Gleichung (1) definirten dritten Variabeln η ausdrücken.

Wenn die Function y von x nicht die Verzweigungspunkte 0, 1, ∞ sondern drei beliebige Verzweigungsstellen a, b, c besitzt, so haben w an Stelle der Gleichung (1) die Gleichung

$$\eta = s\left(\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \frac{1}{h_3}, \frac{x-a}{x-c}\,\frac{b-c}{b-a}\right)$$

zur Definition von η anzuwenden.

Wir sind also auf Grund des angewandten Princips, welches wir als das Poincaré'sche Princip bezeichnen wollen, in der Lage, für jede Function y von x, die nur drei Verzweigungspunkte besitzt, einen als Dreiecksfunction definirten Parameter η anzugeben, als dessen eindeutige Functionen die beiden Variabeln y und x darstellbar sind.

Diese Darstellung ist also stets anwendbar, wenn y als Function von x durch eine algebraische Gleichung mit nur drei Verzweigungspunkten, oder als das Integral einer linearen Differentialgleichung mit drei wesentlichen singulären Punkten definirt ist. Insbesondere werden wir also, wenn eine Gauss'sche Differentialgleichung vorgelegt ist,

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0, \tag{2}$$

den Parameter η in folgender Weise bestimmen können.

Falls die Zahlen

$$1-\gamma, \qquad \gamma-\alpha-\beta, \qquad \alpha-\beta \tag{3}$$

rational sind, so nehmen wir h_1, h_2, h_3 der Reihe nach gleich den Nennern dieser als reducirte Brüche geschriebenen Zahlen; falls eine der Zahlen (3) gleich Null oder nicht rational ist, so haben wir das entsprechende h_x unendlich gross zu wählen. Der Parameter η ist dann durch die Gleichung (1) definirt.

Seien nun insbesondere die Zahlen (3) selbst reciprok ganze Zahlen oder Null, und bezeichne ζ einen Integralquotienten

$$\zeta = s(|1-\gamma|, \ |\gamma-\alpha-\beta|, \ |\alpha-\beta|, x)$$

von (2), so ist x eine eindeutige Function von ζ. Seien fern h_1, h_2, h_3 drei ganze Zahlen, die der Reihe nach durch die Nen der Zahlen (3) theilbar sind; sollte einer dieser Nenner unendlich gr sein, so wäre auch das entsprechende h_x unendlich gross zu nehm

andererseits ist, wenn ein h_x unendlich gross genommen wird, die Bedingung der Theilbarkeit durch jede ganze Zahl als erfüllt anzusehen.

Auf Grund des Poincaré'schen Princips ist dann ζ ebensowohl wie jede Lösung der Differentialgleichung (2) eine eindeutige Function von

$$\eta = s\left(\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \frac{1}{h_3}, x\right),$$

und wir sagen von der Dreiecksfunction η, beziehungsweise von der zugehörigen Gauss'schen Differentialgleichung, sie sei der Dreiecksfunction ζ, beziehungsweise der Differentialgleichung (1) untergeordnet oder subordinirt.

Es ist evident, dass, wenn für eine Function y von x die Dreiecksfunction ζ den Parameter der eindeutigen Darstellung liefert, auch jede der Function ζ untergeordnete Dreiecksfunction η die Eigenschaft besitzt, dass y und x als eindeutige Functionen derselben erscheinen.

Nun ist offenbar die inverse Function der Modulfunction

$$\tau = s(0, 0, 0, x) \tag{4}$$

jeder eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunction untergeordnet, wir schliessen also, dass für jede Function

$$y = f(x),$$

die nur die drei Verzweigungspunkte 0, 1, ∞ besitzt, die Grösse τ einen Parameter liefert, durch welchen sich y und x eindeutig darstellen lassen.

Diese merkwürdige Eigenschaft der Modulfunction beruht auf dem Umstande, dass x als Function von τ die drei Werthe 0, 1, ∞ innerhalb des einfach zusammenhängenden Bereiches der τ-Ebene, wo sich x wie eine rationale Function verhält, überhaupt nicht annimmt, d. h. wie wir uns kurz ausdrücken wollen, darauf, dass die Modulfunction die drei Werthe 0, 1, ∞ auslässt, ähnlich wie die Exponentialfunction

$$e^u$$

die Werthe 0 und ∞ auslässt. Die letztere Eigenschaft der Exponentialfunction bewirkt, dass eine Function

$$y = f(x),$$

die nur die beiden Verzweigungspunkte 0 und ∞ besitzt, eine eindeutige Function von u wird, wenn wir

$$x = e^u$$

setzen; ähnlich wird eine Function mit den drei Verzweigungspunkten 0, 1, ∞ eine eindeutige Function von τ, wenn wir x gleich der Modulfunction von τ nehmen.

Diese Eigenschaft der Modulfunction ist in einzelnen besonderen Fällen schon vor längerer Zeit bemerkt worden. So fallen z. B. unter dieselbe die Formeln, durch welche Jacobi in den „Fundamenta nova etc.“ die Grössen K, K', $\varkappa'$, $\log \varkappa^2$, $\log \varkappa'^2$ als eindeutige Functionen von τ darstellt. Bezeichnet man ferner durch

$$u^8 = \varkappa^2, \quad v^8 = \lambda^2$$

die Quadrate der Moduln zweier elliptischer Integrale erster Gattung, die durch eine Transformation vom Primzahlgrade n auseinander hervorgehen, so besitzt die zwischen u und v bestehende algebraische Gleichung

$$\Theta(u, v) = 0,$$

die sogenannte Modulargleichung, wie Herr Hermite gezeigt hat, die Eigenschaft, dass v als Function von u sich nur an den Stellen

$$u = 0, \quad u^8 - 1 = 0, \quad u = \infty$$

verzweigt. Hieraus folgt sofort die Möglichkeit der von Herrn Hermite gegebenen Darstellung von u und v als eindeutiger Functionen des zum Modul $\varkappa^2$ gehörigen Periodenquotienten τ, die für $n = 5$ die Auflösbarkeit der allgemeinen Gleichung fünften Grades durch elliptische Functionen nach sich zieht. Endlich hat Herr Klein die eindeutige Darstellbarkeit einer beliebigen Dreiecksfunction von x durch die Grösse τ bemerkt.

Wenn es gelänge, eine eindeutige Function

$$x = \varphi(\eta)$$

herzustellen, für welche der Bereich, wo sich diese Function wie eine rationale Function verhält, ein einfach zusammenhängender ist, und die σ beliebig vorgeschriebene complexe Werthe

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma$$

auslässt, so würde jede Function y von x, die keine anderen Verzweigungspunkte wie $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ besitzt, vermöge des Poincaré'schen Princips als eindeutige Function von η darstellbar sein; man könnte also mit Hülfe einer solchen Function die allgemeine Lösung einer linearen Differentialgleichung mit der unabhängigen Variabeln x, deren sämmtliche wesentliche singuläre Stellen unter den $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ enthalten sind, simultan mit x als eindeutige Function des Parameters η darstellen, ähnlich wie man die durch eine algebraische Gleichung vom Range Null verknüpften Variabeln als rationale, die durch eine Gleichung vom Range Eins verknüpften als elliptische Functionen eines Parameters darstellt.

Die Untersuchungen von Herrn Poincaré haben gelehrt, dass eine solche Function in der That stets angegeben werden kann und zwar erscheint dieselbe als die Umkehrungsfunction des Integralquotienten einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten. Wir werden im Folgenden diese Untersuchungen darzulegen haben, und beschränken uns dabei auf diejenigen Fälle, die für die Erreichung unseres Zieles, d. h. für die Darstellung der abhängigen und unabhängigen Variabeln einer linearen Differentialgleichung als eindeutige Functionen eines Parameters ausreichend sind.

Fünfzehnter Abschnitt.

Theorie der Fuchs'schen Functionen.

Erstes Kapitel.

304. Fuchs'sche Gruppen. Zwei Beispiele. Bedingungen für d Discontinuität.

Wir hatten am Schlusse der Nr. 216 (Bd. II, 1, S. 346) die Frag aufgeworfen, ob sich in der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{d z^2} = q(z) y,$$

wo $q(z)$ durch die Formel

$$(1a) \qquad q(z) = \frac{1}{\prod\limits_{\lambda=1}^{\sigma}(z-a_\lambda)} \left\{ -\frac{1}{4}(1-\delta_{\sigma+1}^2) E_{\sigma-2}(z) - \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \frac{(a_\lambda - a_1)\cdots(a_\lambda - a_\sigma)}{z-a_\lambda} \frac{1}{4}(1-\delta_\lambda^2) \right\}$$

gegeben ist, und wo die Grössen

$$\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_\sigma, \delta_{\sigma+1}$$

als reciproke ganze Zahlen oder Null vorausgesetzt werden, die Coefficienten der ganzen Function vom Grade $\sigma - 2$ $E_{\sigma-2}(z)$ so bestimmen lassen, dass die unabhängige Variable z eine eindeutige Function des Integralquotienten η wird. Wir werden diese Frage nicht in ihrer vollen Allgemeinheit behandeln, sondern die Existenz von Differentialgleichungen von der gewünschten Beschaffenheit zu erweisen suchen, die als die unmittelbare Verallgemeinerung derjenigen Gauss'schen Differentialgleichungen erscheinen, die zu eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunctionen erster Art führen.

Wir behandeln zunächst die projective Monodromiegruppe ϑ, indem wir voraussetzen, dass die Substitutionen derselben Verschiebungen in dem in der Nr. 285 (S. 101) fixirten Sinne sind, und zwar möge der Orthogonalkreis O ein realer Kreis mit nicht verschwindendem Radius sein.

Eine discontinuirliche projective Gruppe ϑ, deren Substitutionen einen realen Kreis mit nicht verschwindendem Radius ungeändert lassen, nennt man nach Herrn Poincaré eine Fuchs'sche Gruppe.

Die zu den eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunctionen erster Art gehörigen Gruppen ϑ sind also Fuchs'sche Gruppen.

Für diese war der Fundamentalbereich F_0 ein innerhalb des Orthogonalkreises gelegenes Kreisbogenviereck, dessen Seiten den Orthogonalkreis unter rechtem Winkel schneiden. Entsprechend den drei singulären Punkten

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \infty$$

hatten wir in F_0 drei Cykeln von Ecken mit den Winkelsummen

$$2\pi\delta_1, \quad 2\pi\delta_2, \quad 2\pi\delta_3.$$

Wir wollen nun allgemeine Gruppen ϑ betrachten, deren Fundamentalbereich F_0 die folgende Beschaffenheit besitzt.

1. In Bezug auf die Anordnung der Ecken und Seiten möge F_0 von der Art sein, wie der in der Nr. 211 (Bd. II, 1, S. 320) betrachtete Bereich F_0, d. h. F_0 sei begrenzt von 2σ einen zusammenhängenden Curvenzug bildenden Seiten

$$s_1, s_1', s_2, s_2', \cdots s_\sigma, s_\sigma'.$$

Diese σ Seitenpaare mögen durch gewisse gegebene Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\sigma$, die wir als elliptische oder parabolische voraussetzen, in einander transformirt werden, und der Schnittpunkt $\lambda_\varkappa$ der Seiten $s_\varkappa$ und

$$s_\varkappa' = A_\varkappa s_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

sei ein Doppelpunkt von $A_\varkappa$, und zwar, wenn die Substitution $A_\varkappa$ eine elliptische ist, derjenige, der bei der canonischen Form

$$\frac{A_\varkappa\eta - \lambda_\varkappa}{A_\varkappa\eta - \mu_\varkappa} = e^{2\pi i\delta_\varkappa}\frac{\eta - \lambda_\varkappa}{\eta - \mu_\varkappa}$$

im Zähler auftritt, falls

$$0 < \delta_\varkappa < 1$$

ist. Ebenso sei der Schnittpunkt $\lambda_{\sigma+1}$ von s_1 und s_σ' ein Doppelpunkt der Substitution

$$A_{\sigma+1} = A_1^{-1}A_2^{-1} \cdots A_\sigma^{-1},$$

dann sind die Schnittpunkte $\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa)}$ von $s_\varkappa'$ und $s_\varkappa$ aus $\lambda_{\sigma+1}$ durch die Substitutionen $A_1A_2 \cdots A_\varkappa$ transformirt,

$$\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa)} = A_1A_2 \cdots A_\varkappa\lambda_{\sigma+1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots (\sigma-1)),$$

und nach dem Satze II der Nr. 210 (Bd. II, 1, S. 310) sind die Winkel [illegible] in den je einen Cyklus bildenden Ecken $\lambda_\varkappa$ gleich $2\pi\delta_\varkappa$, während die Winkelsumme in den Ecken

$$\lambda_{\sigma+1},\quad \lambda'_{\sigma+1},\ \cdots\ \lambda^{(\sigma-1)}_{\sigma+1},$$

die zusammen einen Cyklus bilden, $2\pi\delta_{\sigma+1}$ beträgt.

2. Die Substitutionen

$$A_1,\ A_2,\ \cdots\ A_\sigma,\ A_{\sigma+1}$$

seien Verschiebungen in Bezug auf den gegebenen Orthogonalkreis [illegible] und wenn $A_\varkappa\eta$ eine elliptische Substitution ist, so sei $\lambda_\varkappa$ der innerha[illegible] O gelegene Doppelpunkt derselben. Für eine parabolische Substituti[illegible] wissen wir, dass ihr Doppelpunkt auf der Peripherie von O liegt.

3. Die Winkelsummen

$$2\pi\delta_1,\ 2\pi\delta_2,\ \cdots\ 2\pi\delta_\sigma,\ 2\pi\delta_{\sigma+1}$$

bei den $(\sigma+1)$ von den Ecken des Bereiches F_0 gebildeten Cyk[illegible] In seien aliquote Theile von 2π oder Null.

4. Die Seiten von F_0 seien Kreisbogen, die den Orthogonalkreis O unter rechtem Winkel schneiden.

Um eine Vorstellung davon zu erlangen, welche Beschränkung[illegible]en für die Fundamentalsubstitutionen $A_1,\ A_2,\ \cdots\ A_\sigma$ die gemachten V[illegible]r-aussetzungen über die Beschaffenheit von F_0 mit sich bringen, [illegible]e-trachten wir zwei einfache Beispiele.

Wir nehmen η so, dass der Orthogonalkreis O die reale η-A[illegible]xe wird und betrachten die obere η-Halbebene als das Innere des Ort[illegible]o-gonalkreises. Die Verschiebungen sind dann einfach dadurch char[illegible]k-terisirt, dass dieselben projective unimodulare Substitutionen

$$A\eta = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta},\qquad \alpha\delta-\beta\gamma=1,$$

mit realen Coefficienten sind.

Sei dann $\sigma=3$, und nehmen wir vier elliptische Substitutio[illegible]en

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad A_4,$$

so haben dieselben zunächst der Bedingung

$$A_4A_3A_2A_1 = 1 \tag{2}$$

zu genügen. Denken wir uns ferner die Substitution $A_\varkappa$ in der can[illegible]o-nischen Form

$$\frac{A_\varkappa\eta-\lambda_\varkappa}{A_\varkappa\eta-\bar\lambda_\varkappa} = e^{2\pi i\delta_\varkappa}\,\frac{\eta-\lambda_\varkappa}{\eta-\bar\lambda_\varkappa}\qquad (\varkappa=1,2,3,4)$$

schrieben, wo $\lambda_\varkappa$ einen Punkt der oberen Halbebene, $\bar{\lambda}_\varkappa$ seinen congirten Punkt, $\delta_\varkappa$ eine reale positive Grösse bedeutet, so müssen die ıhlen

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \delta_4$$

ciproke ganze Zahlen sein. Diese beiden Beschränkungen sind aber ch nicht hinreichend. Es müssen die drei Punkte λ_1, λ_2, λ_3 noch beschaffen sein, dass sie mit den Punkten

$$\lambda_4,\ \cdot\ \lambda_4' = A_1\lambda_4,\quad \lambda_4'' = A_2\lambda_4' = A_3^{-1}\lambda_4$$

ı Sechseck bilden können, dessen Seiten Kreisbogen sind, deren ntren auf der realen Axe liegen und in welchem die Winkel bei , λ_2, λ_3' beziehungsweise gleich $2\pi\delta_1$, $2\pi\delta_2$, $2\pi\delta_3$ sind, und die ımme der Winkel bei λ_4, λ_4', λ_4'' genau $2\pi\delta_4$ beträgt.

Denken wir uns also die ınkte λ_1, λ_2, λ_3 durch Kreisgen verbunden, deren Centren f der realen Axe liegen, so uss das so entstehende Kreisgendreieck bei λ_1, λ_2, λ_3 Winl besitzen, die beziehungsweise einer sind als $2\pi\delta_1$, $2\pi\delta_2$, $2\pi\delta_3$. In Formeln lauten diese Bengungen

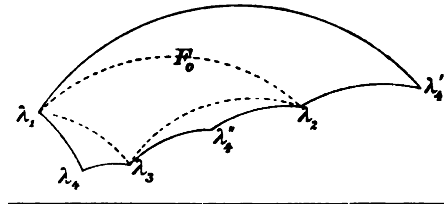


Fig. 29.

$$)\qquad \left\{\begin{aligned} &\arg\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\bar{\lambda}_2-\bar{\lambda}_1}\cdot\frac{\bar{\lambda}_3-\bar{\lambda}_1}{\lambda_3-\lambda_1} < 2\pi\delta_1,\\ &\arg\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\bar{\lambda}_3-\bar{\lambda}_2}\cdot\frac{\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2}{\lambda_1-\lambda_2} < 2\pi\delta_2,\\ &\arg\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_3}\cdot\frac{\bar{\lambda}_2-\bar{\lambda}_3}{\lambda_2-\lambda_3} < 2\pi\delta_3. \end{aligned}\right.$$

iese sind in Verbindung mit den beiden oben angegebenen Bedingungen ıthwendig und hinreichend dafür, dass der Fundamentalbereich F_0 der ıs der Basis

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$$

zeugten Gruppe ϑ die verlangte Beschaffenheit habe (vergl. Fig. 29).

Wenn für $\sigma = 3$ die vier Substitutionen A_1, A_2, A_3, A_4 parabolische in sollen, so müssen die Doppelpunkte λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 reale Grössen in. Die Bedingung (2) muss erfüllt sein, und überdies müssen die ınkte

$$\lambda_1,\ \lambda_4,\ \lambda_3,\ \lambda_4'',\ \lambda_2,\ \lambda_4'$$

in dieser Reihenfolge aufeinander folgen, wenn man sich die reale η-Axe in der einen oder der anderen Richtung durchlaufen denkt. Di[e] Substitutionen A_1, A_2, A_3, die beziehungsweise die Seiten s_1 in s_1', [s_2] in s_2', s_3 in s_3' verwandeln (vergl. Fig. 30), lauten, da

$$\lambda_4 = A_3 \lambda_4'', \quad \lambda_4'' = A_2 \lambda_4', \quad \lambda_4' = A_1 \lambda_4$$

sein muss:

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{A_1 \eta - \lambda_1} = \dfrac{1}{\eta - \lambda_1} + \dfrac{1}{\lambda_4' - \lambda_1} - \dfrac{1}{\lambda_4 - \lambda_1}, \\[2ex] \dfrac{1}{A_2 \eta - \lambda_2} = \dfrac{1}{\eta - \lambda_2} + \dfrac{1}{\lambda_4'' - \lambda_2} - \dfrac{1}{\lambda_4' - \lambda_2}, \\[2ex] \dfrac{1}{A_3 \eta - \lambda_3} = \dfrac{1}{\eta - \lambda_3} + \dfrac{1}{\lambda_4 - \lambda_3} - \dfrac{1}{\lambda_4'' - \lambda_3}, \end{cases}$$

und die Bedingung, dass

$$A_4 = (A_3 A_2 A_1)^{-1}$$

eine parabolische Substitution sein soll, lässt sich in der Form

$$(5) \quad (\lambda_4 - \lambda_1)^2 (\lambda_4'' - \lambda_3)^2 (\lambda_4' - \lambda_2)^2 = (\lambda_4' - \lambda_1)^2 (\lambda_4 - \lambda_3)^2 (\lambda_4'' - \lambda_2)^2$$

darstellen, wo nach Ausziehen der Quadratwurzel auf beiden Seiten die Vorzeichen so zu bestimmen sind, dass dieselben bei der jeweils stattfindenden Lage der Punkte λ beiderseits übereinstimmen. Sind fünf von den Punkten λ bekannt, so ergiebt sich der sechste gemäss der Gleichung (5) durch einfache lineare Construction (vergl. Fig. 30), und

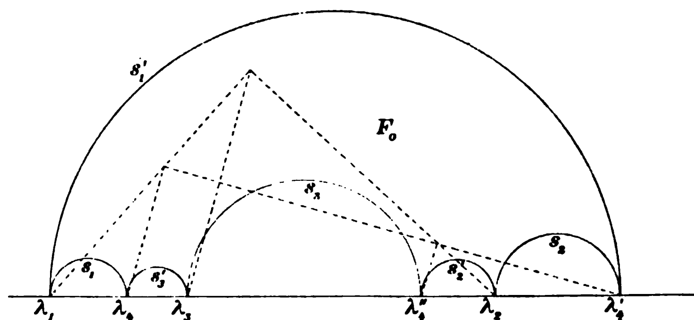


Fig. 30.

die Substitutionen A_1, A_2, A_3 sind dann durch die Formeln (4) bestimmt.

Wir behaupten nun: Wenn der die Gruppe ϑ bestimmende Fundamentalbereich F_0 den Bedingungen 1. bis 4. Genüge leistet, so ist die Gruppe ϑ eine discontinuirliche, d. h. es kann sich niemals ereignen, dass die aus F_0 durch die Substitutionen von ϑ entstehenden Bereiche

$$F_{\pm\varkappa_1,\ \pm\varkappa_2,\ \cdots\ \pm\varkappa_\nu}$$

›inander überdecken.

Zufolge der in der Nr. 285 (S. 101, 102) für die als Verschiebungen charakterisirten projectiven Substitutionen zusammengestellten Sätze iind die Seiten $s'_\varkappa$ von F_0 schon von selbst Kreise, die den Orthogonal- creis O unter rechtem Winkel schneiden, sofern die Seiten $s_\varkappa$ als iolche Kreise angenommen werden. Ferner liegt der Bereich F_0 ganz nnerhalb von O, es werden folglich auch alle mit demselben con- ;ruenten Bereiche

$$F_{\pm\varkappa_1,\ \pm\varkappa_2,\ \cdots\ \pm\varkappa_\nu}$$

nnerhalb O liegen und von Kreisen, die den Orthogonalkreis senkrecht ›chneiden, begrenzt werden.

Hiernach lässt sich der Discontinuitätsbeweis für die Gruppe ϑ in lem Falle, wo alle Substitutionen

$$A_1,\ A_2,\ \cdots\ A_\sigma,\ A_{\sigma+1}$$

›arabolische und demnach alle Winkel von F_0 gleich Null sind, in ;enau derselben Weise führen, wie im Falle der Modulfunction (Nr. 272, 3. 50).

In der That theilen die Seiten von F_0 das Innere von O in $\,!\sigma + 1$ Bereiche, nämlich F_0 selbst und die 2σ sichelförmigen Gebiete .wischen O und den 2σ Seiten von F_0. Der Bereich $F_{\pm\varkappa}$, der mit F_0 längs der Seite $s_\varkappa$, beziehungsweise $s'_\varkappa$ zusammenhängt, befindet sich lann ganz innerhalb der von dieser Seite und der Peripherie von O begrenzten Sichel. Gehen wir von $F_{\pm\varkappa}$ zu einem benachbarten Bereiche

$$F_{\pm\varkappa,\ \pm\iota}$$

iber und fahren so fort, so werden wir, wenn auf diese Weise eine ;ewisse Anzahl von Bereichen

$$F_{\pm\varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \cdots\ \pm\varkappa_\nu} \tag{6}$$

onstruirt worden ist, das Innere von O in eine Anzahl von Par- ellen zerlegt haben, nämlich in die construirten Bereiche einerseits nd die von den freien Seiten derselben und der Peripherie von O be- renzten Sicheln $\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{C}_2,\ \cdots$ andererseits.

Construiren wir nun weiter den mit einem der äussersten Be- eiche (6) längs einer freien Seite zusammenhängenden Bereich, so liegt erselbe ganz innerhalb der von jener freien Seite begrenzten Sichel, s ist folglich nicht möglich, dass von den mit F_0 congruenten Be- eichen zwei sich gegenseitig überdecken.

In dem allgemeinen Falle, wo einige der Substitutionen

$$A_1,\ A_2,\ \cdots\ A_\sigma,\ A_{\sigma+1}$$

oder auch alle diese Substitutionen elliptische sind, hat man das für die Dreiecksfunctionen in den Nummern 286, 287 benutzte Beweisverfahren anzuwenden. In der That wurde dasselbe a. a. O. so gefasst, dass es ohne weiteres auf den jetzt vorliegenden allgemeinen Fall anwendbar bleibt, man hat nur auf S. 109 (Zeile 10 v. u.) an die Stelle der dort in Betracht kommenden drei Substitutionen A_1, A_2, A_3 die $\sigma + 1$ Substitutionen

$$A_1,\ A_2,\ \cdots\ A_{\sigma+1}$$

zu setzen.

Dieses Beweisverfahren lehrt uns zugleich, dass die von der Gesammtheit der Bereiche

$$F_{\pm\varkappa_1,\ \pm\varkappa_2,\ \cdots\ \pm\varkappa_\nu}$$

gebildete Fläche F das Innere des Orthogonalkreises nicht nur einfach, sondern auch lückenlos bedeckt und ferner, dass wenn wir statt von F_0 von dem ausserhalb O liegenden Spiegelbilde von F_0 ausgegangen wären, die Bereiche, die aus diesem Spiegelbilde durch die Substitutionen von ϑ hervorgehen, das Äussere von O einfach und lückenlos bedeckt haben würden.

Die durch F_0 bestimmte Gruppe ϑ ist also für zwei Continua von Punkten, nämlich für alle Punkte innerhalb und für alle Punkte ausserhalb von O eigentlich discontinuirlich, die Peripherie von O dagegen ist überall dicht besetzt von den Doppelpunkten der parabolischen und hyperbolischen Substitutionen der Gruppe ϑ.

305. Fuchs'sche Functionen. Die Fuchs'schen Thetareihen von Poincaré. Erster Ansatz zum Convergenzbeweise.

Der in den Nummern 213, 214 (Bd. II, 1, S. 327) gelieferte Existenzbeweis lehrt nun sofort, dass es Functionen $\mathfrak{X}$ von η giebt, die sich innerhalb F_0 wie rationale Functionen verhalten und bei den Substitutionen der Fuchs'schen Gruppe ϑ ungeändert bleiben. Wir nennen diese Functionen nach Herrn Poincaré Fuchs'sche Functionen von η. Dieselben sind (Nr. 216, Bd. II, 1, S. 345) eindeutige Functionen von η, die nur innerhalb der Fläche F, d. h. im Innern des Orthogonalkreises O existiren; sie lassen sich durch eine derselben, z, die innerhalb F_0 jeden Werth nur einmal annimmt, rational darstellen, und η ist als Function von z betrachtet der Integralquotient einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form (1).

Venn wir die Function z dadurch fixiren, dass sie für

$$\eta = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{\sigma+1}$$

ıngsweise die Werthe

$$z = 0, 1, \infty$$

ıen soll, so sind die übrigen singulären Stellen $a_3, a_4, \cdots a_\sigma$), die den Punkten

$$\eta = \lambda_3, \lambda_4, \cdots \lambda_\sigma$$

ıchen, ebenso wie die übrigen in $q(z)$ enthaltenen Parameter ein- bestimmt.

Vir wollen nun eine Darstellung der Fuchs'schen Functionen . lernen, die uns zugleich einen neuen Beweis für die Existenz · Functionen, die zu einer Fuchs'schen Gruppe ϑ gehören, lie- ird. Diese Darstellung wird uns die Fuchs'schen Functionen otienten zweier nach demselben Gesetze gebildeter unendlicher liefern, ähnlich wie man z. B. in der Theorie der ellipti- Functionen die eindeutigen doppeltperiodischen Functionen als nten von Thetareihen darstellt. Die elliptischen ebensowohl, wie der Theorie der Abel'schen Functionen auftretenden Abel'schen eihen sind dadurch ausgezeichnet, dass ihr Verhalten bei Ver- ıg ihrer Argumente um Perioden aus ihrem Bildungsgesetze un- ıar ersichtlich ist. Einer analogen Eigenschaft erfreuen sich die rstellung der Fuchs'schen Functionen dienenden Reihenentwicke- , die deshalb von ihrem Entdecker, Herrn Poincaré, als 'sche Thetareihen (séries théta-fuchsiennes) bezeichnet wor- ıd.

.ese Thetareihen sind einfache Bildungen, die symmetrisch sind ıg auf alle Substitutionen der Fuchs'schen Gruppe ϑ.

ədeute $H(\eta)$ irgend eine rationale Function von η, die an keiner r Peripherie des Orthogonalkreises gelegenen Stelle unendlich ınd sei m irgend eine ganze Zahl, die grösser ist als Eins. Be- ın wir ferner durch

$$S_\nu \eta = \frac{\alpha_\nu \eta + \beta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}, \quad \alpha_\nu \delta_\nu - \beta_\nu \gamma_\nu = 1, \quad (\nu = 0, 1, 2, 3, \cdots),$$

irgend einer Reihenfolge genommenen Substitutionen der 'schen Gruppe ϑ, so ist

$$\Theta(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} H\left(\frac{\alpha_\nu \eta + \beta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right) \frac{1}{(\gamma_\nu \eta + \delta_\nu)^{2m}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} H(S_\nu \eta) \left(\frac{d S_\nu \eta}{d \eta}\right)^m$$

gemeine Form einer Fuchs'schen Thetareihe.

Das Verhalten dieser Reihe bei Anwendung einer Substitution $S_\varkappa$ auf η ergiebt sich unmittelbar. In der That haben wir

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} H(S_\nu S_\varkappa \eta)\left(\frac{dS_\nu S_\varkappa \eta}{dS_\varkappa \eta}\right)^m = \sum_{\nu=0}^{\infty} H(S_\nu S_\varkappa \eta)\left(\frac{dS_\nu S_\varkappa \eta}{d\eta}\right)^m \left(\frac{d\eta}{dS_\varkappa \eta}\right)^m.$$

Wenn S_ν für $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ die Gesammtheit aller Substitutionen der Gruppe ϑ darstellt, so gilt zufolge der Gruppeneigenschaft das Gleiche von den Substitutionen

$$S_\nu S_\varkappa \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots);$$

es ist folglich

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} H(S_\nu S_\varkappa \eta)\left(\frac{dS_\nu S_\varkappa \eta}{d\eta}\right)^m = \sum_{\nu=0}^{\infty} H(S_\nu \eta)\left(\frac{dS_\nu \eta}{d\eta}\right)^m,$$

d. h. wir haben die wichtige Gleichung

$$\Theta(S_\varkappa \eta) = \left(\frac{d\eta}{dS_\varkappa \eta}\right)^m \Theta(\eta) = (\gamma_\varkappa \eta + \delta_\varkappa)^{2m}\Theta(\eta). \tag{9}$$

Die Convergenz der Thetareihen vorausgesetzt, lassen sich auch leicht eindeutige Functionen herstellen, die zur Gruppe ϑ gehören. Bilden wir nämlich zwei Thetareihen $\Theta_1(\eta)$, $\Theta_2(\eta)$, die zu denselben Werthe von m gehören, so ist der Quotient

$$\frac{\Theta_2(\eta)}{\Theta_1(\eta)} = f(\eta)$$

zufolge der Gleichung (9) eine eindeutige Function von η, die bei den Substitutionen der Gruppe ϑ ungeändert bleibt.

Es handelt sich nun darum, die Convergenz der Reihe (8) zu erweisen; hierfür hat Herr Poincaré zwei verschiedene Methoden angegeben, deren jede ihre eigenthümlichen Vorzüge darbietet. Wir wollen darum beide hier darlegen.

Beiden Methoden gemeinsam ist der Nachweis, dass die Convergenz der Reihe (8) aus der Convergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{dS_\nu \eta}{d\eta}\right|^m = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right|^{2m} \tag{10}$$

folgt. Dieser Nachweis lässt sich sofort erbringen.

In der That, bedeute η einen Werth, der weder eine Unendlichkeitsstelle der rationalen Function $H(\eta)$ ist, noch mit einem solchen Werthe correspondirt, dann ist für dieses η

$$H(S_\nu \eta) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

stets endlich. Wir können also eine positive Grösse M so angeben, dass

$$|H(S_\nu \eta)| < M, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots);$$

n ist aber

$$\left| H(S_\nu \eta) \left(\frac{d S_\nu \eta}{d\eta}\right)^m \right| < \frac{M}{|\gamma_\nu \eta + \delta_\nu|^{2m}},$$

ı. der absolute Betrag jedes Gliedes der Reihe (8) ist kleiner, als entsprechende Glied der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{M}{|\gamma_\nu \eta + \delta_\nu|^{2m}},$$

convergirt in der That für diejenigen Werthe η, die nicht zu den geschlossenen gehören und für welche die Reihe (10) convergent ist, Reihe (8) ebenfalls, und zwar unbedingt.

306. Der erste Poincaré'sche Convergenzbeweis.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der Convergenz der he (10) und befolgen zuvörderst die erste Poincaré'sche Methode. Es möge, wie auch zumeist im Folgenden, der Orthogonalkreis der Einheitskreis der η-Ebene

$$\eta \bar{\eta} = 1$$

genommen werden. Zwei Punkte a und a^0, die Spiegelbilder von ander in Bezug auf den Einheitskreis sind, wollen wir schlechthin harmonische Werthe bezeichnen; es ist dann

$$a^0 = \frac{1}{\bar{a}}.$$

Wenn ein Punkt ζ durch eine Verschiebung A in

$$\zeta_1 = A\zeta$$

ergeht, so verwandelt sich der zu ζ harmonische Punkt ζ^0 offenbar ch dieselbe Substitution in den harmonischen Punkt von ζ_1

$$\zeta_1^0 = A\zeta^0.$$

Wir können, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, voraussetzen, s der Nullpunkt $\eta = 0$ der η-Ebene innerhalb des Fundamental-eiches der Fuchs'schen Gruppe ϑ gelegen sei. Beschreiben wir n um den Punkt $\eta = 0$ einen Kreis, der ganz innerhalb von F_0 t, so ist der Radius ϱ dieses Kreises ein endlicher, von Null ver-iedener Werth. Für jeden mit $\eta = 0$ correspondirenden Punkt, der $\eta = 0$ durch eine Substitution S_ν der Gruppe ϑ hervorgeht, ist n offenbar, wenn wir $S_0 \eta = \eta$ nehmen,

$$(11) \qquad 1 > |S_\nu(0)| = \left|\frac{\beta_\nu}{\delta_\nu}\right| > \varrho, \qquad (\nu=1, 2, 3 \cdots),$$

da diese Punkte sämmtlich innerhalb des Einheitskreises liegen müssen.

Der zu $\eta = 0$ harmonische Werth ist $\eta = \infty$; die demselben entsprechenden Werthe sind folglich harmonisch zu den Punkten

$$\frac{\beta_\nu}{\delta_\nu} \qquad (\nu=1, 2, 3, 4, \cdots),$$

d. h. es ist

$$(12) \qquad \frac{\bar{\delta}_\nu}{\bar{\beta}_\nu} = \frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu}.$$

Da die Gesammtheit der Substitutionen S_ν mit der Gesammtheit der inversen Substitutionen

$$S_\nu^{-1} = \begin{pmatrix} -\delta_\nu & \beta_\nu \\ \gamma_\nu & -\alpha_\nu \end{pmatrix}$$

identisch ist, so können wir die dem $\eta = \infty$ entsprechenden Punkte auch in der Form

$$\frac{-\delta_\nu}{\gamma_\nu} \qquad (\nu=1, 2, 3, 4, \cdots)$$

darstellen. Es ist dann nach (11) und (12)

$$(13) \qquad 1 < \left|\frac{-\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right| < \frac{1}{\varrho} \qquad (\nu=1, 2, 3, 4, \cdots).$$

Nun ist aber

$$(14) \qquad \left|\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right| = \left|\frac{1}{\gamma_\nu\eta + \delta_\nu}\right|^2 = \frac{1}{|\gamma_\nu|^2}\,\frac{1}{\left|\eta + \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right|^2},$$

und der Ausdruck

$$\left|\eta + \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right|$$

ist offenbar nichts anderes, wie der Abstand des Punktes η vom Punkte

$$\frac{-\delta_\nu}{\gamma_\nu};$$

wir haben folglich, wenn η innerhalb des Einheitskreises liegt,

$$\left|\frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right| - |\eta| < \left|\eta + \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right| < |\eta| + \left|\frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right| \qquad (\nu=1, 2, 3, \cdots),$$

also nach (14) und (13)

$$(15) \qquad \frac{1}{|\gamma_\nu|^2}\,\frac{1}{(1-|\eta|)^2} > \left|\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right| > \frac{1}{|\gamma_\nu|^2}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{\varrho} + |\eta|\right)^2} \qquad (\nu=1, 2, 3, 4, \cdots).$$

Sei η ein innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 gelegener Punkt, und denken wir uns nun um diesen Punkt herum einen kleinen, ganz innerhalb F_0 befindlichen Bereich C_0 abgegrenzt. Der aus C_0 durch die Substitution S_ν hervorgehende Bereich C_ν liegt dann innerhalb des Bereiches

$$F_\nu = S_\nu F_0$$

und umgiebt den Punkt

$$S_\nu \eta.$$

Da die Bereiche

$$C_0, C_1, C_2, C_3, \cdots$$

sämmtlich innerhalb des Einheitskreises liegen und überdies zufolge der Discontinuität der Gruppe $\mathfrak{G}$ sich nicht gegenseitig überdecken können, ist die Summe ihrer Flächeninhalte

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu$$

eine endliche Grösse, nämlich kleiner wie der Flächeninhalt π des Einheitskreises.

Setzen wir nun, wie in der Nr. 283 (S. 95)

$$\eta = p + qi,$$

so ist der Flächeninhalt von C_0 in der Form

$$C_0 = \iint\limits_{(C_0)} dp\, dq$$

darstellbar. Ebenso ist, wenn

$$S_\nu \eta = p_\nu + iq_\nu$$

gesetzt wird,

$$C_\nu = \iint\limits_{(C_\nu)} dp_\nu\, dq_\nu,$$

also, wenn wir p, q als neue Integrationsvariablen einführen,

$$C_\nu = \iint\limits_{(C_0)} \left(\frac{\partial p_\nu}{\partial p}\frac{\partial q_\nu}{\partial q} - \frac{\partial p_\nu}{\partial q}\frac{\partial q_\nu}{\partial p}\right) dp\, dq,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (X) der Nr. 285 (S. 100)

$$(16) \qquad C_\nu = \iint\limits_{(C_0)} \left|\frac{d S_\nu \eta}{d\eta}\right|^2 dp\, dq.$$

Sei nun, wenn η innerhalb des Bereiches C_0 verbleibt,

$$A > |\eta|,$$

dann ist nach (15) innerhalb C_0

$$\frac{1}{|\gamma_\nu|^2}\,\frac{1}{(1-A)^2} > \left|\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right| > \frac{1}{|\gamma_\nu|^2}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{\varrho}+A\right)^2}.$$

eichnen wir also mit M_ν den grössten, mit m_ν den kleinsten
erth, den $\left|\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right|$

nzunehmen vermag, wenn η innerhalb C_0 verbleibt, so ist

$$M < \frac{1}{|\gamma_\nu|^2}\,\frac{1}{(1-A)^2},$$

$$m_\nu > \frac{1}{|\gamma_\nu|^2}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{\varrho}+A\right)^2},$$

und folglich

(17) $$\frac{M_\nu}{m_\nu} < \frac{\left(\frac{1}{\varrho}+A\right)^2}{(1-A)^2} = K \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo K eine von ν unabhängige Grösse bedeutet.

Nach (16) ist aber

$$C_\nu > \iint\limits_{(C_0)} m_\nu^2\, dp\, dq = m_\nu^2\, C_0,$$

also haben wir, da nach (17)

$$m_\nu > \frac{M_\nu}{K}$$

ist, a potiori

$$C_\nu > \frac{M_\nu^2}{K^2}\, C_0,$$

und folglich

$$M_\nu^2 < K^2\, \frac{C_\nu}{C_0}.$$

Betrachten wir nun zuvörderst die unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty}|\gamma_\nu\eta+\delta_\nu|^{-4},$$

so ist die Summe derselben für Werthe von η, die innerh
kleiner als

$$\sum_\nu M_\nu^2 < \frac{K^2}{C_0}\sum_\nu C_\nu,$$

also, da die Summe der C_ν einen endlichen Werth h
ein bestimmter endlicher Werth. D. h. die Reihe

(18) $$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right|^2$$

convergirt, wenn η innerhalb C_0 verbleibt.

Bezeichnen wir die Summe dieser Reihe (18) für einen Augenblick mit S, so ist offenbar

$$\left|\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right| < S^{\frac{1}{2}},$$

also für $m > 2$

$$\left|\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right|^m < S^{\frac{m-2}{2}}\left|\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right|^2,$$

d. h. jedes Glied der Reihe (10) ist kleiner, als das entsprechende Glied der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} S^{\frac{m-2}{2}}\left|\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right|^2,$$

deren Convergenz feststeht. Also convergirt die Reihe (10) allemal, wenn η innerhalb C_0 verbleibt, und zwar unbedingt und gleichmässig.

Nun können wir C_0 so lange erweitern, bis es den ganzen Fundamentalbereich F_0 erfüllt. Ferner können wir jeden der mit F_0 congruenten Bereiche

$$F_\nu = S_\nu F_0$$

ebenso gut wie F_0 selbst als Fundamentalbereich ansehen; die Reihe (10) ist also für $m > 1$ innerhalb des Einheitskreises convergent.

Sei nun η ein Punkt ausserhalb des Einheitskreises, der mit keinem der dem $\eta = \infty$ entsprechenden Punkte zusammenfällt. Dann ist für den harmonischen, also innerhalb des Einheitskreises gelegenen Punkt η^0 die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{dS_\nu\eta^0}{d\eta^0}\right|^m = \sum_{\nu=0}^{\infty}|\gamma_\nu\eta^0+\delta_\nu|^{-2m}$$

convergent.

Da η mit keinem der Punkte $\frac{-\delta_\nu}{\gamma_\nu}$ zusammenfällt, ist stets

$$\left|\eta+\frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right| > r,$$

wo r eine bestimmte, von Null verschiedene Grösse bedeutet; ferner haben wir, wie früher gefunden wurde, für den innerhalb des Einheitskreises gelegenen Punkt η^0

$$\left|\eta^0+\frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right| < |\eta^0| + \left|\frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right|,$$

d. h. mit Rücksicht auf (13)

$$\left|\eta^0 + \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right| < 1 + \frac{1}{\varrho}.$$

Es ist folglich

$$\left|\frac{\gamma_\nu \eta^0 + \delta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right| = \left|\frac{\eta^0 + \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}}{\eta + \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}}\right| < \frac{\frac{1}{\varrho} + 1}{r},$$

d. h. jedes Glied

$$|\gamma_\nu \eta + \delta_\nu|^{-2m}$$

der Reihe (10) ist für ein ausserhalb des Einheitskreises und in end[illegible]d-lichem Abstande von den Punkten $-\frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}$ gelegenes η kleiner, als da[illegible]a entsprechende Glied der convergenten Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\varrho+1}{r\varrho}\right)^{-2m} |\gamma_\nu \eta^0 + \delta_\nu|^{-2m},$$

d. h. wir haben das Resultat:

Die Reihe (10) convergirt für alle innerhalb des Ein[illegible]in-heitskreises befindlichen Stellen η und für diejenigen ausser[illegible]er-halb des Einheitskreises befindlichen, die von den aus $\eta = $[illegible]$\infty$ durch die Substitutionen der Gruppe ϑ hervorgehende[illegible]en Punkten in endlichem Abstande liegen.

Damit ist denn auch die Convergenz der Fuchs'schen Thetareihe ([illegible]8) erwiesen.

307. Tragweite des ersten Convergenzbeweises. Erster Theil [illegible] zweiten Poincaré'schen Convergenzbeweises.

Dieser erste Convergenzbeweis beruht auf einem Princip, w[illegible]l-ches eine ähnliche Anwendung für eine grosse Classe von discontinu[illegible]r-lichen Gruppen gestattet. Und zwar nicht nur für solche Gruppen v[illegible]n projectiven Substitutionen einer veränderlichen Grösse, sondern ein[illegible]r-seits auch für discontinuirliche Gruppen von projectiven Substitutio[illegible]en in mehreren veränderlichen Grössen, andererseits für discontinuirli[illegible]he Gruppen von nicht projectiven Transformationen.

Hat man z. B. eine discontinuirliche Gruppe von projectiven S[illegible]b-stitutionen in zwei Variabeln η, ζ

$$\eta_\nu = \frac{\alpha_2^{(\nu)} + \beta_2^{(\nu)}\eta + \gamma_2^{(\nu)}\zeta}{\alpha_1^{(\nu)} + \beta_1^{(\nu)}\eta + \gamma_1^{(\nu)}\zeta}, \quad \zeta_\nu = \frac{\alpha_3^{(\nu)} + \beta_3^{(\nu)}\eta + \gamma_3^{(\nu)}\zeta}{\alpha_1^{(\nu)} + \beta_1^{(\nu)}\eta + \gamma_1^{(\nu)}\zeta} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

oselbst

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{(\nu)} \alpha_2^{(\nu)} \alpha_3^{(\nu)} \\ \beta_1^{(\nu)} \beta_2^{(\nu)} \beta_3^{(\nu)} \\ \gamma_1^{(\nu)} \gamma_2^{(\nu)} \gamma_3^{(\nu)} \end{vmatrix} = 1,$$

ı kann man unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen mit ülfe desselben Princips, welches bei dem eben dargelegten Beweise ır Anwendung gelangt ist, die Convergenz einer Reihe von der Form

$$(\eta,\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} H\left(\frac{\alpha_2^{(\nu)} + \beta_2^{(\nu)}\eta + \gamma_2^{(\nu)}\zeta}{\alpha_1^{(\nu)} + \beta_1^{(\nu)}\eta + \gamma_1^{(\nu)}\zeta}, \frac{\alpha_3^{(\nu)} + \beta_3^{(\nu)}\eta + \gamma_3^{(\nu)}\zeta}{\alpha_1^{(\nu)} + \beta_1^{(\nu)}\eta + \gamma_1^{(\nu)}\zeta}\right) \frac{1}{(\alpha_1^{(\nu)} + \beta_1^{(\nu)}\eta + \gamma_1^{(\nu)}\zeta)^{3m}}$$

weisen, wo H den Algorithmus einer rationalen Function, m eine ınze Zahl grösser als Eins bedeutet. Diese Reihe hat dann offenbar e Eigenschaft, dass, bei Anwendung einer beliebigen Substitution der ruppe,

$$\Theta(\eta_\varkappa, \zeta_\varkappa) = (\alpha_1^{(\varkappa)} + \beta_1^{(\varkappa)}\eta + \gamma_1^{(\varkappa)}\zeta)^{3m}\,\Theta(\eta, \zeta)$$

ird. Das Analoge gilt natürlich für beliebig viele Variable.

Durch Quotientenbildung können wir von diesen allgemeinen eihen zu eindeutigen Functionen der beiden veränderlichen Grössen ζ übergehen, die bei den Substitutionen der vorgelegten disconti-ıirlichen Gruppe ungeändert bleiben; die Wichtigkeit solcher Func-ınen für die Theorie der linearen Differentialgleichungen dritter und tsprechend höherer Ordnung ist nach den Erörterungen der Nummer 5 (Bd. II, 1, S. 289 ff.) ohne Weiteres einleuchtend. Einige beson-re Fälle solcher Functionen hat Herr Picard untersucht, einer all-meinen Theorie derselben scheinen sich aber noch bedeutende Schwie-ʒkeiten entgegenzustellen.

Während so der „erste Convergenzbeweis" seiner allgemeinen prin-ɔiellen Grundlage wegen besonderes Interesse beansprucht, hat der weite Poincaré'sche Convergenzbeweis", zu dessen Darlegung wir jetzt ergehen, unmittelbar nur für Fuchs'sche Gruppen Bedeutung, führt er gerade dadurch, dass er auf die besondere Beschaffenheit dieser uppen Rücksicht nimmt, viel tiefer in die Natur dieser Gruppen d der bei denselben unveränderlichen Functionen hinein, als der erste.

Dieser zweite Convergenzbeweis stützt sich wesentlich auf die tur der Substitutionen der Gruppe ϑ als Verschiebungen, es d daher zweckmässig sein, wenn wir jetzt wieder die Fläche von stantem Krümmungsmaasse heranziehen, die wir in den Nummern —385 (S. 93 ff.) eingeführt und angewandt haben.

Da wir den Einheitskreis

$$\eta\bar{\eta} - 1 = 0$$

als Orthogonalkreis gewählt haben, so ist nach den in der Nr. 285 (S. 101) zusammengestellten Bezeichnungen die superficielle Länge einer zwischen zwei Punkten η_1, η_2 erstreckten Curve $\mathfrak{E}$ gleich

$$(19) \qquad 2\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{1 - \eta\bar{\eta}}$$

zu nehmen, da ja η stets innerhalb des Einheitskreises liegen muss, so dass also

$$1 - \eta\bar{\eta} \geqq 0$$

ist. Der superficielle Inhalt einer, von einer geschlossenen Curve C begrenzten Figur ist gleich

$$(20) \qquad 4\int\!\!\int_{(C)} \frac{dp\,dq}{(1 - \eta\bar{\eta})^2},$$

und, wenn wir statt der Coordinaten p, q die ebenen Polarcoordinaten ϱ, φ einführen, für welche

$$(21) \qquad \begin{cases} p = \varrho\cos\varphi, \\ q = \varrho\sin\varphi \end{cases}$$

ist, so erhalten wir das Doppelintegral (20) in der Form

$$(20\text{a}) \qquad 4\int\!\!\int \frac{\varrho\,d\varrho\,d\varphi}{(1 - \varrho^2)^2}.$$

Einem Kreise C_0 in der η-Ebene, dessen Mittelpunkt der Punkt $\eta = 0$ und dessen Radius gleich ϱ_0 ist, entspricht auf der Fläche vom constanten Krümmungsmaasse -1 eine Curve, deren Punkte nach den Formeln der Nr. 284 (S. 98) von den Punkten $p = 0$, $q = 0$ den constanten geodätischen Abstand

$$(22) \qquad r_0 = 2\int_0^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{1 - \varrho^2} = \log\frac{1 + \varrho_0}{1 - \varrho_0}$$

besitzen. Wir wollen diese Grösse r_0 den superficiellen Radius des in der η-Ebene gezeichneten Kreises C_0 nennen. Der superficielle Inhalt dieses Kreises ergiebt sich nach (20a) gleich

$$s_0 = 4\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\varrho_0} \frac{\varrho\,d\varrho}{(1 - \varrho^2)^2} = \frac{4\pi\varrho_0^2}{1 - \varrho_0^2}.$$

Führen wir in diesen Ausdruck den superficiellen Radius r_0 ein, durch welchen sich ϱ_0 in der Form

23) $$\varrho_0 = \frac{e^{r_0} - 1}{e^{r_0} + 1}$$

larstellt (vergl. Gleichung (13) der Nr. 285, S. 99), so erhalten wir

$$s_0 = \pi(e^{r_0} + e^{-r_0} - 2).$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Anzahl derjenigen Punkte :u ermitteln, die aus einem innerhalb F_0 gelegenen Punkte η durch lie Substitutionen der Gruppe ϑ hervorgehen und sämmtlich innerhalb les Kreises C_0 liegen.

Grenzen wir um den Punkt η herum einen ganz innerhalb von F_0 befindlichen geschlossenen Bereich $\mathfrak{E}_0$ ab, und betrachten wie beim ersten Beweise die Gesammtheit der aus $\mathfrak{E}_0$ durch die Substitutionen

$$S_\nu \eta = \frac{\alpha_\nu \eta + \beta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4, \cdots)$$

ler Gruppe ϑ hervorgehenden Bereiche $\mathfrak{E}_\nu$, so sind diese sämmtlich unter einander congruent (im Sinne der Nr. 285, S. 101) und haben folglich denselben superficiellen Inhalt Σ.

Denken wir uns die Bereiche $\mathfrak{E}_\nu$ für $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ auf die Fläche vom constanten Krümmungsmaasse -1 übertragen, so wird der geodätische Abstand irgend zweier Punkte der Begrenzung von $\mathfrak{E}_0$ eine gewisse bere Grenze $\mathfrak{L}$ nicht überschreiten können; wegen der Congruenz aller $\mathfrak{E}_\nu$ mit $\mathfrak{E}_0$ hat die Grösse $\mathfrak{L}$ für alle $\mathfrak{E}_\nu$ dieselbe Bedeutung wie für $\mathfrak{E}_0$.

Wenn nun der Punkt $S_\nu \eta$ innerhalb des Kreises C_0 liegt, so kann er diesen Punkt umgebende Bereich $\mathfrak{E}_\nu$ über C_0 hinausgreifen. Beschreiben wir aber einen mit C_0 concentrischen Kreis C_0', dessen superieller Radius gleich $r_0 + \mathfrak{L}$ ist, so muss der Bereich $\mathfrak{E}_\nu$ jedenfalls anz innerhalb C_0' liegen.

Sei also N die Anzahl der innerhalb C_0 gelegenen Punkte $S_\nu \eta$, liegen mindestens N der Bereiche $\mathfrak{E}_\nu$ innerhalb des Kreises C_0'. Die umme der superficiellen Inhalte dieser N Bereiche $\mathfrak{E}_\nu$ ist gleich

$$N\Sigma,$$

ese Summe muss also jedenfalls kleiner sein, wie der superficielle Inhalt

$$\pi(e^{r_0 + \mathfrak{L}} + e^{-r_0 - \mathfrak{L}} - 2)$$

s Kreises C_0'. Wir haben demnach die Ungleichung

4) $$N < \frac{\pi}{\Sigma}(e^{r_0 + \mathfrak{L}} + e^{-r_0 - \mathfrak{L}} - 2);$$

h.:

Betrachten wir die Gesammtheit der Punkte, die aus nem innerhalb des Bereiches $\mathfrak{E}_0$ gelegenen η-Werthe durch

die Substitutionen der Gruppe ϑ hervorgehen, und die sich im Innern eines Kreises C_0 mit dem Mittelpunkte $\eta = 0$ und dem superficiellen Radius r_0 befinden, so genügt die Anzahl N dieser Punkte der Ungleichung (24), wo Σ den superficiellen Inhalt des Bereiches $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{L}$ das Maximum des geodätischen Abstandes zweier Punkte der Begrenzung von $\mathfrak{C}_0$ von einander bedeutet.

308. Zweiter Theil des zweiten Convergenzbeweises. Typen von holoedrisch isomorphen Fuchs'schen Gruppen.

Sei nun a der auf der Fläche von constantem Krümmungsmaasse gemessene geodätische Abstand des Punktes η vom Punkte $\eta = 0$, d. h. also der superficielle Radius des durch den Punkt η gelegten, mit dem Einheitskreise concentrischen Kreises, dann ist nach (23)

$$|\eta| = \frac{e^a - 1}{e^a + 1}. \tag{25}$$

Sei ebenso r' der geodätische Abstand des Punktes

$$S_\varkappa \eta = \frac{\alpha_\varkappa \eta + \beta_\varkappa}{\gamma_\varkappa \eta + \delta_\varkappa}$$

vom Punkte $\eta = 0$, so ist auch

$$|S_\varkappa \eta| = \frac{e^{r'} - 1}{e^{r'} + 1}. \tag{26}$$

Zufolge der Gleichung (VIII) der Nr. 282 (S. 89) haben wir aber

$$(\gamma_\varkappa \eta + \delta_\varkappa)(\bar\gamma_\varkappa \bar\eta + \bar\delta_\varkappa)[1 - |S_\varkappa \eta|^2] = 1 - |\eta|^2,$$

also

$$\left| \frac{1}{\gamma_\varkappa \eta + \delta_\varkappa} \right|^2 = \frac{1 - |S_\varkappa \eta|^2}{1 - |\eta|^2},$$

d. h. es ist mit Rücksicht auf (25), (26)

$$\left| \frac{1}{\gamma_\varkappa \eta + \delta_\varkappa} \right|^2 = \frac{e^a + e^{-a} + 2}{e^{r'} + e^{-r'} + 2}. \tag{27}$$

Denken wir uns nun eine unendliche Reihe mit dem Einheitskreise concentrischer Kreise

$$C_1, C_2, C_3, \cdots$$

gelegt, deren superficielle Radien in arithmetischer Progression wachsen; möge etwa r der superficielle Radius von C_1 sein, so dass also nr den superficiellen Radius des Kreises C_n darstellt.

Sei U_n die Summe derjenigen Terme der Reihe (10)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{dS_\nu \eta}{d\eta} \right|^m,$$

ür welche die entsprechenden Punkte $S_\nu \eta$ innerhalb des von den Kreisen C_{n-1} und C_n begrenzten Ringes liegen, so können wir die Reihe (10) in der Form

(10a) $$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots$$

schreiben, und die Convergenz der Reihe (10a) zieht ohne Weiteres lie Convergenz von (10) nach sich, da ja die letztere Reihe aus lauter positiven Gliedern besteht.

Zufolge des in der Ungleichung (24) ausgedrückten Satzes ist die Anzahl der in U_n enthaltenen Glieder jedenfalls kleiner wie

$$\frac{\pi}{\Sigma}\left(e^{nr+2} + e^{-nr-2} - 2\right) < \frac{\pi}{\Sigma} e^{nr+2}.$$

Jedes dieser Glieder ist gemäss der Gleichung (27) kleiner, wie

$$\left[\frac{e^a + e^{-a} + 2}{e^{(n-1)r} + e^{-(n-1)r} + 2}\right]^m < \left[\frac{e^a + e^{-a} + 2}{e^{(n-1)r}}\right]^m,$$

ir haben folglich

$$U_n < \frac{\pi}{\Sigma}\left(e^a + e^{-a} + 2\right)^m e^{2+mr} e^{-n(m-1)r}.$$

Setzen wir also

(28) $$\frac{\pi}{\Sigma}\left(e^a + e^{-a} + 2\right)^m e^{2+mr} = K,$$

ist

(29) $$U_n < \frac{K}{e^{n(m-1)r}}.$$

Da $m > 1$ ist, so convergirt die geometrische Progression

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{e^{n(m-1)r}},$$

e Reihe (10a) ist demnach ebenfalls convergent.

Bricht man die Reihe (10a) bei dem Gliede U_{n-1} ab, d. h. beachtet man die Summe derjenigen Terme, die innerhalb des Kreises $_{-1}$ gelegenen Punkten $S_\nu \eta$ entsprechen, so ist der Rest der Reihe eich

$$U_n + U_{n+1} + \cdots,$$

lso nach (29) kleiner wie

(30) $$\frac{K e^{n(m-1)r}}{1 - e^{(m-1)r}}.$$

Die weiteren Schlüsse, die zu dem Convergenzsatze für die Theta-reihe (8) führen, sind nun dieselben wie beim ersten Beweise.

Um die tieferen Consequenzen, die sich aus dem zweiten Convergenzbeweise ziehen lassen, darlegen zu können, müssen wir einige Bemerkungen über die Abhängigkeit einer Fuchs'schen Gruppe ϑ von den dieselbe bestimmenden Parametern vorausschicken.

Betrachten wir die Basis

$$(31) \qquad A_1,\ A_2,\ \cdots\ A_\sigma,\ A_{\sigma+1}$$

der Fuchs'schen Gruppe ϑ, so besteht zwischen diesen $(\sigma+1)$ Substitutionen die Relation.

$$(32) \qquad A_{\sigma+1} A_\sigma \cdots A_2 A_1 = 1.$$

Wenn überdies einige der Substitution (31), etwa

$$A_{e1},\ A_{e2},\ \cdots\ A_{e\mu},$$

elliptische Substitutionen sind, und für $A_{e\varkappa}$

$$\delta_{e\varkappa} = \frac{1}{g_{e\varkappa}}$$

die durch 2π dividirte Winkelsumme bei dem entsprechenden Cyklus von Ecken des Fundamentalbereiches F_0 darstellt, wo also die $g_{e\varkappa}$ endliche positive ganze Zahlen bedeuten, so bestehen noch die Relationen

$$(33) \qquad A_{e\varkappa}^{g_{e\varkappa}} = 1 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \mu).$$

Da die Relationen (32), (33) die einzigen sind, die zwischen den Elementen der Basis (31) der Gruppe ϑ bestehen, so lässt sich jede Relation, die zwischen irgend welchen Substitutionen dieser Gruppe stattfindet, aus den Relationen (32), (33) herleiten, wir nennen dieselben darum mit Herrn Poincaré die Fundamentalrelationen der Gruppe ϑ.

Mögen nun für eine zweite Fuchs'sche Gruppe ϑ' die Substitutionen

$$(34) \qquad A_1',\ A_2',\ \cdots\ A_\sigma',\ A_{\sigma+1}'$$

die analoge Bedeutung haben, wie die Substitutionen (31) für ϑ, dass also die Relation

$$A_{\sigma+1}' A_\sigma' \cdots A_2' A_1' = 1$$

befriedigt wird. Mögen ferner

$$A_{e1}',\ A_{e2}',\ \cdots\ A_{e\mu}'$$

die elliptischen unter den Substitutionen (34) darstellen, und seien lich die Zahlen $g_{e\varkappa}$ die kleinsten, für welche die Gleichungen

$$A'^{g_{e\varkappa}}_{e\varkappa} = 1 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \mu)$$

üllt sind, dann sind die beiden Gruppen ϑ und ϑ' offenbar iso-
›rph und zwar holoedrisch isomorph (Nr. 179, Bd. II, 1, S. 177),
wegen der Identität der Fundamentalrelationen in beiden Gruppen,
: identischen Substitution der einen Gruppe nur wieder die identische
bstitution der anderen entsprechen kann. Wir haben also den Satz:

Fuchs'sche Gruppen sind dann und nur dann holoedrisch
›morph, wenn ihre Fundamentalbereiche dieselbe Anzahl
n Cykeln und bei entprechenden Cykeln dieselben Winkel-
mmen besitzen.

Der Satz wurde so gefasst, dass die in demselben für den Fun-
nentalbereich einer Fuchs'schen Gruppe enthaltenen Bedingungen
erlaubten Abänderungen (Nr. 210, Bd. II, 1, S. 315) des Fun-
nentalbereiches erhalten bleiben.

Wir fassen alle mit einander holoedrisch isomorphen Fuchs'schen
ıppen in einen Typus zusammen; dann ist also ein solcher Typus
·ch Angabe der Zahl σ und der Zahlen

$$g_\varkappa = \frac{1}{\delta_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \overline{\sigma+1})$$

lkommen bestimmt.

Im Allgemeinen hängt die Gruppe ϑ von 3σ Parametern ab, als
.che wir z. B. die $2\sigma + 2$ Doppelpunkte der Substitutionen (31)
ı die $\sigma + 1$ Grössen

·) $$\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_\sigma, \delta_{\sigma+1}$$

hlen können; zwischen diesen $3\sigma + 3$ Grössen bestehen dann zufolge
: Gleichung (32) noch drei Relationen. Da aber ϑ eine Fuchs'sche
uppe sein sollte, die den Einheitskreis zum Orthogonalkreise hat, so
für jede Substitution $A_\varkappa$ durch Angabe des einen Doppelpunktes $\lambda_\varkappa$
r andere als sein harmonischer Werth schon mitgegeben, so dass
ıo nebst den $(\sigma + 1)$ Grössen (35) nur noch $(\sigma + 1)$ complexe
össen, zwischen denen noch drei Relationen bestehen, zur Verfügung
iben.

Fixiren wir die $(\sigma + 1)$ Grössen (35) dadurch, dass wir einen be-
ımten Typus T holoedrisch isomorpher Fuchs'scher Gruppen in's
ge fassen, so bleiben also noch $\sigma - 2$ complexe oder $2\sigma - 4$ reale
ameter zu unserer Verfügung. Diese Parameter haben, damit die
achtete Gruppe eine Fuchs'sche, d. h. also eine discontinuirliche
ähnlich wie in den beiden in der Nr. 304 (S. 170) betrachteten
pielen, auch allgemein gewisse Ungleichungen zu befriedigen.
ch diese Ungleichungen werden in dem Gebiete jener Parameter

gewisse continuirliche Gebilde bestimmt, und es entspricht dann jeder Stelle eines solchen continuirlichen Gebildes eine Fuchs'sche Gruppe, die dem betrachteten Typus T angehört.

Fassen wir eines dieser continuirlichen Gebilde in's Auge, so können wir uns $\mu \leq 2\sigma - 4$ Parameter so gewählt denken, dass diesem continuirlichen Gebilde ein (μ-fach ausgedehntes) Continuum im Gebiete dieser μ Parameter entspricht, und dass die Coefficienten der Substitutionen der Gruppe etwa als rationale Functionen derselben erscheinen; die so gewählten Parameter bezeichnen wir mit

$$u_1, u_2, \cdots u_\mu \qquad (\mu \leq 2\sigma - 4),$$

ferner sei $\mathfrak{C}$ jenes Continuum im Gebiete der veränderlichen Grössen $u_\varkappa$, welches so beschaffen ist, dass jeder Stelle desselben eine Fuchs'sche Gruppe unseres Typus entspricht.

309. Parameter eines Typus holoedrisch isomorpher Fuchs'scher Gruppen. Gleichmässige Convergenz der Thetareihe.

Es sei ϑ die Fuchs'sche Gruppe des Typus T, in welcher die Parameter $u_\varkappa$ unbestimmte, aber dem Continuum $\mathfrak{C}$ angehörige Werthe besitzen. Bilden wir dann die Reihen (8), (10), (10a), so sind die Glieder derselben rationale Functionen der realen Veränderlichen $u_\varkappa$; wir werden nun auf Grund des zweiten Convergenzbeweises nachweisen, dass diese Reihen, von denen feststeht, dass sie für jedes dem Continuum angehörige Werthesystem der $u_\varkappa$ convergiren, stetige Functionen dieser realen Variabeln sind.

Betrachten wir z. B. einen Punkt η, der innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 der Gruppe ϑ liegt. Lassen wir die $u_\varkappa$ sich verändern, so verändert sich auch der Fundamentalbereich F_0; wir wollen uns die $u_\varkappa$ auf eine hinreichend kleine Umgebung einer bestimmten Stelle des Continuums $\mathfrak{C}$ beschränkt denken. Wenn wir dann den beim zweiten Convergenzbeweise benutzten Bereich $\mathfrak{C}_0$, der die Stelle η umgiebt, hinreichend klein wählen, so können wir die Umgebung der betrachteten Stelle des Continuums $\mathfrak{C}$ so klein einrichten, dass der Bereich $\mathfrak{C}_0$ allemal innerhalb F_0 verbleibt, wenn die $u_\varkappa$ innerhalb jener Umgebung verbleiben.

Die durch die Gleichung (28) definirte Grösse K hängt nur von der Natur des Bereiches $\mathfrak{C}_0$ und von der die Anordnung der Glieder der Reihe (10) bestimmenden Grösse r ab. Die Ungleichung (29) besteht folglich für alle in Betracht gezogenen Werthesysteme der $u_\varkappa$.

Fassen wir in der Fuchs'schen Thetareihe (8) diejenigen Glieder zusammen, die den in das Agreggat U_n zusammengefassten Gliedern

r Reihe (10) entsprechen, und bezeichnen die Summe dieser Glieder ırch W_n, so ist nach der in der Nr. 305 (S. 177) bewiesenen Uneichung

$$\left| H(S_\nu \eta) \left(\frac{dS_\nu \eta}{d\eta}\right)^m \right| < \frac{M}{|\gamma_\nu \eta + \delta_\nu|^{2m}}$$

fenbar auch

$$|W_n| < M U_n,$$

h. die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} W_n = \Theta(\eta),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu} \right|^{2m}$$

ben die Eigenschaft, dass sich stets, wenn man die u_ν auf eine gesse Umgebung einer beliebigen Stelle des Continuums $\mathfrak{C}$ beschränkt, convergente Reihe mit lauter positiven Gliedern

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{M} K}{e^{n(m-1)r}}$$

angeben lässt, dass sowohl $|W_n|$ als auch U_n kleiner sind, wie

$$\frac{\overline{M} K}{e^{n(m-1)r}};$$

bei bedeutet $\overline{M}$ eine Zahl, die je nachdem M grösser oder kleiner Eins ist, gleich M oder grösser wie M, aber jedenfalls grösser als ns gewählt werden muss.

Nun gelten bekanntlich die folgenden Sätze über Reihen, deren lieder Functionen von gewissen realen veränderlichen Grössen sind.

Hat man eine Reihe

$$\text{)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} V_n(u_1, u_2, \cdots u_\mu),$$

o die $V_n(u_1, u_2, \cdots u_\mu)$ innerhalb eines Continuums $\mathfrak{C}$ stetige Funcnen der realen Variabeln $u_1, u_2, \cdots u_\mu$ sind, und lässt sich für eine elle des Continuums $\mathfrak{C}$ eine convergente Reihe mit von den $u_\varkappa$ unhängigen positiven Gliedern

$$\text{)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$$

angeben, dass für alle Werthe der $u_\varkappa$ in einer gewissen Umgebung ser Stelle die Ungleichung

$$|V_n(u_1, u_2, \cdots u_\mu)| < \varepsilon_n$$

befriedigt wird, so ist die Reihe (I) in der Umgebung der betreffenden Stelle des Continuums unbedingt und gleichmässig convergent.

Wenn die Reihe (I) in der Umgebung jeder Stelle des Continuums $\mathfrak{C}$ gleichmässig convergirt, so convergirt sie innerhalb des ganzen Continuums $\mathfrak{C}$ gleichmässig.

Eine Reihe, deren Glieder stetige Functionen der $u_\varkappa$ sind, stellt innerhalb eines Bereiches, wo dieselbe gleichmässig convergent ist, eine stetige Function der Variabeln $u_\varkappa$ dar.

Die Anwendung dieser Sätze auf die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} W_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} U_n$$

ergiebt also in der That:

Die Reihen (8) und (10) stellen innerhalb des Continuums $\mathfrak{C}$ stetige Functionen der realen Variabeln

$$u_1, u_2, \cdots u_\mu$$

dar.

Betrachten wir statt der realen Parameter $u_1, u_2, \cdots u_\mu$ die $\sigma - 2$ complexen Parameter $v_1, v_2, \cdots v_{\sigma-2}$, von denen eine Gruppe des Typus T abhängt, so wird es sich im Allgemeinen ereignen, dass die Ungleichheitsbedingungen, denen die $v_1, v_2, \cdots v_{\sigma-2}$ zu unterwerfen sind, damit die Gruppe eine discontinuirliche sei, gewisse Continua in dem $(2\sigma - 4)$-fach ausgedehnten Gebiete der complexen Variabeln $v_1, v_2, \cdots v_{\sigma-2}$ bestimmen. Denken wir uns dann diese Variabeln so eingerichtet, dass die Coefficienten der Substitutionen der Gruppe ϑ rationale Functionen derselben sind, so sind auch die Coefficienten der Thetareihe (8) rationale Functionen der $v_1, v_2, \cdots v_{\sigma-2}$.

Nun gilt der allgemeine Satz von Weierstrass:

Wenn die Glieder einer Reihe rationale Functionen gewisser complexer Variabeln sind, so stellt diese Reihe innerhalb eines Continuums, wo dieselbe gleichmässig convergirt, einen eindeutigen Zweig einer monogenen Function jener Variabeln dar.

Also sind die Θ-Reihen innerhalb eines jeden der gedachten Continua eindeutige Zweige monogener Functionen der

$$v_1, v_2, \cdots v_{\sigma-2},$$

natürlich aber im Allgemeinen, innerhalb verschiedener dieser Continua Zweige verschiedener monogener Functionen.

Zweites Kapitel.

). Entwickelungen der Fuchs'schen Thetafunctionen in der Um- ung der Doppelpunkte elliptischer, hyperbolischer, parabolischer Substitutionen.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung weiterer Eigenschaften Fuchs'schen Thetareihe (8) (S. 175), beziehungsweise der durch elbe dargestellten Function.

In der Umgebung jeder Stelle, wo die Reihe (10) (S. 176) conver- , stellt dieselbe eine eindeutige Function von η dar, die sich an der reffenden Stelle regulär verhält.

Bedeuten $a_1, a_2, \cdots a_q$ die Unendlichkeitsstellen der rationalen ıction $H(\eta)$, so gehören die Stellen

$$S_\nu a_\varkappa \qquad (\varkappa=1, 2, \cdots q; \quad \nu=0, 1, 2, \cdots)$$

erseits und die dem Punkte $\eta = \infty$ entsprechenden Stellen

$$\frac{-\delta_\nu}{\gamma_\nu},$$

dererseits nicht zum Convergenzbereiche der Reihe (8), da für jede ser Stellen ein Glied der Thetareihe unendlich wird. Lässt man aber betreffende Glied aus der Reihe (8) weg, so bleibt die übrige Reihe ıvergent, wir können also sagen:

Die durch die Reihe (8) dargestellte Function von η rd an den Stellen

$$) \qquad S_\nu a_\varkappa, \quad \frac{-\delta_\nu}{\gamma_\nu} \qquad (\varkappa=1, 2, \cdots q; \quad \nu=0, 1, 2, \cdots)$$

e eine rationale Function unendlich gross.

Betrachten wir nun die Reihe (8) in der Umgebung eines Doppel- nktes einer Substitution der Gruppe ϑ.

Sei zunächst S eine elliptische Substitution von ϑ, dann muss selbe (vergl. Nr. 287, S. 109) aus einer der elliptischen Substitu-

tionen der Basis von ϑ durch Transformation mit einer Substitution von ϑ hervorgehen; die canonische Form von S lautet also

$$\frac{S\eta - \lambda}{S\eta - \lambda^0} = e^{2\pi i r}\frac{\eta - \lambda}{\eta - \lambda^0}, \tag{37}$$

wo λ eine innerhalb des Einheitskreises gelegene Ecke eines Bereiches F_ν, λ^0 den zu λ harmonischen Werth und r ein ganzzahliges Vielfaches von einer der Zahlen

$$\delta_x = \frac{1}{g_x} \qquad (x=1, 2, \cdots \sigma+1)$$

bedeutet.

Eine hyperbolische Substitution S von ϑ hat die Form

$$\frac{S\eta - \mu_1}{S\eta - \mu_2} = e^{2\pi s}\frac{\eta - \mu_1}{\eta - \mu_2}, \tag{38}$$

wo μ_1, μ_2 Punkte auf der Peripherie des Einheitskreises, s eine reelle Grösse bedeutet; endlich lautet eine parabolische Substitution S von ϑ in der canonischen Form

$$\frac{1}{S\eta - \lambda} = \frac{1}{\eta - \lambda} + \gamma, \tag{39}$$

wo λ eine auf der Peripherie des Einheitskreises gelegene Ecke eines Bereiches F_ν sein muss.

Allemal können wir eine unendliche Folge von Substitutionen

$$1,\ \Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \Sigma_3,\ \cdots$$

der Gruppe ϑ so angeben, dass sich jede Substitution von ϑ auf eine Weise in der Form

$$\Sigma_x S^\varrho \tag{40}$$

darstellen lässt, wo ϱ die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, wir schreiben demgemäss in leicht verständlicher Symbolik

$$\vartheta = (1,\ \Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \cdots)(\cdots,\ S^{-2},\ S^{-1},\ 1,\ S,\ S^2,\ \cdots);$$

wenn S eine elliptische Substitution ist, so ist in (40) dem ϱ nur eine endliche Anzahl von Werthen beizulegen.

Setzen wir im Falle einer elliptischen Substitution (37)

$$\frac{\eta - \lambda}{\eta - \lambda^0} = \zeta, \quad \frac{S_\nu\eta - \lambda}{S_\nu\eta - \lambda^0} = T_\nu\zeta,$$

so ergiebt sich

$$H(S_\nu\eta)\left(\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right)^m = \left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)^m H_1(T_\nu\zeta)\left(\frac{dT_\nu\zeta}{d\zeta}\right)^m,$$

woselbst

$$H_1(\zeta) = H(\eta)\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^m,$$

gleich einer rationalen Function von ζ zu nehmen ist. Wir finden
nach

$$\Theta(\eta)\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^m = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_1(T_\nu \zeta)\left(\frac{dT_\nu \zeta}{d\zeta}\right)^m.$$

Bezeichnen wir die den $\Sigma_\varkappa$ entsprechenden Substitutionen von ζ
ch

$$\tau_\varkappa \zeta = \frac{\Sigma_\varkappa \eta - \lambda}{\Sigma_\varkappa \eta - \lambda^0} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots),$$

lässt sich jedes $T_\nu \zeta$ auf eine Weise in der Form

$$T_\nu \zeta = \tau_\varkappa (e^{2\pi i \varrho r} \zeta) \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \cdots g-1)$$

stellen, wo g den Nenner von r bedeutet; wir haben also

$$\Theta(\eta)\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^m = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{\varrho=0}^{g-1} H_1[\tau_\varkappa(e^{2\pi i \varrho r}\zeta)]\left[\frac{d\tau_\varkappa(e^{2\pi i \varrho r}\zeta)}{d\zeta}\right]^m,$$

r, wenn wir die rationale Function von ζ

$$H_1(\tau_\varkappa \zeta)\left(\frac{d\tau_\varkappa \zeta}{d\log\zeta}\right)^m = \overline{H}_\varkappa(\zeta)$$

en,

$$\Theta(\eta)\left(\frac{d\eta}{d\log\zeta}\right)^m = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{\varrho=0}^{g-1} \overline{H}_\varkappa(e^{2\pi i \varrho r}\zeta).$$

Führen wir durch die Gleichung

$$\zeta^g = t$$

neue Variable ein, so ist

$$\sum_{\varrho=0}^{g-1} \overline{H}_\varkappa(e^{2\pi i \varrho r}\zeta) = \psi_\varkappa(t)$$

rationale Function von t, und wir erhalten

$$\Theta(\eta) = \left(\frac{d\log\zeta}{d\eta}\right)^m \sum_\varkappa \psi_\varkappa(t),$$

, da

$$\frac{d\log\zeta}{d\eta} = \frac{\lambda - \lambda^0}{(\eta-\lambda)(\eta-\lambda^0)}$$

nden wird,

$$\Theta(\eta)(\eta-\lambda^0)^{2m} = (\lambda-\lambda^0)^m \zeta^{-m} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \psi_\varkappa(\zeta^g).$$

Sei in der Umgebung von $t = 0$

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} \psi_\varkappa(\zeta^g) = \varepsilon_0 (\zeta^g)^q + \varepsilon_1 (\zeta^g)^{q+1} + \cdots,$$

dann haben wir also

$$\Theta(\eta)(\eta - \lambda^0)^{2m} = \zeta^{gq-m}(\bar{\varepsilon}_0 + \cdots). \tag{41}$$

Die Stelle $\eta = \lambda$ ist folglich für die durch die Thetareihe dargestel[...] Function allgemein gesprochen eine Nullstelle von der Ordnung gq — wenn wir $\eta - \lambda$ als unendlich kleine Grösse erster Ordnung betrach[...] Nehmen wir, was mit Rücksicht auf spätere Anwendungen zw[...] mässiger ist,

$$(\eta - \lambda)^g$$

als das Unendlichkleine erster Ordnung, so ist die Stelle $\eta = \lambda$ e[...] Nullstelle von der Ordnung

$$\frac{p}{g},$$

wo p durch die Gleichung

$$p = gq - m$$

bestimmt ist; p ist also eine Zahl, die der Congruenz

$$p \equiv -m \pmod{g}$$

genügt.

Im Falle einer hyperbolischen Substitution (38) setzen wir [...]lich wie vorhin

$$\frac{\eta - \mu_1}{\eta - \mu_2} = \zeta, \quad \tau_\varkappa \zeta = \frac{\Sigma_\varkappa \eta - \mu_1}{\Sigma_\varkappa \eta - \mu_2},$$

$$H_1(\zeta) = H(\eta)\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^m, \quad H_1(\tau_\varkappa \zeta)\left(\frac{d\tau_\varkappa \zeta}{d\log\zeta}\right)^m = \overline{H}_\varkappa(\zeta),$$

dann ist

$$\Theta(\eta)\left(\frac{d\eta}{d\log\zeta}\right)^m = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{\varrho=-\infty}^{+\infty} \overline{H}_\varkappa(e^{2\pi i\varrho}\zeta).$$

Aus der unbedingten Convergenz der Thetareihe folgt die unbedingte Convergenz der **Theilreihe**

$$\varphi_\varkappa(\zeta) = \sum_{\varrho=-\infty}^{+\infty} \overline{H}_\varkappa(e^{2\pi i\varrho}\zeta);$$

die durch dieselbe dargestellte Function von ζ verwandelt sich, wenn wir

$$t = \log\zeta$$

setzen, in eine eindeutige Function

$$\varphi_\varkappa(\zeta) = \varphi_\varkappa(e^t) = \chi_\varkappa(t)$$

ı t, die offenbar die beiden Perioden

$$2\pi i, \qquad 2\pi\sigma$$

itzt. Bezeichnen wir durch

$$u_1, u_2, \cdots u_\mu$$

Unendlichkeitsstellen der rationalen Function $\overline{H}_\varkappa(\zeta)$, so besitzt die ›peltperiodische Function $\chi_\varkappa(t)$ innerhalb ihres Periodenparallelo-mms die Unendlichkeitsstellen

$$t = \log u_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \mu),$$

lässt sich also durch eine doppeltperiodische Function s, die inner-b des Periodenparallelogramms nur an zwei Stellen unendlich wird, der Form

$$\chi_\varkappa(t) = \psi_\varkappa(s) + \frac{ds}{dt}\overline{\psi}_\varkappa(s)$$

stellen, wo $\psi_\varkappa(s)$, $\overline{\psi}_\varkappa(s)$ rationale Functionen von s bedeuten.

Wir erhalten also für die Thetafunction die Entwickelung

$$\Theta(\eta) = \left(\frac{d\log\zeta}{d\eta}\right)^m \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\left[\psi_\varkappa(s) + \frac{ds}{dt}\psi_\varkappa(s)\right],$$

welcher erhellt, dass die Doppelpunkte μ_1, μ_2 der hyperbolischen ›stitution S Unbestimmtheitsstellen für die Thetafunction sind.

Betrachten wir endlich den Fall der parabolischen Substitu-ı (39) und setzen

$$\zeta = \frac{2\pi i}{\gamma}\frac{1}{\eta - \lambda}, \qquad \tau_\varkappa\zeta = \frac{2\pi i}{\gamma}\frac{1}{\Sigma_\varkappa\eta - \lambda},$$

$$H_1(\zeta) = H(\eta)\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^m, \qquad H_1(\tau_\varkappa\zeta)\left(\frac{d\tau_\varkappa\zeta}{d\zeta}\right)^m = \overline{H}_\varkappa(\zeta),$$

:giebt sich

$$\Theta(\eta)\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^m = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\varrho=-\infty}^{+\infty}\overline{H}_\varkappa(\zeta + \varrho\, 2\pi i).$$

Lassen wir η aus dem Innern des Einheitskreises kommend in Punkt λ einrücken, so wird ζ in bestimmter Weise unendlich. st

$$H_1(\zeta) = (\eta - \lambda)^{2m}\left(-\frac{2\pi i}{\gamma}\right)^{-m} H(\eta),$$

wird $H_1(\zeta)$ für $\eta = \lambda$, d. h. für $\zeta = \infty$ gleich Null; dasselbe gilt ıbar auch für

$$\overline{H}_\varkappa(\zeta) = H_1\left(\frac{2\pi i}{\gamma}\frac{1}{\Sigma_\varkappa\eta - \lambda}\right)\left(\frac{2\pi i}{\gamma}\right)^m\left[\frac{d}{d\zeta}\frac{1}{\Sigma_\varkappa\eta - \lambda}\right]^m,$$

und folglich wird auch die Function

$$\sum_{\varrho=-\infty}^{+\infty} \overline{H}_\varkappa(\zeta + 2\varrho\pi i) = \varphi_\varkappa(\zeta)$$

für $\zeta = \infty$ gleich Null.

Die Function $\varphi_\varkappa(\zeta)$ ist eine eindeutige periodische Function mit der Periode $2\pi i$ von ζ, die innerhalb des Periodenstreifens nur an einer endlichen Anzahl von Stellen unendlich wird, sie ist folglich als rationale Function von

$$t = e^\zeta$$

darstellbar; sei

$$\varphi_\varkappa(\zeta) = \chi_\varkappa(t),$$

wo also $\chi_\varkappa$ den Algorithmus einer rationalen Function bedeutet. Wir haben demnach

$$\Theta(\eta) = \left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)^m \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \chi_\varkappa(t) = \left(-\frac{2\pi i}{\gamma}\right)^m \frac{1}{(\eta-\lambda)^{2m}} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \chi_\varkappa(t),$$

und hieraus folgt (vergl. Nr. 203, Bd. II, 1, S. 284), dass die Thetafunction nach Multiplication mit $(\eta - \lambda)^{2m}$ nach positiven ganzen Potenzen von

$$t = e^{\frac{2\pi i}{\gamma}\frac{1}{\eta-\lambda}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{t} = e^{\frac{2\pi i}{\gamma}\frac{1}{\lambda-\eta}}$$

entwickelt werden kann, je nachdem wir uns auf eine innerhalb oder ausserhalb des Einheitskreises gelegene hinreichend kleine Umgebung des Doppelpunktes λ der parabolischen Substitution S beschränken. Die Doppelpunkte parabolischer Substitutionen sind also auch Unbestimmtheitsstellen der Thetafunction und zwar Unbestimmtheitsstellen von ähnlicher Natur, wie der unendlich ferne Punkt für eine periodische Function, die sich im Endlichen wie eine rationale Function verhält.

311. Die Anzahl der verschiedenen Null- und Unendlichkeitsstellen der Fuchs'schen Thetafunctionen, dargestellt durch ein bestimmtes Integral.

Wir erkennen aus den vorstehenden Betrachtungen, dass die Peripherie des Einheitskreises überall dicht besetzt ist mit Unbestimmtheitsstellen der durch die Thetareihe dargestellten Function. Beschränken wir also η auf das Innere des Einheitskreises, so stellt uns die Thetareihe eine monogene Function von η dar, die über die Peripherie des Einheitskreises hinweg nicht fortgesetzt werden kann, ebenso stellt uns die Thetareihe für Werthe von η, deren absoluter Betrag

össer ist wie Eins, eine monogene Function dar, die keine Fortsetzung ch dem Innern des Einheitskreises gestattet.

Wir haben also einen einheitlichen analytischen Ausdruck, der uns Innern und im Aeussern des Einheitskreises zwei verschiedene monone Functionen von η darstellt.

Entsprechend der für die zur Gruppe ϑ gehörigen Fuchs'schen ınctionen festgehaltenen Convention betrachten wir im Folgenden mer nur die innerhalb des Einheitskreises existirende Function und zeichnen diese als die durch die Reihe (8) dargestellte Fuchs'sche ıetafunction $\Theta(\eta)$.

Wir wenden uns nun zur genaueren Untersuchung der Nullstellen d Unendlichkeitsstellen einer Fuchs'schen Thetafunction.

Wenn die Thetafunction an einer Stelle verschwindet oder unendh wird, so zeigt sie offenbar an den aus dieser Stelle durch die Subtutionen der Gruppe ϑ hervorgehenden correspondirenden Stellen das iche Verhalten.

Es entspricht also jeder innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 legenen Nullstelle eine correspondirende Nullstelle in den congruenten reichen F_ν, die wir von der innerhalb F_0 befindlichen als nicht sentlich verschieden ansehen wollen. Da die Unendlichkeitstellen ı der Form

$$\frac{-\delta_\nu}{\gamma_\nu}$$

ımtlich ausserhalb des Einheitskreises liegen, so kommen dieselben die innerhalb dieses Kreises existirenden Thetafunctionen nicht in racht. Jeder im Innern des Einheitskreises gelegenen Unendlichtsstelle der rationalen Function $H(\eta)$ entspricht im Allgemeinen e innerhalb F_0 gelegene Unendlichkeitsstelle einer der Functionen $(S_\nu \eta)$.

Wir können uns folglich auf die Untersuchung der innerhalb des ındamentalbereiches F_0 gelegenen Null- und Unendlichkeitsstellen der ınction $\Theta(\eta)$ beschränken.

Wenn eine Null- oder Unendlichkeitsstelle von $\Theta(\eta)$ innerhalb er auf einer Seite von F_0 gelegen ist und nicht gerade mit einer ke von F_0 zusammenfällt, so zählen wir dieselbe in der in der Anais üblichen Weise als sovielfache Nullstelle, wie der Exponent derigen Potenz von $\eta - a$ beträgt, mit welcher die Entwickelung von η) in der Umgebung dieser Stelle a beginnt. Dabei ist zu berken, dass von zwei congruenten Seiten $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ des Bereiches F_0 ts nur die eine, z. B. $s_\varkappa$, als wirklich zu dem Fundamentalbereiche

gehörig anzusehen ist, während die andere $s'_\varkappa$ dem benachbarten Bereiche $F_\varkappa$ zugezählt werden muss.

Wenn eine Ecke $\lambda_\varkappa$, die einen einelementigen Cyklus bildet, eine Null- oder Unendlichkeitsstelle von $\Theta(\eta)$ ist, so gehört diese Ecke, falls der daselbst vorhandene Winkel von F_0

$$\frac{2\pi}{g_\varkappa}$$

von Null verschieden ist, $g_\varkappa$ verschiedenen in dieser Ecke zusammenstossenden Bereichen F_ν gleichzeitig an, wir werden also, wie bereits oben geschehen ist (Nr. 310, S. 196), diese Ecke als $\left(\frac{p}{g_\varkappa}\right)$-fache Nullstelle zu zählen haben, wenn die Entwickelung von $\Theta(\eta)$ in der Umgebung von $\eta = \lambda_\varkappa$ die Form (41) (a. a. O. für $g = g_\varkappa$) hat.

Wenn die Ecke $\lambda_{\sigma+1}$ eine Nullstelle oder Unendlichkeitsstelle von $\Theta(\eta)$ ist, so gilt das Gleiche von den sämmtlichen Ecken des σ-gliedrigen Cyklus, zu dem $\lambda_{\sigma+1}$ gehört. Wir zählen dann, wenn die Entwickelung von $\Theta(\eta)$ in der Umgebung von $\lambda_{\sigma+1}$ mit der Potenz

$$(\eta - \lambda_{\sigma+1})^p$$

beginnt, die Ecke $\lambda_{\sigma+1}$ als eine

$$\frac{p}{\sigma g_{\sigma+1}}\text{-}$$

fache Nullstelle, so dass also die σ den Cyklus bildenden Ecken zusammengenommen eine Nullstelle von der Vielfachheit

$$\frac{p}{g_{\sigma+1}}$$

repräsentiren. Natürlich gilt dies nur, wenn $g_{\sigma+1}$ einen endlichen Werth besitzt.

Um allgemein alle durch erlaubte Abänderungen von F_0 entstehenden Fundamentalbereiche, wo die Cykelnvertheilung der Ecken eine andere sein kann, wie für F_0, mit zu umfassen, sagen wir:

Wenn die Ecken $\lambda, \lambda', \cdots \lambda^{(\mu-1)}$ zusammen einen μ-gliedrigen Cyklus bilden, für welchen die Winkelsumme gleich

$$\frac{2\pi}{g}$$

ist, und wenn die Entwickelung der Thetafunction in der Umgebung von λ mit der Potenz

$$(\eta - \lambda)^p$$

beginnt, so zählt jedes der $\lambda, \lambda', \cdots \lambda^{(\mu-1)}$ als eine

$\frac{p}{\mu g}$-
ache, und somit der ganze Cyklus als eine $\left(\frac{p}{g}\right)$-fache, innerhalb des 'undamentalbereiches gelegene Nullstelle von $\Theta(\eta)$. Es ist dann stets

$$p \equiv -m \pmod g.$$

Im Falle einer auf dem Einheitskreise gelegenen Ecke λ, die also u einer parabolischen Substitution S gehört, zählen wir dieselbe, beiehungsweise die Gesammtheit der Ecken, die mit λ zusammen einen 'yklus bilden, als p-fache Nullstelle, wenn die Entwickelung der mit $\eta - \lambda)^{2m}$ multiplicirten Thetafunction nach Potenzen von

$$t = e^{\frac{2\pi i}{\gamma} \cdot \frac{1}{\eta - \lambda}}$$

ıit der p-ten Potenz von t beginnt.

Wir fragen nun nach der Anzahl der innerhalb F_0 gelegenen, . h. der wesentlich von einander verschiedenen Nullstellen der Thetaınction.

Sei für $x = 1, 2, \cdots \sigma$ die Ecke λ_x eine Nullstelle von der Ordung

$$\frac{p_x}{g_x}, \qquad p_x + m \equiv 0 \pmod{g_x},$$

nd möge der von den Ecken $\lambda_{\sigma+1}, \lambda'_{\sigma+1}, \cdots \lambda^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}$ gebildete Cyklus ine Nullstelle von der Ordnung

$$\frac{p_{\sigma+1}}{g_{\sigma+1}}, \qquad p_{\sigma+1} + m \equiv 0 \pmod{g_{\sigma+1}},$$

ıpräsentiren. Das Auftreten parabolischer Substitutionen öge vorläufig ausgeschlossen werden.

Wenn dann im Innern von F_0 noch p_0 einfach zu zählende Nullellen der Function $\Theta(\eta)$ liegen, so beträgt die Gesammtzahl der esentlich verschiedenen Nullstellen von $\Theta(\eta)$

$$p = p_0 + \sum_{x=1}^{\sigma+1} \frac{p_x}{g_x}. \tag{12}$$

edeute nun q die Anzahl der einfach zu zählenden Unendlichkeitsellen der rationalen Function $H(\eta)$, die innerhalb des Einheitsreises gelegen sind, oder genauer gesprochen die Anzahl derjenigen ieser Unendlichkeitsstellen, denen innerhalb F_0 gelegene Unendlichkeitsellen der Function $\Theta(\eta)$ entsprechen, dann ist bekanntlich

$$p_0 - q = \frac{1}{2\pi i} \int_{(F_0)} \frac{d \log \Theta(\eta)}{d\eta} d\eta, \tag{13}$$

wo das Integral über die Begrenzung von F_0 zu erstrecken ist. Da die Ecken von F_0, die wirkliche Nullstellen von $\Theta(\eta)$ sind, zu Unendlichkeitstellen der zu integrirenden Function $d \log \Theta(\eta)$ Veranlassung geben, hat man bei der Integration diese Ecken in unendlich kleinen Curven zu umgehen; wir können diese Curven z. B. als kleine Kreisbogen wählen, deren Mittelpunkte in den betreffenden Ecken liegen.

312. Berechnung der Anzahl der wesentlich verschiedenen Nullstellen, wenn keine parabolischen Substitutionen auftreten. Bedeutung als superficieller Inhalt des Fundamentalbereiches.

Betrachten wir zunächst die Integrale über diese kleinen Curven. In der Umgebung von $\lambda_\varkappa$ ist

$$\Theta(\eta) = (\eta - \lambda_\varkappa)^{p_\varkappa}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1(\eta - \lambda_\varkappa) + \cdots),$$

$$\Theta'(\eta) = p_\varkappa(\eta - \lambda_\varkappa)^{p_\varkappa - 1}(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_1(\eta - \lambda_\varkappa) + \cdots),$$

also

$$\frac{\Theta'(\eta)}{\Theta(\eta)} = \frac{p_\varkappa}{\eta - \lambda_\varkappa}(1 + \bar{\bar{\varepsilon}}_1(\eta - \lambda_\varkappa) + \cdots).$$

Integriren wir also über einen kleinen Kreis mit dem Mittelpunkte $\lambda_\varkappa$, so ist

$$\int_{(\lambda_\varkappa)} \frac{d \log \Theta(\eta)}{d\eta} d\eta = p_\varkappa \cdot 2\pi i. \tag{44}$$

Das Integral verläuft dabei im positiven Sinne, d. h. so, dass der eingeschlossene Punkt $\lambda_\varkappa$ zur Linken bleibt. Das Integral über die Begrenzung von F_0 ist so zu erstrecken, dass der Fundamentalbereich F_0 zur Linken bleibt, also ist der bei Berechnung von (43) in Betracht kommende Theil des Integrals (44) im negativen Sinne zu nehmen; wir schreiben dies

$$\int_{(\lambda_\varkappa)} \frac{d \log \Theta(\eta)}{d\eta} d\eta = -2\pi i p_\varkappa.$$

Von diesem Integrale ist für $\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma$ der auf den Bogen mit dem Centriwinkel

$$\frac{2\pi}{g_\varkappa}$$

entfallende Theil zu nehmen, wir haben also den Beitrag

$$-\frac{2\pi i p_\varkappa}{g_\varkappa}$$

zum Integrale (43). Ebenso ergiebt sich von den auf die Ecken

$$\lambda_{\sigma+1}, \lambda'_{\sigma+1}, \ldots \lambda^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}$$

bezüglichen Integralen, wo die Winkelsumme von F_0 den $(g_{\sigma+1})^{\text{ten}}$ Theil von 2π beträgt, der Gesammtbeitrag

$$-\frac{2\pi i p_{\sigma+1}}{g_{\sigma+1}},$$

so dass also von den kleinen, die Ecken von F_0 umgehenden Curven der Beitrag

$$(45) \qquad -2\pi i \sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1} \frac{p_\varkappa}{g_\varkappa}$$

zu dem Integrale (43) geliefert wird.

Die Integrale über die Seiten von F_0 paaren sich zu je zweien, die über congruente Seiten $s_\varkappa$, $s'_\varkappa$ erstreckt sind; wir haben also

$$(46) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\sigma} \left(\int_{(s_\varkappa)} \frac{d \log \Theta(\eta)}{d\eta} d\eta - \int_{(s'_\varkappa)} \frac{d \log \Theta(\eta)}{d\eta} d\eta \right),$$

wo das negative Vorzeichen vor dem zweiten Integrale geschrieben wurde, um anzudeuten, dass während $s_\varkappa$ in der Richtung von $\lambda_\varkappa$ nach $\lambda^{(\varkappa-1)}_{\sigma+1}$ durchlaufen wird, die correspondirende Seite $s'_\varkappa$ in der Richtung von $\lambda^{(\varkappa)}_{\sigma+1}$ nach $\lambda_\varkappa$ hin zu durchlaufen ist.

Nun ist, da $s'_\varkappa$ aus $s_\varkappa$ durch die Substitution $A_\varkappa \eta$ hervorgeht (vergl. Nr. 215, Bd. II, 1, S. 337),

$$\int_{(s'_\varkappa)} \frac{d \log \Theta(\eta)}{d\eta} d\eta = \int_{(s_\varkappa)} \frac{\Theta'(A_\varkappa \eta)}{\Theta(A_\varkappa \eta)} dA_\varkappa \eta = \int_{(s_\varkappa)} d \log \Theta(A_\varkappa \eta).$$

Ferner haben wir nach Gleichung (9) der Nr. 305 (S. 176)

$$\Theta(A_\varkappa \eta) = \Theta(\eta) \left(\frac{dA_\varkappa \eta}{d\eta} \right)^{-m},$$

also durch logarithmische Differentiation

$$d \log \Theta(A_\varkappa \eta) = d \log \Theta(\eta) - m \, d \log \left(\frac{dA_\varkappa \eta}{d\eta} \right);$$

es ist folglich

$$\int_{(s_\varkappa)} d \log \Theta(\eta) - \int_{(s'_\varkappa)} d \log \Theta(\eta) = m \int_{(s_\varkappa)} d \log \left(\frac{dA_\varkappa \eta}{d\eta} \right) = m \left[\log \frac{dA_\varkappa \eta}{d\eta} \right]_{\lambda_\varkappa}^{\lambda^{(\varkappa-1)}_{\sigma+1}}$$

diese Differenz hat demnach den Werth

$$m\left\{\log\frac{dA_\varkappa\eta}{d\eta}\right\}_{\lambda_\varkappa}^{\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}}+m\,i\left\{\operatorname{Arg}\left(\frac{dA_\varkappa\eta}{d\eta}\right)\right\}_{\lambda_\varkappa}^{\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}}.$$

Wir finden also für die Summe (45) einen Ausdruck von der Form

$$R+m\,i\sum_{\varkappa=1}^{\sigma}\left[\left(\operatorname{Arg}\frac{dA_\varkappa\eta}{d\eta}\right)_{\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}}-\left(\operatorname{Arg}\frac{dA_\varkappa\eta}{d\eta}\right)_{\lambda_\varkappa}\right],$$

wo R eine reale Grösse bedeutet. Nach den Ergebnissen der Nr. 199 (Bd. II, 1, S. 268) ist

$$\left(\operatorname{Arg}\frac{dA_\varkappa\eta}{d\eta}\right)_{\lambda_\varkappa}=\frac{2\pi}{g_\varkappa};$$

um für den Ausdruck

$$\sum_{\varkappa=1}^{\sigma}\left(\operatorname{Arg}\frac{dA_\varkappa\eta}{d\eta}\right)_{\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}}$$

eine genaue Werthbestimmung zu erhalten, verfahren wir folgendermassen.

Denken wir uns in jeder der Ecken $\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}$ an die beiden daselbst zusammenstossenden Seiten von F_0 die Tangenten gezogen, so erhalten wir ein gradliniges sternförmiges (2σ)-Eck, dessen Winkelsumme gleich

$$(2\sigma-2)\pi$$

ist. Die Summe der Winkel dieses (2σ)-Ecks, die bei Ecken $\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}$ liegen, ist nichts anderes wie

$$\frac{2\pi}{g_{\sigma+1}},$$

während der Winkel, den die von $\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa)}$ und $\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}$ ausgehenden und aufeinander folgenden Seiten mit einander einschliessen, offenbar gleich dem Werthe von

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{dA_\varkappa\eta}{d\eta}\right)$$

im Punkte $\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}$ gefunden wird.

Wir haben also

$$(2\sigma-2)\pi=\sum_{\varkappa=1}^{\sigma}\left(\operatorname{Arg}\frac{dA_\varkappa\eta}{d\eta}\right)_{\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}}+\frac{2\pi}{g_{\sigma+1}}$$

und der Coefficient von i in der Summe (45) hat folglich den Werth

$$m\left\{(2\sigma-2)\pi-2\pi\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\frac{1}{g_\varkappa}\right\}.$$

Das Integral (43) ergiebt sich demnach gleich

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{R + i\,2m\pi(\sigma - 1) - 2\pi i\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\frac{p_\varkappa + m}{g_\varkappa}\right\},$$

ıd da dasselbe einen realen Werth haben muss, ist

$$R = 0,$$

h. wir finden

$$p_0 - q = m(\sigma - 1) - \sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\frac{p_\varkappa + m}{g_\varkappa},$$

› die unter dem Summenzeichen stehenden Glieder zufolge der für ꞓ $p_\varkappa$ bestehenden Congruenzen ganze Zahlen sind.

Die Gesammtzahl p der innerhalb F_0 gelegenen, d. h. wesentlich n einander verschiedenen Nullstellen der Function $\Theta(\eta)$ ist also ch (42)

$$p = q + 2m\left\{\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_\varkappa}\right) - 1\right\}.$$

Uebertragen wir den Fundamentalbereich F_0 auf die Fläche vom ıstanten Krümmungsmaasse -1, so erhalten wir ein von geodätiıen Linien gebildetes (2σ)-Eck, dessen Winkelsumme gleich

$$2\pi\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\frac{1}{g_{\sigma+1}}$$

. Nun hat man nach Gauss für die Totalkrümmung (curvatura ;egra) eines auf einer Fläche vom Krümmungsmaasse K gelegenen odätischen Dreiecks, dessen Winkel gleich A, B, C sind die Formel

$$\int K\,dw = A + B + C - \pi,$$

› dw das Flächenelement bedeutet und die Integration über das Innere ꞉s betrachteten Dreiecks zu erstrecken ist. Wenn also die Krümmung ꞉r Fläche constant und zwar

$$K = -1$$

꞉, so ist der Inhalt des betrachteten geodätischen Dreiecks gleich

$$\int dw = \pi - (A + B + C).$$

Der Inhalt unseres dem Fundamentalbereiche F_0 entsprechenden ›odätischen (2σ)-Ecks ist hiernach gleich

$$2\sigma\pi - \sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\frac{2\pi}{g_\varkappa} - 2\pi,$$

also gleich

$$4\pi\left(\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_\varkappa}\right)-1\right).$$

Der Ausdruck

$$\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_\varkappa}\right)-1=\frac{-1}{\nu} \tag{47}$$

ist also stets positiv und stellt, abgesehen von dem Factor 4π, den superficiellen Inhalt des Fundamentalbereiches F_0 dar.

Wir schliessen hieraus, dass die Anzahl der wesentlich verschiedenen Nullstellen

$$p=q+2m\frac{-1}{\nu} \tag{48}$$

der Thetafunction stets grösser ist wie die Anzahl q der Unendlichkeitsstellen innerhalb F_0.

In den Fällen, wo die unabhängige Variable einer Gauss'schen Differentialgleichung eine rationale Function des Integralquotienten war, d. h. für die endlichen Gruppen projectiver Substitutionen, ergab sich die durch die Gleichung (47) definirte Grösse ν als ganze Zahl und wesentlich positiv. Wir können sogar auf Grund der Betrachtungen der Nr. 299 (S. 149) (vergl. die Nr. 326) sagen:

Allemal, wenn die durch die Gleichung (47) definirte Zahl ν für eine discontinuirliche Gruppe ϑ positiv ist, muss sie eine ganze Zahl sein.

313. Der Fall, wo parabolische Substitutionen auftreten. Bildung von Fuchs'schen Functionen aus Thetafunctionen.

Wir lassen nun die Beschränkung, dass sich unter den Substitutionen

$$A_1,\ A_2,\ \cdots A_\sigma,\ A_{\sigma+1}$$

keine parabolische befindet, fallen. Dann bleiben alle unter dieser Beschränkung gemachten Schlüsse richtig, es handelt sich nur um die Berechnung des Integrals

$$\int d\log\Theta(\eta),$$

erstreckt über eine kleine Curve, die ganz innerhalb F_0 verläuft und eine parabolische Ecke, d. h. den Doppelpunkt $\lambda_\varkappa$ einer parabolischen Substitution $A_\varkappa$

$$\frac{1}{A_\varkappa\eta-\lambda_\varkappa}=\frac{1}{\eta-\lambda_\varkappa}+\gamma_\varkappa$$

umgiebt.

Setzen wir

$$t = e^{\frac{2\pi i}{\gamma_\varkappa(\eta - \lambda_\varkappa)}},$$

› ist in der Nähe der Stelle $\lambda_\varkappa$ die Thetafunction in der Form

$$\Theta(\eta) = \frac{1}{(\eta - \lambda_\varkappa)^{2m}} \mathfrak{P}_\varkappa(t)\, t^{p_\varkappa}$$

ırstellbar, wo $\mathfrak{P}_\varkappa(t)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von t fort-hreitende Reihe bedeutet, die für $t = 0$ nicht verschwindet; $p_\varkappa$ ist ne ganze Zahl.

Wenn η in einem kleinen Kreise, dessen Mittelpunkt in $\lambda_\varkappa$ liegt, ›n einem Punkte der Seite $s_\varkappa$ nach dem correspondirenden Punkte der ›ite $s_\varkappa' = A_\varkappa s_\varkappa$ geht, so hat t einen kleinen Kreis mit dem Mittel-ınkte $t = 0$ vollständig durchlaufen, und zwar erfolgt die Bewegung ›n t so, dass der Punkt $t = 0$ zur Rechten bleibt, weil bei der ent-›rechenden Bewegung von η der Punkt $\lambda_\varkappa$ zur Rechten (die Fläche ₀ zur Linken) liegt. Bilden wir also das Integral

$$\int d \log \Theta(\eta)$$

ngs dieses kleinen Kreisbogens der η-Ebene, so ergiebt sich, da

$$d \log \Theta(\eta) = d \log (\eta - \lambda_\varkappa)^{-2m} + d \log t^{p_\varkappa} \mathfrak{P}_\varkappa(t)$$

t, offenbar

$$\int d \log \Theta(\eta) = \int d \log (\eta - \lambda_\varkappa)^{-2m} + \int d \log t^{p_\varkappa} \mathfrak{P}_\varkappa(t).$$

Das erste Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung verschwindet, enn wir den Radius des kleinen Kreisbogens der η-Ebene unendlich lein nehmen, das zweite Integral dagegen reducirt sich auf

$$-2\pi i p_\varkappa,$$

ır haben folglich

$$\int d \log \Theta(\eta) = -2\pi i p_\varkappa.$$

Berechnen wir also wie in dem vorhin betrachteten Falle das über .e Begrenzung von F_0 erstreckte Integral von $d \log \Theta(\eta)$, so finden wir

$$\int\limits_{(F_0)} d \log \Theta(\eta) = 2\pi i \left[m(\sigma - 1) - \sum_\varkappa \frac{p_{e\varkappa} + m}{g_{e\varkappa}} - \sum_\varkappa p_\varkappa \right],$$

o sich die erste Summe in der eckigen Klammer auf die elliptischen ubstitutionen

$$A_{e1},\ A_{e2},\ \cdots,$$

ie zweite Summe auf die parabolischen unter den

$$A_1,\ A_2,\ \cdots\ A_{\sigma+1}$$

ezieht.

Wenn wir im Sinne der gemachten Festsetzung die parabolische Ecke $\lambda_\varkappa$ als eine $p_\varkappa$-fach zu zählende Nullstelle ansehen, so finden wir also für die Gesammtzahl der wesentlich verschiedenen Nullstellen von $\Theta(\eta)$ den Ausdruck

$$p = q + 2m\left[\sum_\varkappa \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_{e\varkappa}}\right) - 1 + \frac{\tau}{2}\right],$$

wo sich die Summation wieder auf die elliptischen Substitutionen A bezieht und τ die Anzahl der parabolischen Substitutionen unter den

$$A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$$

bedeutet. Beachten wir nunmehr, dass für eine parabolische Substitution das entsprechende $g_\varkappa$ unendlich gross zu nehmen ist, so haben wir also auch in dem allgemeinen Falle für p die Formel

$$p = q + 2m\frac{-1}{\nu},$$

wo ν die durch die Gleichung (47) festgelegte Bedeutung hat.

Die Formel (48) ist also ganz allgemein gültig, und offenbar bedeutet auch im allgemeinen Falle

$$\frac{-4\pi}{\nu}$$

den superficiellen Inhalt des Fundamentalbereiches F_0.

Wenn wir wie üblich die Unendlichkeitsstellen als negative Nullstellen zählen (was bei den eventuell in den Ecken von F_0 gelegenen Unendlichkeitsstellen auch bisher schon geschehen ist), so haben wir also für die Gesammtzahl $p - q$ der wesentlich verschiedenen Nullstellen den Satz:

Die Anzahl der wesentlich verschiedenen Nullstellen der durch die Reihe (8) dargestellten Fuchs'schen Thetafunction ist proportional der Zahl m und dem superficiellen Inhalte des Fundamentalbereiches der Gruppe ϑ.

Mit Hülfe der durch Reihen von der Form (8) der Nr. 305 (S. 175) definirten Thetafunctionen lassen sich, wie wir am a. a. O. bereits bemerkt haben, durch Quotientenbildung eindeutige Functionen herstellen, die bei den Substitutionen der Gruppe ϑ ungeändert bleiben. Betrachten wir den daselbst gebildeten Quotienten

$$f(\eta) = \frac{\Theta_2(\eta)}{\Theta_1(\eta)}$$

zweier zur selben Zahl m gehöriger Thetafunctionen, und sei p_1 die Anzahl der Nullstellen, q_1 die Anzahl der Unendlichkeitsstellen von $\Theta_1(\eta)$ innerhalb F_0 und mögen p_2, q_2 die analoge Bedeutung für $\Theta_2(\eta)$ haben, dann ist im Allgemeinen $p_2 + q_1$ die Anzahl der Nullstellen, $p_1 + q_2$

› Anzahl der Unendlichkeitsstellen der Function $f(\eta)$ innerhalb F_0. ese Function wird also im Innern des Fundamentalbereiches nur an ıer endlichen Anzahl von Stellen gleich Null oder unendlich,

$f(\eta)$ ist also eine Fuchs'sche Function.

Da zufolge der Gleichung (48) (Nr. 312, S. 206)

$$p_1 + q_2 = p_2 + q_1$$

, so stimmt die Anzahl der Nullstellen von $f(\eta)$ mit der Anzahl der ıendlichkeitsstellen überein, wie es im Sinne des Satzes der Nr. 215 d. II, 1, S. 338) sein muss.

Allgemeiner können wir in folgender Weise Fuchs'sche Functionen den.

Wir sagen, die durch die Reihe (8) dargestellte Thetafunction gere zur Zahl m. Ein Product von Thetafunctionen, die zu den Zahlen

$$m_1, m_2, \cdots m_\mu$$

ıören, möge ebenso als zu der Zahl

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_\mu$$

ıörig bezeichnet werden. Bilden wir eine ganze rationale Function t constanten Coefficienten von Thetafunctionen, in welcher jedes ›nom zur selben Zahl K gehört und dividiren dieselbe durch eine lere, ebenso beschaffene ganze Function, so gehört der Quotient zur hl Null und ist folglich eine Fuchs'sche Function.

Es entsteht naturgemäss die Frage, ob sich auch umgekehrt jede .chs'sche Function als ein solcher Quotient darstellen lässt. Wir ›chränken uns bei der Behandlung dieser Frage auf den Fall, wo e Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$$

liptische sind.

Drittes Kapitel.

314. Invariante eindeutige Formen. Allgemeine Gestalt der ganze[redacted] Formen als Functionen der unabhängigen Variabeln.

Denken wir uns die Fuchs'sche Function

$$z = f(\eta)$$

gebildet, die innerhalb F_0 jeden Werth nur ein einziges Mal annim[redacted]t und die für

$$\eta = \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_{\sigma+1}$$

beziehungsweise die Werthe

$$0 = f(\lambda_1), \qquad 1 = f(\lambda_2), \qquad \infty = f(\lambda_{\sigma+1})$$

besitzt. Dann wissen wir, dass sich jede zur Gruppe ϑ gehöri[redacted]ge Fuchs'sche Function rational durch z darstellen lässt, und dass ei[redacted]ne lineare Differentialgleichung von der Form (1) (Nr. 304, S. 168) e[redacted]xi-stirt, in welcher η als der Quotient der beiden Integrale

$$y_1 = \sqrt{\frac{dz}{d\eta}}, \qquad y_2 = \eta\sqrt{\frac{dz}{d\eta}}$$

erscheint.

Wenn η die Substitution

$$S_\nu \eta = \frac{\alpha_\nu \eta + \beta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}$$

der Gruppe ϑ erfährt, so verwandeln sich y_1, y_2 in

$$y_1^{(\nu)} = \pm(\delta_\nu y_1 + \gamma_\nu y_2),$$
$$y_2^{(\nu)} = \pm(\beta_\nu y_1 + \alpha_\nu y_2),$$

der Ausdruck

$$f'(z) = \frac{dz}{d\eta}$$

multiplicirt sich also mit

$$(\gamma_\nu \eta + \delta_\nu)^2.$$

Wir schliessen hieraus, dass das Product

$$(1) \qquad y_1^{-2m}\,\Theta(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} H\left(\frac{\alpha_\nu \eta + \beta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right)\frac{1}{(\gamma_\nu y_2 + \delta_\nu y_1)^{2m}},$$

m die Zahl bedeutet, zu welcher $\Theta(\eta)$ gehört, eine eindeutige Func-
ι von η ist, die bei den Substitutionen der Gruppe ϑ ungeändert
bt und sich innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 wie eine ratio-
› Function verhält. Also ist (1) eine Fuchs'sche Function, und
ınach eine rationale Function von z.

Der Ausdruck

$$H(\eta)\, y_1^{-2m}$$

offenbar eine rationale homogene Function $(-2m)^{\text{ten}}$ Grades der
y_2; bedeutet umgekehrt $\varphi(y_1, y_2)$ eine beliebige rationale homogene
ıction vom Grade $-2m$ in den y_1, y_2, so ist $\varphi(y_1, y_2)$ in der Form

$$\varphi(y_1, y_2) = y_1^{-2m}\, \Phi(\eta)$$

stellbar, wo $\Phi(\eta)$ eine rationale Function von η ist, und die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(y_1^{(\nu)}, y_2^{(\nu)}) \qquad \text{)}$$

demnach nichts anderes, wie ein Ausdruck von der Form (1).

Offenbar ist (1a) eine homogene (natürlich transcendente) Func-
ı vom Grade $(-2m)$ in den y_1, y_2, oder, wie wir kurz sagen wollen,
ɜ Form. Diese Form ist nach Multiplication mit y_1^{2m} eine eindeu-
› Function von η, wir nennen sie deshalb eine eindeutige Form;
hat ferner die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn die y_1, y_2
ɜ Substitution der homogenen Monodromiegruppe ϑ der Differential-
.chung (1) (Nr. 304, S. 168) erfahren, sie soll darum eine inva-
nte eindeutige Form heissen (vergl. Bd. II, 1, Nr. 195, S. 250).

Wir wollen allgemein eine homogene Function $H(y_1, y_2)$ von
y_2 vom Grade r, die sich durch Multiplication mit y_1^{-r} in eine
leutige Function

$$y_1^{-r} H(y_1, y_2) = \mathsf{H}(\eta)$$

η verwandelt und die gleich der Wurzel aus einer rationalen
ıction von z ist, eine invariante eindeutige Form von y_1, y_2
nen.

Offenbar ist der Grad r einer invarianten eindeutigen Form von
y_2 stets eine rationale Zahl.

Eine invariante eindeutige Form soll insbesondere eine ganze
m heissen, wenn dieselbe für solche endliche Werthe der y_1, y_2,
ən Quotient η innerhalb des Einheitskreises liegt, niemals unendlich
d, d. h. also wenn

$$H(y_1, y_2) = y_1^r\, \mathsf{H}(\eta) = R(z)$$

so beschaffen ist, dass die eindeutige Function $\mathsf{H}(\eta)$ für kein η innerhalb des Einheitskreises, und die Wurzel aus einer rationalen Function $R(z)$ nur so unendlich wird, wie y_1^{-r} verschwindet.

Jede invariante eindeutige Form ist dann als Quotient zweier ganzer Formen darstellbar.

Um die allgemeine Gestalt einer ganzen Form aufzustellen, haben wir zunächst die Art des Verschwindens von y_1 zu untersuchen.

Da zufolge unserer Voraussetzung die $A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$ elliptische Substitutionen sind, haben die ganzen Zahlen

$$g_1, g_2, \cdots g_{\sigma+1}$$

endliche Werthe. Bei geeigneter Wahl von η ist dann y_1 für jeden regulären Werth von z endlich und von Null verschieden, verschwindet für $z = a_\varkappa$ von der Ordnung

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

und wird für $z = a_{\sigma+1} = \infty$ wie die

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{g_{\sigma+1}}\right)^{\text{te}}$$

Potenz von z unendlich. Die Anzahl der einfach zu zählenden Nullstellen von y_1 ist demnach gleich

$$\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_\varkappa}\right) - 1 = -\frac{1}{\nu},$$

d. h. abgesehen von dem Factor 4π gleich dem superficiellen Inhalte des Fundamentalbereiches F_0.

Die Wurzel aus einer rationalen Function $R(z)$, die den Werth einer ganzen Form vom Grade r darstellt, hat also die Gestalt

$$(3) \qquad R(z) = \frac{G(z)}{\prod\limits_{\varkappa=1}^{\sigma}(z - a_\varkappa)^{-r\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_\varkappa}\right)}},$$

wo $G(z)$ die Wurzel aus einer rationalen Function von z bedeutet, deren Grad p einen Werth

$$p \leqq \frac{r}{\nu}$$

haben muss, damit $R(z)$ für $z = \infty$ von nicht niedrigerer Ordnung verschwindet wie y_1^r.

Sei der Zähler von $R(z)$

$$(4) \qquad G(z) = \prod_{i=1}^{\mu}(z - c_i)^{l_i},$$

die $c_1, c_2, \cdots c_\mu$ sämmtlich von einander verschieden und die $l_2, \cdots l_\mu$ positive rationale Zahlen sind, die der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{\mu} l_i = p$$

ügen, möge ferner $\eta = \gamma_i$ diejenige innerhalb des Fundamental-eiches F_0 gelegene Stelle bedeuten, für welche

$$c_i = f(\gamma_i) \qquad (i=1, 2, \cdots \mu),$$

n wird $\mathsf{H}(\eta)$ für die Stellen

$$S_\nu \gamma_i \qquad (\nu=0, 1, 2, \cdots; \; i=1, 2, \cdots \mu)$$

schwinden, und zwar, wenn c_i ein regulärer Punkt ist, von der Ord-ig l_i, dagegen, wenn c_i mit einem der im Endlichen gelegenen sin-ären Punkte, etwa mit $a_\varkappa$, zusammenfällt, von der Ordnung $l_i g_\varkappa$.

Da $\mathsf{H}(\eta)$ eine eindeutige Function von η sein sollte, so folgt hier-, dass für einen regulären Werth c_i der Exponent l_i nothwendig ganze Zahl, dagegen für $c_i = a_\varkappa$ ein ganzzahliges Vielfaches von

$$\frac{1}{g_\varkappa}$$

. muss.

Sind umgekehrt diese Bedingungen für die Exponenten l_i in einem idrucke von der Form (4) erfüllt, so ist der Ausdruck $R(z)$, wie er ch die Gleichung (3) dargestellt wird, so beschaffen, dass

$$y_1^{-r} R(z)$$

ler Umgebung jeder innerhalb des Einheitskreises gelegenen Stelle indeutig, also eine unverzweigte Function von η ist. Da das ere des Einheitskreises eine einfach zusammenhängende Fläche bildet, folgt hieraus, dass das Product (5) eine schlechthin eindeutige Func- von η sein muss, d. h. es stellt dann $R(z)$ auch stets eine ganze iriante eindeutige Form von y_1, y_2 dar.

Wir finden also für eine ganze invariante eindeutige Form r-ten des die Darstellung

$$H(y_1, y_2) = y_1^r \mathsf{H}(\eta) = \frac{M(z)}{\prod\limits_{\varkappa=1}^{\sigma} (z - a_\varkappa)^{\mu_\varkappa}},$$

die Zahlen $\mu_\varkappa$ den Ungleichungen

$$\mu_\varkappa < -r\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_\varkappa}\right) \qquad (\varkappa=1, 2, \cdots \sigma)$$

üge leisten und so beschaffen sind, dass die

$$-r\left(\frac{g_\varkappa}{2}-\frac{1}{2}\right)-\mu_\varkappa g_\varkappa$$

ganzzahlige Werthe haben, wo ferner $M(z)$ eine ganze rationale Function bedeutet, deren Grad p die Ungleichung

$$p \leqq \sum_{\varkappa=1}^{\sigma}\mu_\varkappa + r\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{g_{\sigma+1}}\right) \leqq \frac{r}{\nu}$$

erfüllt, und wo endlich auch

$$-r\left(\frac{g_{\sigma+1}}{2}+\frac{1}{2}\right)-\sum_{\varkappa=1}^{\sigma}\mu_\varkappa g_{\sigma+1}$$

eine ganze Zahl ist.

315. Theorie der ganzen Thetafunctionen.

Wenn die rationale Function $H(\eta)$, die zur Bildung der durch die Reihe (8) (Nr. 305, S. 175) definirten Fuchs'schen Thetafunction dient, an keiner innerhalb des Einheitskreises gelegenen Stelle η unendlich ist, so wird die Thetafunction $\Theta(\eta)$ selbst innerhalb des Einheitskreises allenthalben endlich sein. Wir wollen eine so beschaffene Thetafunction eine ganze Thetafunction nennen.

Bedeutet $\Theta(\eta)$ eine solche ganze Thetafunction, so ist offenbar das für dieselbe gebildete Product (1) (Nr. 314, S. 210) eine ganze invariante eindeutige Form von y_1, y_2, also in der Form (6) darstellbar. Da aber das Product (1) eine rationale Function von z sein muss, so haben, wenn in der Gleichung (6) die Function $\mathsf{H}(\eta)$ eine ganze Thetafunction bedeutet, die Zahlen

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots\ \mu_\sigma$$

ganzzahlige Werthe, und r ist gleich $-2m$. Es lässt sich also jede zur Zahl m gehörige ganze Thetafunction in die Form setzen

$$\Theta(\eta) = y_1^{2m}\frac{\vartheta_p(z)}{(z-a_1)^{\mu_1}(z-a_2)^{\mu_2}\cdots(z-a_\sigma)^{\mu_\sigma}}, \tag{7}$$

wo $\vartheta_p(z)$ eine ganze Function p-ten Grades von z, μ_1, μ_2, $\cdots\ \mu_\sigma$ ganze Zahlen bedeuten, und wo für die p, μ_1, μ_2, $\cdots\ \mu_\sigma$ die Ungleichungen

$$\begin{cases} \mu_\varkappa < m\left(1-\dfrac{1}{g_\varkappa}\right) \qquad (\varkappa=1,2,\cdots\sigma), \\ p < \displaystyle\sum_{\varkappa=1}^{\sigma}\mu_\varkappa - m\left(1+\frac{1}{g_{\sigma+1}}\right) < \frac{-2m}{\nu} \end{cases} \tag{8}$$

erfüllt sind.

Wenn die Zahl m gegeben ist, so ergeben die Ungleichungen (8) eine wohlbestimmte obere Grenze für den Grad p der ganzen rationalen Function $\vartheta_p(z)$. Sei diese obere Grenze $\mathfrak{g}_m$, so dass also p noch gleich $\mathfrak{g}_m - 1$ werden kann. Dann erhalten wir jedenfalls einen Ausdruck, in welchem die allgemeinste ganze und zur Zahl m gehörige Thetafunction enthalten sein muss, wenn wir bilden

$$(9) \qquad y_1^{2m} \frac{C_0 + C_1 z + \cdots + C_{\mathfrak{g}_m - 1} z^{\mathfrak{g}_m - 1}}{(z-a_1)^{\mu_1}(z-a_2)^{\mu_2}\cdots(z-a_\sigma)^{\mu_\sigma}},$$

wo $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_\sigma$ die grössten ganzen Zahlen bedeuten, die den Ungleichungen

$$\mu_\varkappa < m\left(1 - \frac{1}{g_\varkappa}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

Genüge leisten, und wo die $C_0, C_1, \cdots C_{\mathfrak{g}_m - 1}$ unbestimmte Constanten sind. Wir haben also den Satz:

Jede zur Zahl m gehörige ganze Thetafunction lässt sich homogen linear mit constanten Coefficienten durch $\mathfrak{g}_m$ geeignet gewählte, specielle derartige Functionen darstellen.

Es wären nun zwei Fälle möglich.

Von dem Ausdrucke (9) steht fest, dass sich derselbe durch $\mathfrak{g}_m$ und nicht durch weniger specielle Ausdrücke von derselben Gestalt homogen linear mit constanten Coefficienten darstellen lässt. Wenn nun jeder Ausdruck von der Form (9) auch durch eine ganze Thetafunction

$$(10) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} H(S_\nu \eta)\left(\frac{dS_\nu \eta}{d\eta}\right)^m$$

dargestellt werden kann, so lässt sich auch jede solche Thetafunction durch genau $\mathfrak{g}_m$ derselben und nicht durch weniger homogen linear mit constanten Coefficienten ausdrücken. Wenn dagegen nicht jeder Ausdruck (9) in die Form einer Thetareihe (10) gesetzt werden kann, so muss die allgemeinste, zur Zahl m gehörige ganze Thetafunction sich durch höchstens $\mathfrak{g}_m - 1$ ebenso beschaffene Thetafunctionen

$$(11) \qquad \Theta_i(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_i(S_\nu \eta)\left(\frac{dS_\nu \eta}{d\eta}\right)^m \qquad (i = 1, 2, \cdots \mathfrak{g}_m - 1)$$

homogen linear mit constanten Coefficienten ausdrücken lassen.

Es wird sich zeigen, dass die letztere Annahme auf einen Widerspruch führt.

316. Beweis, dass jede Fuchs'sche Function durch Thetafunctionen dargestellt werden kann.

Seien $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{\mathfrak{g}_m}$ irgend welche, z. B. innerhalb F_0 gelegene Werthe von η. Dann lassen sich stets $\mathfrak{g}_m$ Grössen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots \mathfrak{a}_{\mathfrak{g}_m}$ so bestimmen, dass die $\mathfrak{g}_m - 1$ homogenen Gleichungen

$$\mathfrak{a}_1 \Theta_i(\eta_1) + \mathfrak{a}_2 \Theta_i(\eta_2) + \cdots + \mathfrak{a}_{\mathfrak{g}_m} \Theta_i(\eta_{\mathfrak{g}_m}) = 0 \quad (i=1, 2, \cdots \mathfrak{g}_m - 1)$$

befriedigt werden.

Wenn nun jede ganze Thetafunction von der Form (10) durch die Functionen (11) homogen linear mit constanten Coefficienten darstellbar sein sollte, so müsste für jede rationale Function $H(\eta)$, die an keiner innerhalb des Einheitskreises gelegenen Stelle unendlich wird, die Gleichung

$$(12) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\mathfrak{g}_m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{a}_\varkappa H(S_\nu \eta_\varkappa)(\gamma_\nu \eta_\varkappa + \delta_\nu)^{-2m} = 0$$

identisch erfüllt sein.

Bilden wir uns den Ausdruck

$$\Phi(\eta, a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\eta - S_\nu a} \frac{1}{(\gamma_\nu a + \delta_\nu)^{2m}},$$

so stellt derselbe offenbar eine zur Zahl m gehörige Thetafunction von a dar, die sofern wir η und a auf das Innere des Einheitskreises beschränken, nur für $a = \eta$ und die mit η correspondirenden Stellen $S_\nu \eta$ unendlich wird, und zwar wird sie an diesen Stellen unendlich gross von der ersten Ordnung. Sei

$$S\eta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$$

rgend eine beliebige Substitution der Gruppe ϑ, dann ist

$$\Phi(S\eta, a) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{S\eta - S_i a} \left(\frac{dS_i a}{da}\right)^m,$$

und da offenbar

$$S\eta - b = -\frac{\gamma b - \alpha}{\gamma\eta + \delta}(\eta - S^{-1} b)$$

ist, so haben wir

$$\Phi(S\eta, a) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma\eta + \delta}{\eta - S^{-1} S_i a} \cdot \frac{-1}{\gamma(S_i a) - \alpha} \left(\frac{dS^{-1} S_i a}{da} \cdot \frac{dS_i a}{dS^{-1} S_i a}\right)^m.$$

zen wir

$$S^{-1} S_i = S_\nu ,$$

durchläuft S_ν alle Substitutionen der Gruppe ϑ, wenn i alle Werthe ι 0 bis ∞ annimmt, es ist demnach

$$\Phi(S\eta,\ a) = \sum_{\nu=0}^{\infty'} \frac{\gamma\eta + \delta}{\eta - S_\nu a} \frac{-1}{\gamma(SS_\nu a) - \alpha} \left(\frac{dS_\nu a}{da}\right)^m \left(\frac{dSS_\nu a}{dS_\nu a}\right)^m,$$

r, da

$$\frac{-1}{\gamma(SS_\nu a) - \alpha} = \gamma(S_\nu a) + \delta,$$

$$\frac{dSS_\nu a}{dS_\nu a} = \frac{1}{[\gamma(S_\nu a) + \delta]^2}$$

so ergiebt sich

$$\Phi(S\eta,\ a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\gamma\eta + \delta}{\eta - S_\nu a} \left(\frac{dS_\nu a}{da}\right)^m \frac{1}{[\gamma(S_\nu a) + \delta]^{2m-1}}.$$

Die Differenz

$$\Phi(S\eta,\ \eta_\varkappa) - (\gamma\eta + \delta)^{-2(m-1)} \Phi(\eta,\ \eta_\varkappa)$$

giebt sich demnach gleich

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{dS_\nu \eta_\varkappa}{d\eta_\varkappa}\right)^m \frac{1}{\eta - S_\nu \eta_\varkappa} \left\{ \frac{\gamma\eta + \delta}{[\gamma(S_\nu \eta_\varkappa) + \delta]^{2m-1}} - \frac{1}{(\gamma\eta + \delta)^{2m-2}} \right\}.$$

tzen wir also

3) $$\mathfrak{H}(u) = \frac{1}{(\gamma\eta + \delta)^{2m-2}} \frac{1}{(\gamma u + \delta)^{2m-1}} \frac{(\gamma\eta + \delta)^{2m-1} - (\gamma u + \delta)^{2m-1}}{\eta - u},$$

finden wir die identische Gleichung

4) $$\Phi(S\eta,\ \eta_\varkappa) - (\gamma\eta + \delta)^{-2m+2} \Phi(\eta,\ \eta_\varkappa) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{H}(S_\nu \eta_\varkappa) \left(\frac{dS_\nu \eta_\varkappa}{d\eta_\varkappa}\right)^m.$$

Die durch die Gleichung (13) definirte rationale Function $\mathfrak{H}(u)$ n u wird an keiner innerhalb des Einheitskreises gelegenen Stelle u endlich, es müsste folglich für dieselbe die Gleichung (12) er-lt sein.

Setzen wir also

5) $$\Delta(\eta) = \sum_{\varkappa=1}^{9m} \mathfrak{a}_\varkappa \Phi(\eta,\ \eta_\varkappa),$$

ergäbe sich aus der für $\mathfrak{H}(u)$ bestehenden Gleichung (12) mit Rück-ht auf (14)

$$\Delta(S\eta) = (\gamma\eta + \delta)^{-2(m-1)}\Delta(\eta),$$

und zwar müsste diese Gleichung für jede Substitution S der Gruppe $\mathfrak{G}$ erfüllt sein.

Wir schliessen hieraus, dass

$$y_1^{2m-2}\Delta(\eta)$$

eine zur Gruppe $\mathfrak{G}$ gehörige Fuchs'sche Function darstellt, also rational durch z ausdrückbar sein muss; sei

(16) $$y_1^{2m-2}\Delta(\eta) = \Re(z),$$

so haben wir also

(17) $$\Delta(\eta) = y_1^{-2m+2}\Re(z).$$

Die Gleichung (15) lehrt, dass die Function $\Delta(\eta)$ innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 nur an den $\mathfrak{g}_m$ Stellen

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots\ \eta_{\mathfrak{g}_m}$$

von der ersten Ordnung unendlich wird, der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (17) könnte demnach als Function von z nur an den $\mathfrak{g}_m$ Stellen

$$z = f(\eta_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \mathfrak{g}_m)$$

von der ersten Ordnung unendlich werden.

Aus der Art, wie y_1 an den Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1} = \infty$ verschwindet, schliessen wir demnach, dass sich die rationale Function $\Re(z)$ in der Form

(18) $$\Re(z) = \frac{(z-a_1)^{\tau_1}(z-a_2)^{\tau_2}\cdots(z-a_\sigma)^{\tau_\sigma}}{\prod\limits_{\varkappa=1}^{\mathfrak{g}_m}(z - f(\eta_\varkappa))}$$

darstellen lassen muss, wo die Zahlen $\tau_1, \tau_2, \cdots \tau_\sigma$ die Ungleichungen

(19) $$\tau_\varkappa > (m-1)\left(1 - \frac{1}{g_\varkappa}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

erfüllen, und $\mathfrak{g}_m$ die Ungleichung

(20) $$\mathfrak{g}_m > \sum_{\varkappa=1}^{\sigma}\tau_\varkappa - (m-1)\left(1 + \frac{1}{g_{\sigma+1}}\right)$$

befriedigen müsste. Vergleichen wir (19) mit der ersten der Ungleichungen (8), so finden wir

$$\tau_\varkappa \geq \mu_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma),$$

dadurch steht aber die Ungleichung

$$\mathfrak{g}_m < \sum_{\varkappa=1}^{\sigma} \mu_\varkappa - m\left(1 + \frac{1}{g_{\sigma+1}}\right) + 1,$$

der $\mathfrak{g}_m$ seiner Definition gemäss genügen muss, mit der Ungleichung (20) im Widerspruch.

Es ist also nicht möglich, jede ganze Thetafunction von der Form (10) durch weniger wie $\mathfrak{g}_m$ specielle solche Functionen homogen linear mit constanten Coefficienten darzustellen. Nach den Bemerkungen am Schlusse der vorigen Nummer (S. 215) folgt hieraus der wichtige Satz:

Bedeutet m irgend eine ganze Zahl, die grösser ist wie Eins, so lässt sich jeder Ausdruck von der Form (9) als eine ganze zur Zahl m gehörige Fuchs'sche Thetafunction darstellen.

Auf Grund dieses Satzes ist unmittelbar evident, dass jede Fuchs'sche Function, die zur Gruppe ϑ gehört, d. h. jede rationale Function von z, in der am Schlusse der Nr. 313 (S. 209) angegebenen Weise als ein Quotient von ganzen rationalen Combinationen von Fuchs'schen Thetafunctionen, ja sogar von ganzen Thetafunctionen dargestellt werden kann.

317. Primformen. Wurzeln aus rationalen Functionen der unabhängigen Variabeln, die eindeutige Functionen des Integralquotienten sind.

Wir wollen nun noch eine andere Darstellungsart der Fuchs'schen Functionen kennen lernen, die uns nicht nur diese Functionen selbst, sondern auch gewisse aus denselben gebildete Wurzelausdrücke, die eindeutige Functionen von η sind, liefern wird. Wir gehen zu dem Ende auf den Begriff der allgemeinen ganzen invarianten eindeutigen Form von y_1, y_2 zurück und führen nach der Analogie der für endliche Gruppen in der Nr. 294 (S. 132) aufgestellten Definition auch hier den Begriff der Primform ein.

Wir wollen für eine beliebige Fuchs'sche Gruppe ohne parabolische Substitutionen eine ganze invariante eindeutige Form $H(y_1, y_2)$ eine Primform nennen, wenn das zu dieser Form $H(y_1, y_2)$ gehörige

$$\mathsf{H}(\eta) = y_1^{-r} H(y_1, y_2)$$

innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 nur an einer einzigen Stelle η und an dieser von der ersten Ordnung verschwindet.

Aus dieser Definition und aus den Erörterungen der Nr. 314 (S. 213) folgt, dass eine Primform durch Angabe ihrer Nullstelle innerhalb des Fundamentalbereiches F_0, abgesehen von einem constanten Factor, eindeutig bestimmt ist.

Sei zunächst diese Nullstelle $\eta = \gamma$ keine Ecke von F_0, dann ist $z = f(\gamma)$ ein regulärer Punkt unserer Differentialgleichung (1) (Nr. 304, S. 168) und folglich

$$z - f(\gamma) = \varepsilon_1(\eta - \gamma) + \varepsilon_2(\eta - \gamma)^2 + \cdots,$$

wir haben also, um die Darstellung der zur Nullstelle $\eta = \gamma$ gehörigen Primform zu erhalten, in dem Ausdrucke (6) (Nr. 314, S. 213)

$$M(z) = z - f(\gamma), \quad p = 1,$$

$$\mu_i = -r\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_i}\right) \qquad (i=1,2,\cdots\sigma),$$

zu setzen. Da ferner

$$p = \frac{r}{\nu}$$

sein muss, ergiebt sich $r = \nu$, die betreffende Primform lautet also

$$F_\gamma(y_1, y_2) = (z - f(\gamma))\prod_{i=1}^{\sigma}(z - a_i)^{\nu\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_i}\right)} = y_1^{\nu}\mathfrak{X}_\gamma(\eta),$$

wo $\mathfrak{X}_\gamma(\eta)$ eine eindeutige Function von η bedeutet.

Handelt es sich um die Aufstellung einer für $\eta = \lambda_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$ verschwindenden Primform, so haben wir in der Umgebung von $\eta = \lambda_\varkappa$

$$z - a_\varkappa = \varepsilon_1(\eta - \lambda_\varkappa)^{g_\varkappa} + \varepsilon_2(\eta - \lambda_\varkappa)^{g_\varkappa + 1} + \cdots,$$

also ist in dem Ausdrucke (3) der Nr. 314 (S. 212)

$$G(z) = (z - a_\varkappa)^{\frac{1}{g_\varkappa}}, \quad p = \frac{1}{g_\varkappa} = \frac{r}{\nu}$$

zu nehmen; es ergiebt sich demnach

$$r = \frac{\nu}{g_\varkappa},$$

und die betreffende Primform hat die Gestalt

$$F_\varkappa(y_1, y_2) = (z - a_\varkappa)^{\frac{1}{g_\varkappa}}\prod_{i=1}^{\sigma}(z - a_i)^{\frac{\nu}{g_\varkappa}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_i}\right)} = y_1^{\frac{\nu}{g_\varkappa}}\mathfrak{X}_\varkappa(\eta)$$

$$(\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma),$$

wo $\mathfrak{X}_\varkappa(\eta)$ eine eindeutige Function von η bedeutet.

Endlich ergiebt sich für die an der Stelle $\eta = \lambda_{\sigma+1}$ und den correspondirenden Stellen verschwindende Primform die Darstellung

$$F_{\sigma+1}(y_1, y_2) = \prod_{i=1}^{\sigma}(z - a_i)^{\frac{\nu}{g_{\sigma+1}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_i}\right)} = y_1^{\frac{\nu}{g_{\sigma+1}}}\mathfrak{X}_{\sigma+1}(\eta),$$

wo auch wieder $\mathfrak{X}_{\sigma+1}(\eta)$ eindeutig in η ist.

Für diese Primformen gelten nun analoge Sätze, wie die, welche wir für die Primformen in dem Falle einer endlichen Gruppe gefunden hatten. Wir heben nur einige dieser Sätze besonders hervor.

1. **Zwischen je drei Primformen ν-ten Grades findet eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten statt.**

In der That, seien

$$F_{\gamma_1}, F_{\gamma_2}, F_{\gamma_3}$$

drei solche Primformen, deren Nullstellen innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 beziehungsweise durch $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ gegeben werden, so ist offenbar

$$[f(\gamma_3) - f(\gamma_2)]\, F_{\gamma_1}(y_1, y_2) + [f(\gamma_1) - f(\gamma_3)]\, F_{\gamma_2}(y_1, y_2) + [f(\gamma_2) - f(\gamma_1)]\, F_{\gamma_3}(y_1, y_2) = 0.$$

2. **Das Gleiche gilt für irgend drei Formen, die entweder Primformen ν-ten Grades oder solche von absolut genommen niedrigerem Grade**

$$\frac{\nu}{g_\varkappa}$$

zur $(g_\varkappa)$-ten Potenz erhoben sind. Es lässt sich also die allgemeine Primform ν-ten Grades in der Gestalt

$$\alpha F_\varkappa^{g_\varkappa}(y_1, y_2) + \beta F_i^{g_i}(y_1, y_2)$$

darstellen, wo die $\varkappa$, i zwei verschiedene der Zahlen $1, 2, \cdots \sigma + 1$ und die α, β Constanten bedeuten.

3. **Zwischen den Primformen und den aus denselben gebildeten Functionaldeterminanten bestehen analoge Beziehungen, wie die für den Fall endlicher Gruppen gefundenen** (Nr. 295, S. 134).

Es ist nämlich

$$21) \qquad z - a_\varkappa = \frac{F_\varkappa^{g_\varkappa}(y_1, y_2)}{F_{\sigma+1}^{g_{\sigma+1}}(y_1, y_2)} = \frac{\mathfrak{X}_\varkappa^{g_\varkappa}(\eta)}{\mathfrak{X}_{\sigma+1}^{g_{\sigma+1}}(\eta)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma);$$

setzt man diese Werthe in den Ausdruck der Primform $F_{\sigma+1}(y_1, y_2)$ ein, so ergiebt sich

$$y_1^{\,2} F_{\sigma+1}^{2 g_{\sigma+1}}(y_1, y_2) = \prod_{i=1}^{\sigma+1} F_i^{g_i - 1}(y_1, y_2).$$

Vergleicht man diese Gleichung mit den durch Differentiation aus den Gleichungen (21) und aus

$$(22)\qquad z - f(\gamma) = \frac{F_\gamma(y_1, y_2)}{F_{\sigma+1}^{g_{\sigma+1}}(y_1, y_2)} = \frac{\mathfrak{X}_\gamma(\eta)}{\mathfrak{X}_{\sigma+1}^{g_{\sigma+1}}(\eta)}$$

hervorgehenden Beziehungen, so findet man, ähnlich wie in der Nr. 295 (S. 134) die Relationen (32) gefunden wurden, die Formeln

$$\frac{g_\varkappa\, g_{\sigma+1}}{\nu}(F_{\sigma+1}, F_\varkappa) = \frac{F_1^{g_1-1} \cdot\cdot F_\sigma^{g_\sigma-1}}{F_\varkappa^{g_\varkappa-1}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma),$$

$$\frac{g_{\sigma+1}}{\nu}(F_{\sigma+1}, F_\gamma) = F_1^{g_1-1} \cdots F_\sigma^{g_\sigma-1},$$

wo die Functionaldeterminante in ähnlicher Weise bezeichnet wurde, wie dies für algebraische Formen üblich ist.

4. **Jede ganze invariante eindeutige Form der y_1, y_2 lässt sich als ein Product von Primformen darstellen.**

Um nun zu einer Darstellung der Primformen durch die y_1, y_2 selbst zu gelangen, betrachten wir den Ausdruck:

$$(23)\qquad F(y_1, y_2) = y_1^\nu\, \mathfrak{X}(\eta) = (az + b)\prod_{i=1}^{\sigma}(z - a_i)^{\nu\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_i}\right)}.$$

Derselbe stellt im Allgemeinen die für

$$z = -\frac{b}{a}$$

verschwindende Primform ν-ten Grades, dagegen, wenn $-\frac{b}{a}$ gleich einem der Werthe $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \infty$ ist, die $g_\varkappa$-te Potenz der zu dem betreffenden Punkte $a_\varkappa$ gehörigen Primform dar.

Sei ϱ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen

$$g_1, g_2, \cdots g_{\sigma+1},$$

und setzen wir

$$g = -\frac{2\varrho}{\nu} = \varrho\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\left(1 - \frac{1}{g_\varkappa}\right) - 2\varrho,$$

so ist g eine positive ganze Zahl, und der Ausdruck

$$(24)\qquad [\mathfrak{X}(\eta)]^g = y_1^{2\varrho}(az + b)^\varrho\prod_{i=1}^{\sigma}(z - a_i)^{\varrho\left(1 - \frac{1}{g_\varkappa}\right)}$$

hat die Form (9) (Nr. 315, S. 215). Zufolge des Satzes der Nr. 31[illegible] (S. 219) lässt sich dieser Ausdruck durch eine zu der Zahl ϱ gehörige ganze Thetafunction

$$\Theta(\eta) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} H(S_\lambda \eta) \left(\frac{d S_\lambda \eta}{d\eta}\right)^{\varrho}$$

rstellen, so dass also

$$F(y_1, y_2) = y_1^{\nu} \sqrt[g]{\Theta(\eta)}$$

rd.

Dieser Darstellung einer Primform haftet der Mangel an, dass sie, nn $g > 1$ ist, die Eindeutigkeit der von dem Factor y_1^{μ} befreiten imform μ-ten Grades (wo

$$\mu = \nu, \ \frac{\nu}{g_1}, \ \cdots \ \frac{\nu}{g_{\sigma+1}}$$

n kann) nicht unmittelbar hervortreten lässt. Sie lehrt uns aber, ss die g-te Potenz der Primformen ν-ten Grades und die $g g_x$-te Poız der Primform $F_x(y_1, y_2)$ rationale Functionen von z sind, und ss dies auch für keine niedrigere Potenz jener Primformen der Fall . Ferner erhalten wir eine übersichtliche Darstellung derjenigen urzeln aus rationalen Functionen von z, die gleich eindeutigen Funcnen von η werden.

318. **Der Fall, wo eine parabolische Substitution auftritt.**

Ein wesentlicher Theil der hier unter der Voraussetzung, dass e Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$ elliptische sind, entwickelten Re-.tate ist ohne Weiteres, ein anderer Theil ist mit leichten Modificanen auf den allgemeinen Fall, wo die Gruppe auch parabolische Subtutionen enthält, übertragbar. Das Charakteristische ist, dass man, nn einige der Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$ parabolische sind, . der Definition einer invarianten eindeutigen Form die Bedingung, ss eine solche Form gleich der Wurzel aus einer rationalen Function n z sein soll, durch die allgemeinere zu ersetzen hat, wonach nicht nur urzeln aus rationalen Functionen, sondern auch Logarithmen solcher nctionen von z zuzulassen sind. Wir versagen es uns, die Unterchung in diesem allgemeinen Falle hier durchzuführen und wollen r mit wenigen Worten auf den Fall eingehen, wo eine der Subutionen der Basis unserer Gruppe eine parabolische ist.

Man kann alsdann, wie Herr Klein in dem speciellen Falle $= 2$ bemerkt hat, durch einen einfachen Kunstgriff die volle Gültkeit der für Gruppen ohne parabolische Substitutionen erzielten sultate bewirken.

Wir können nämlich voraussetzen, dass die betreffende parabolische bstitution gerade $A_{\sigma+1}$ ist, und können uns überdies η so gewählt nken, dass $A_{\sigma+1}$ die canonische Form

$$A_{\sigma+1}\eta = \eta + \gamma_{\sigma+1}$$

besitzt. Dann ist also in der Differentialgleichung (1) der Nr. 3[illegible] (S. 168) $z = \infty$ der einzige logarithmische singuläre Punkt, und wir haben, wenn

$$t = e^{\frac{2\pi i}{\gamma_{\sigma+1}}\eta}$$

gesetzt wird, in der Umgebung von $t = 0$

$$\frac{1}{z} = t\mathfrak{P}(t), \qquad y_1 = \frac{1}{t}\mathfrak{P}_1(t),$$

wo $\mathfrak{P}(t)$, $\mathfrak{P}_1(t)$ gewöhnliche Potenzreihen von t bedeuten, die für $t = 0$ nicht verschwinden.

Die Endlichkeit der durch den Ausdruck (6) (Nr. 314, S. 213) definirten ganzen invarianten Form $H(y_1, y_2)$, ebenso wie die der Primformen

$$F_\gamma(y_1, y_2), \qquad F_\varkappa(y_1, y_2) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

bleibt dann gewahrt, auch wenn η so in den Punkt $\eta = \infty$ einrückt, wie es einrücken muss, damit $\frac{1}{z}$ verschwinde. Dagegen spielt für $z = \infty$ die Form

$$\Phi(y_1, y_2) = \prod_{\varkappa=1}^{\sigma}(z - a_\varkappa)^{\nu\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_\varkappa}\right)}$$

dieselbe Rolle, wie für einen nicht logarithmisch singulären Punkt die $(g_\varkappa)$-te Potenz der Primform $F_\varkappa(y_1, y_2)$.

Im Falle der Gauss'schen Differentialgleichung ($\sigma = 2$) hat Halphén die Primformen oder, genauer gesagt, die denselben entsprechenden eindeutigen Functionen $\mathfrak{X}_\gamma$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$ von η zuerst allgemein (d. h. für die transcendenten Fälle eines eindeutig umkehrbaren Integralquotienten) betrachtet. In dem besonderen Falle $g_1 = 3$, $g_2 = 2$, $g_3 = \infty$, d. h. für die Function

$$\tau = s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0, J\right),$$

hat Herr Klein die expliciten Ausdrücke für die entsprechenden Primformen aufgestellt. Sie stimmen dann im Wesentlichen mit den Weierstrass'schen Ausdrücken für die beiden Invarianten g_2, g_3 und die Discriminante Δ der biquadratischen Form (IV) (Nr. 276, S. 69) überein, deren absolute Invariante durch J gegeben ist. Da in diesem Falle $\nu = -12$, $\varrho = 6$ ist, so haben wir

$$g = -\frac{2\varrho}{\nu} = 1,$$

d. h. die Primformen ν-ten Grades sind dann direct rationale Functionen von J, also durch ganze Thetafunctionen darstellbar.

Viertes Kapitel.

319. Abänderung des Fundamentalbereiches. Symmetrische Gruppen. Spiegelungen.

Wir wollen nun einen besonders interessanten und wichtigen Specialfall Fuchs'scher Gruppen beziehungsweise Functionen ins Auge fassen, der als die unmittelbare Verallgemeinerung der eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunctionen angesehen werden kann.

Der Umstand, dass wir die Seiten des Fundamentalbereiches F_0 als Kreise, die den Orthogonalkreis (Einheitskreis) rechtwinkelig schneiden, gewählt hatten, bewirkt, dass die Querschnitte, durch welche die Ebene der unabhängigen Variabeln z der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dz^2} = q(z)y \tag{1}$$

zerschnitten ist, eine völlig bestimmte Gestalt haben.

Für $\sigma = 2$ ist F_0 ein Kreisbogenviereck mit den Ecken $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3'$; legen wir dann durch λ_1, λ_2 einen den Orthogonalkreis unter rechtem Winkel schneidenden Kreis s_0, so zerfällt das Viereck F_0 in zwei in Bezug auf s_0 symmetrische Dreiecke, d. h. in zwei Dreiecke, die Spiegelbilder von einander in Bezug auf den Kreis s_0 sind. Wir kommen also dann auf die Fig. 19 (Nr. 269, S. 38), d. h. in diesem Falle sind die Querschnitte, die von $z = 0$ und $z = 1$ aus nach $z = \infty$ hingelegt sind, Theile der realen z-Axe.

Würden wir nicht $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$ nehmen, so würde offenbar der Begrenzung des Kreisbogendreiecks $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ der η-Ebene, die Peripherie des durch die drei Punkte a_1, a_2, a_3 gelegten Kreises der z-Ebene entsprechen, und es wäre von den beiden Dreiecken

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3')$$

der η-Ebene das eine die Abbildung des Innern, das andere die Abbildung des Äussern jenes durch die Punkte a_1, a_2, a_3 hindurchgelegten Kreises der z-Ebene. In diesem Falle wären also die von a_1, a_2 nach a_3 hin gelegten Querschnitte der z-Ebene Kreisbogen.

Wir wollen für $\sigma > 2$ die bereits in der Nr. 210 (Bd. II, 1, S. 31
ausgeführte erlaubte Abänderung des Fundamentalbereiches F_0 vornehm
und uns dabei so einrichten, dass der neue Fundamentalbereich, de
wir durch R_0 bezeichnen, auch von Kreisbogen, die den Einheitskre
orthogonal schneiden, begrenzt werde.

Legen wir zu dem Ende durch die Ecken λ_1, λ_2, ferner durc
λ_2, λ_3, u. s. w., endlich durch $\lambda_{\sigma-1}$, λ_σ innerhalb F_0 verlaufende Krei
bogen, die den Einheitskreis unter rechten Winkeln schneiden, füge
wir ferner dem von Kreisbogen begrenzten $(\sigma + 1)$-ecke

$$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{\sigma-1}, \lambda_\sigma, \lambda_{\sigma+1})$$

die folgenden sich schlicht an einander lagernden Kreisbogendreiec
hinzu

$$(\lambda_1, \quad \lambda_2', \quad \lambda_{\sigma+1}) = A_1^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{\sigma+1}'),$$

$$(\lambda_2', \quad \lambda_3', \quad \lambda_{\sigma+1}) = A_1^{-1} A_2^{-1}(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_{\sigma+1}''),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\lambda_{\sigma-1}', \lambda_\sigma', \lambda_{\sigma+1}) = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots\cdot A_{\sigma-1}^{-1}(\lambda_{\sigma-1}, \lambda_\sigma, \lambda_{\sigma+1}^{(\sigma-1)}),$$

so erhalten wir den Bereich R_0. Die Ecken dieses neuen Fundament
bereiches sind

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots \lambda_\sigma, \lambda_{\sigma+1}, \lambda_\sigma', \cdots \lambda_3', \lambda_2',$$

von denselben bilden λ_1, $\lambda_{\sigma+1}$ je einen eingliedrigen Cyklus, währe

$$\lambda_\varkappa, \lambda_\varkappa' \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots \sigma)$$

die übrigen (zweigliedrigen) Cykeln ausmachen. Die Seiten

$$(\lambda_\varkappa, \lambda_{\varkappa+1}) = t_\varkappa, \quad (\lambda_\varkappa', \lambda_{\varkappa+1}') = t_\varkappa' \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

von R_0, wo $\lambda_1' = \lambda_1$, $\lambda_{\sigma+1}' = \lambda_{\sigma+1}$ zu nehmen ist, sind Kreisbo
die den Einheitskreis rechtwinkelig schneiden, und $t_\varkappa'$ geht aus $t_\varkappa$ d
die Substitution

$$S_\varkappa = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_\varkappa^{-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma) \tag{2}$$

hervor.

In der z-Ebene entsprechen den Seiten von R_0 die beiden
eines von a_1 über a_2, a_3, $\cdots a_\sigma$ nach $a_{\sigma+1} = \infty$ hingelegten
schnittes l (vergl. die Fig. 4, Bd. II, 1, S. 311) und zwar entspric
linke (positive) Ufer des zwischen $a_\varkappa$, $a_{\varkappa+1}$ verlaufenden Quer
stückes der Seite $t_\varkappa'$, das rechte (negative) Ufer eben dieses Stü
Seite $t_\varkappa$ von R_0*). Die Seite s_1 des alten Fundamentalbereiche

*) a. a. O. ist $t_\varkappa$ durch $\bar{s}_\varkappa'$, $t_\varkappa'$ durch $\bar{s}_\varkappa$ und $\lambda_\varkappa'$ durch $\bar{\lambda}_\varkappa$ bezei
$\varkappa = 2, 3, \cdots \sigma$.

ir als **Diagonale** von R_0 auf, sie entspricht (was wir hier in Erinnerung bringen wollen) dem negativen Ufer des von a_1 nach $a_{\sigma+1}$ ingelegten Querschnittes l_1, welches mit dem negativen Ufer von zusammengenommen eine die singulären Punkte der Differentialgleiung (1) unter einander verbindende geschlossene Linie bildet. Durch ie Diagonale s_1 zerfällt R_0 in zwei Theile

$$(\lambda_{\sigma+1}, \lambda_\sigma, \cdots \lambda_2, \lambda_1, \lambda_{\sigma+1}) = R_0'$$

nd

$$(\lambda_{\sigma+1}, \lambda_\sigma', \cdots \lambda_2', \lambda_1', \lambda_{\sigma+1}) = R_0'';$$

lieselben entsprechen je einem der beiden Bereiche, in welche die -Ebene durch die erwähnte geschlossene Linie zerlegt wird.

Der Gleichmässigkeit wegen wollen wir im Folgenden die Diagonale s_1 mit t_0 bezeichnen; die ganze geschlossene Linie, die aus dem Querschnitte $\bar{l}$ und aus l_1 besteht, nennen wir (wie a. a. O.) l und den isher mit l_1 bezeichneten Theil von l nennen wir l_0.

Es kann sich nun ereignen, dass die beiden Bereiche R_0', R_0'', in velche R_0 durch die Diagonale t_0 zerlegt wird, **Spiegelbilder** von inander in Bezug auf den Kreis t_0 sind, d. h. dass der Bereich R_0 aus len beiden in Bezug auf die Diagonale t_0 **symmetrischen** Hälften R_0', R_0'' besteht. Wenn dies der Fall ist, so sagen wir kurz, der Fundamentalbereich R_0 sei **symmetrisch** und bezeichnen auch die Gruppe ϑ als eine **symmetrische Fuchs'sche Gruppe**.

Da bei der Spiegelung in Bezug auf einen Kreis die Winkel erhalten bleiben, sind die Winkel der beiden Bereiche R_0', R_0'' bei entsprechenden Ecken $\lambda_\varkappa$, $\lambda_\varkappa'$ dieselben, d. h. da die Winkelsummen bei en Ecken der Cykeln

$$\lambda_1;\quad \lambda_2, \lambda_2';\quad \lambda_3, \lambda_3';\ \cdots\ \lambda_\sigma, \lambda_\sigma';\quad \lambda_{\sigma+1}$$

eziehungsweise

$$\frac{2\pi}{g_1};\quad \frac{2\pi}{g_2};\quad \frac{2\pi}{g_3};\quad \cdots\quad \frac{2\pi}{g_\sigma};\quad \frac{2\pi}{g_{\sigma+1}}$$

tragen, sind die Winkel von R_0' bei den Ecken $\lambda_\varkappa$ gleich

$$\frac{\pi}{g_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma+1)\,.$$

Sei die Gleichung des Kreises $t_\varkappa$

$$c_\varkappa \eta \bar{\eta} + a_\varkappa \eta + \bar{a}_\varkappa \bar{\eta} + b_\varkappa = 0, \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma),$$

$c_\varkappa$, $b_\varkappa$ reale Grössen bedeuten und

$$-a_\varkappa \bar{a}_\varkappa + b_\varkappa c_\varkappa = -1$$

ist, dann ist die zu diesem Kreise gehörige Spiegelung

$$B_\varkappa \bar{\eta} = \frac{-\bar{a}_\varkappa \bar{\eta} - b_\varkappa}{c_\varkappa \bar{\eta} + a_\varkappa}.$$

Wenn η auf $t_\varkappa$ liegt, so ist für $\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma$

$$\eta = B_\varkappa \bar{\eta},$$

also, da die Spiegelung $B_\varkappa$, wenn man in jedem Coefficienten derselben $+i$ in $-i$ verwandelt, in $B_\varkappa^{-1}$ übergeht,

$$\bar{\eta} = B_\varkappa^{-1} \eta.$$

Das Spiegelbild eines Punktes η von $t_\varkappa$ in Bezug auf den Diagonalkreis t_0 ist der correspondirende Punkt $S_\varkappa \eta$ von $t_\varkappa'$, wir haben demnach

$$S_\varkappa \eta = B_0 \bar{\eta} = B_0 B_\varkappa^{-1} \eta \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma),$$

d. h. die Substitution, welche $t_\varkappa$ in $t_\varkappa'$ verwandelt, lautet

(3) $$S_\varkappa = B_0 B_\varkappa^{-1},$$

und die Gleichung des Kreises $t_\varkappa'$ lässt sich in der Form

$$\eta = B_0 B_\varkappa^{-1} B_0 \bar{\eta}$$

darstellen.

320. Besondere Gestalt des Querschnittsystems. Abbildungsproblem.

Betrachten wir nun die Function z, die bei den Substitutionen der symmetrischen Fuchs'schen Gruppe ungeändert bleibt und innerhalb des Fundamentalbereiches R_0 jeden Werth nur einmal annimmt, so können wir die Werthe, die z erhält, wenn η die Begrenzung des Kreisbogenpolygons R_0' durchläuft, mit Leichtigkeit charakterisiren.

Bedeute η einen Punkt im Innern von R_0, und sei

$$z = f(\eta)$$

der entsprechende Punkt in der durch den Querschnitt $\bar{l}$ zerschnittenen z-Ebene. Gehen wir von η auf einer im Innern von R_0 verbleibenden Curve nach dem Spiegelbilde $B_0 \bar{\eta}$ von η in Bezug auf t_0, so geht z auf einem in der zerschnittenen Ebene verlaufenden Wege, der die geschlossene Curve l in einem Punkte von l_0 überschreitet, nach dem Punkte

$$z_0 = f(B_0 \bar{\eta}).$$

Die Punkte z und z_0 sind dann einander gegenseitig eindeutig zugeordnet, jedoch ist z_0 keine monogene Function der complexen

Variabeln z, da z_0 eine monogene Function von $\bar{\eta}$, z aber eine monogene Function von η ist.

Dagegen ist der conjugirte Werth von z

$$\bar{z} = \overline{f(\eta)}$$

eine monogene Function von $\bar{\eta}$, also ist auch z_0 eine monogene Function von $\bar{z}$. Das gegenseitig eindeutige Entsprechen von z_0 und z bewirkt ein gegenseitig eindeutiges Entsprechen von z_0 und $\bar{z}$. Hat man aber zwei complexe Variable, die monogene Functionen von einander sind, und weiss man, dass die Werthe dieser beiden Variabeln einander ausnahmslos gegenseitig eindeutig zugeordnet sind, so folgt nach einem bekannten Satze der Functionentheorie, dass die beiden Variabeln ganze oder gebrochene lineare Functionen von einander sein müssen.

Also ist z_0 eine lineare Function von $\bar{z}$,

$$z_0 = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Gehen wir nun von dem Punkte $B_0\bar{\eta}$ auf einem ebenfalls innerhalb R_0 verlaufenden Wege nach dem Punkte η, d. h. nach dem Spiegelbilde von $B_0\bar{\eta}$ in Bezug auf den Kreis t_0 zurück, so bewegt sich der entsprechende Punkt der z-Ebene von z_0 ausgehend auf einer in der zerschnittenen z-Ebene verlaufenden Bahn nach dem Punkte z hin; es muss folglich z aus z_0 ebenso hervorgehen, wie z_0 aus z, d. h. wir haben

$$z = \frac{\alpha \bar{z}_0 + \beta}{\gamma \bar{z}_0 + \delta}.$$

Die vier Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind demnach so beschaffen, dass

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & \bar{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = 1$$

ist, wir können folglich nach den Ergebnissen der Nr. 268 (S. 35, 36) die Beziehung zwischen z_0 und $\bar{z}$ in die Form setzen

$$z_0 = \frac{-\bar{a}\bar{z} - b}{c\bar{z} + a}, \qquad -a\bar{a} + bc = -1,$$

wo b, c reale Grössen bedeuten.

Nun ist offenbar, wenn η auf dem Kreisbogen t_0 liegt, z_0 mit z identisch. Bedeutet ferner η einen Punkt, der einem der Kreisbogen $t_\varkappa$ angehört, so ist das Spiegelbild von η in Bezug auf t_0 in der Form

$$S_\varkappa \eta = B_0 B_\varkappa^{-1} \eta \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

darstellbar. D. h. es ist in diesem Falle

$$B_0 \bar{\eta} = S_\varkappa \eta,$$

und da allgemein für jedes η

$$f(S_\varkappa \eta) = f(\eta)$$

ist, so haben wir also auch für einen auf $t_\varkappa$ gelegenen η-Werth

$$f(\eta) = f(B_0 \bar{\eta}),$$

d. h. auch wenn η auf einem der Kreisbogen

$$t_1, t_2, \cdots t_\sigma$$

gelegen ist, wird z_0 mit z identisch.

Die den Punkten der Begrenzung von R_0' entsprechen den z-Werthe befriedigen folglich die Gleichung

$$z = \frac{-\bar{a}\bar{z} + b}{c\bar{z} + a},$$

d. h. sie liegen auf einem Kreise.

Im Falle einer symmetrischen Gruppe $\mathfrak{G}$ liegen also die z-Werthe, die den Ecken des Fundamentalbereiches entsprechen, d. h. die Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1},$$

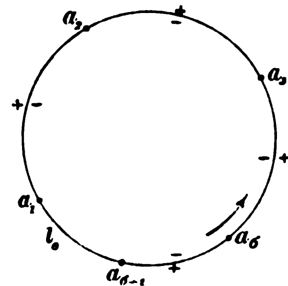


Fig. 31.

auf einem Kreise und der Querschnitt $\bar{l}$ ist nichts anderes wie der von a_1 über $a_2, \cdots a_\sigma$ nach $a_{\sigma+1}$ hinführende Bogen dieses Kreises, während die Gesammtperipherie die geschlossene Curve l darstellt.

Nehmen wir um die Vorstellung zu fixiren an, dass die Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$$

auf der Kreisperipherie so aufeinander folgen wie die wachsend Ziffern auf dem Zifferblatte einer Uhr, so entspricht dem Berei R_0' der η-Ebene das Innere, dem Bereiche R_0'' das Aeussere di Kreises (vergl. die Fig. 31).

Wenn insbesondere wie gewöhnlich

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

genommen wird, so streckt sich der Kreis l zur realen z-Axe aus unter dieser Annahme sind die sämmtlichen singulären len der Differentialgleichung (1) reale Werthe, und die tion

$$z = f(\eta)$$

ist auf der Begrenzung von R_0' real. Das Kreisbogenpoly

ist die eindeutig conforme Abbildung der unteren, das Kreisbogenpolygon R_0'' die Abbildung der oberen z-Halbebene. Ferner folgt aus der Invarianz des Differentialausdruckes

$$\Delta\binom{\eta}{z}$$

bei projectiven Transformationen von η, dass für reale Werthe von z auch dieser Differentialausdruck und folglich auch die rationale Function $q(z)$, die auf der rechten Seite der Differentialgleichung (1) auftritt, reale Werthe annimmt; es sind demnach die sämmtlichen Coefficienten von $q(z)$ real.

Wir sehen also in der That, dass sich der Fall einer symmetrischen Gruppe als die unmittelbare Verallgemeinerung der eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunction erweist.

Die Function $z = f(\eta)$ liefert uns die eindeutig conforme Abbildung des Kreisbogenpolygons R_0' auf eine Halbebene. Es ist nun leicht einzusehen, dass diese Function auch umgekehrt durch diese ihre Eigenschaft definirt werden kann. In der That lässt die Aufgabe, das in der η-Ebene gegebene Kreisbogenpolygon R_0' eindeutig conform auf eine Halbebene abzubilden, nach einem allgemeinen Satze von Riemann stets eine Lösung zu, und ist diese Lösung auch, abgesehen von drei realen willkürlichen Constanten, eindeutig bestimmt. Man kann dies entweder durch Anwendung des in der Nr. 212 (Bd. II, 1, S. 323 ff.) geschilderten Verfahrens direct beweisen, oder aber den Beweis, ähnlich wie für den in der Nr. 270 (S. 41 ff.) bereits behandelten speciellen Fall der Abbildung eines Kreisbogendreiecks, durch Anwendung des Riemann'schen Symmetrieprincips auf den in den Nummern 213, 214 (Bd. II, 1, S. 327 ff.) gelieferten Existenzbeweis zurückführen.

Eine Function ζ von η, die das Kreisbogenpolygon R_0' conform auf eine Halbebene*) abbildet, ist nämlich zunächst auf der Begrenzung von R_0' real. Sie nimmt folglich nach dem Riemann'schen Symmetrieprincipe für Werthe von η, die Spiegelbilder von einander in Bezug auf einen der Kreise $t_\varkappa$ sind, conjugirte complexe Werthe an, so dass also z. B. die Functionswerthe, die für die Punkte von R_0' und von R_0'' (dem Spiegelbilde von R_0' in Bezug auf die Seite t_0) zu Tage treten, die ganze complexe ζ-Ebene einfach erfüllen. Ferner nimmt diese Function in correspondirenden Punkten von $t_\varkappa$ und $t_\varkappa'$, d. h. in Punkten dieser Seiten, die durch Spiegelung in Bezug auf t_0 aus-

*) Hier und im Folgenden ist stets eine durch die reale Axe begrenzte Halbebene gemeint.

einander hervorgehen, offenbar denselben Werth an. Da nun t_z' aus t_z durch Anwendung der linearen Substitution S_z hervorgeht, so sind die Seiten des Bereiches $R_0' + R_0''$ durch lineare Substitutionen einander paarweise zugeordnet, und die gesuchte Function ζ von η hat die Eigenschaften, innerhalb des Bereiches $R_0' + R_0''$ jeden Werth nur ein einziges Mal anzunehmen und in correspondirenden Punkten der einander zugeordneten Seitenpaare gleiche Werthe zu besitzen. Die Existenz solcher Functionen ist aber in den Nrn. 212—216 (Bd. II, 1, S. 337 ff.) bewiesen, und es folgt zugleich aus den Betrachtungen der Nr. 216, dass, wenn ζ eine bestimmte dieser Functionen ist, jede andere in der Form

$$\frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reale Constanten bedeuten, enthalten sein muss. Wir haben also den Satz:

Die Function $z = f(\eta)$ kann auch durch die Eigenschaft definirt werden, dass sie die eindeutig conforme Abbildung des Kreisbogenpolygons R_0' auf eine Halbebene liefert.

Das Innere oder Aeussere eines beliebigen Kreises K kann stets durch eine linear gebrochene Function von z auf die eine oder die andere der beiden z-Halbebenen abgebildet werden. Daraus folgt, dass wir dem eben ausgesprochenen Satze die folgende allgemeinere Fassung geben können:

Die Function $\mathfrak{z}$ von η, die die eindeutig conforme Abbildung des Kreisbogenpolygons R_0' auf das Innere oder Aeussere eines Kreises K liefert, ist durch diese ihre Eigenschaft, abgesehen von drei realen Constanten, bestimmt und geht aus z durch Anwendung einer projectiven Substitution hervor. Die allgemeinste Function, die diese Abbildung vermittelt, ist durch $\mathfrak{z}$ in der Form

$$\frac{\alpha\mathfrak{z} + \beta}{\gamma\mathfrak{z} + \delta}$$

darstellbar, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Coefficienten einer projectiven Substitution bedeuten, die den Kreis K in sich selbst transformirt.

Die so formulirte Abbildungsaufgabe lässt aber eine wesentlich allgemeinere Fassung zu, auf die wir mit wenigen Worten eingehen wollen, da uns dieselbe einen Einblick in die Theorie von eindeutigen Functionen, die durch projective Gruppen ungeändert bleiben, verschaffen wird, die in gewissem Sinne bedeutend umfassender ist, als die Theorie derjenigen Fuchs'schen Functionen, die wir hier behandeln.

321. Das allgemeine Abbildungsproblem von Schottky.

Denken wir uns in der η-Ebene einen beliebigen von Kreisbogen oder geraden Linien) begrenzten $(p+1)$-fach zusammenhängenden Beeich R.

Sei ferner $\mathfrak{R}(\eta)$ eine beliebige rationale Function von η, die an einer Stelle der Begrenzung von R unendlich wird.

Dann lässt sich, wie Herr Schottky gezeigt hat, stets eine Funcon $F(\eta)$ von η finden, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. $F(\eta)$ verhält sich im Innern von R wie die vorgeschriebene ationale Function $\mathfrak{R}(\eta)$, d. h. die Differenz

$$F(\eta) - \mathfrak{R}(\eta)$$

t im Innern von R allenthalben regulär.

2. Auf der Begrenzung von R ist der Coefficient von i der Funcon $F(\eta)$ gleich einer willkürlich zu wählenden constanten Grösse; so z. B. gleich Null; dann ist $F(\eta)$ auf der Begrenzung von R real.

Da R mehrfach zusammenhängend ist, so ist die Function $F(\eta)$ ı Innern von R nicht nothwendig eindeutig. Denken wir uns vielehr den Bereich durch p geeignet gewählte Querschnitte in einen nfach zusammenhängenden zerschnitten, so hat $F(\eta)$ ferner die Eigenhaft:

3. An den p Querschnitten besitzt die Function $F(\eta)$ wohlbestimmte ale Periodicitätsmoduln.

Aus Functionen von der Art wie $F(\eta)$ lassen sich Functionen von rselben Beschaffenheit bilden, für welche die Periodicitätsmoduln an n p Querschnitten von R verschwinden, die also innerhalb R einutig sind, den Charakter von rationalen Functionen haben und an der egrenzung von R reale Werthe besitzen. Diese Functionen mögen it $G(\eta)$ bezeichnet werden.

Unter diesen Functionen $G(\eta)$ lassen sich stets zwei u, v auswählen, die durch eine algebraische Gleichung

$$\text{(I)} \qquad \Phi(u, v) = 0$$

nit realen Coefficienten und vom Range p mit einander verknüpft sind nd die die Eigenschaft haben, dass jede Function vom Charakter von $F(\eta)$ rational mit realen Coefficienten durch u, v dargestellt werden ann. An die Stelle von u, v können irgend zwei andere Functionen u_1, v_1 vom Charakter $G(\eta)$ treten, die mit den durch die Gleichung (I) erknüpften u, v durch eine eindeutig umkehrbare rationale Transormation (mit realen Coefficienten) verbunden sind.

Betrachtet man die u, v als reale Variable und deutet dieselben als Cartesische Coordinaten der Punkte einer Ebene, so stellt die Gleichung (I) eine reale Curve C dieser Ebene dar. Da (I) vom Range p ist, so ist die Curve C vom Geschlechte p und besteht demnach aus p getrennt verlaufenden Zügen. Wir können uns z. B. u, v so gewählt denken, dass die Curve C aus p geschlossenen Linien besteht.

Dann zerfällt das algebraische Gebilde (u, v), welches durch die Gleichung (I) definirt wird, durch die Curve C in zwei conjugirte Hälften B, B'. Durch die beiden Functionen u, v von η wird die eine dieser Hälften, etwa B, eindeutig conform auf das Gebiet R der η-Ebene abgebildet.

Die Fortsetzung der nur für die Stellen von B des algebraischen Gebildes (I) definirten Function η nach den Stellen von B' hin erfolgt nun nach dem in der Nr. 270 (S. 43) dargelegten Riemann'schen Symmetrie-Principe.

Denken wir uns die das algebraische Gebilde (u, v) darstellende, z. B. über der u-Ebene ausgebreitete Riemann'sche Fläche T vom Zusammenhange $2p + 1$, so entsprechen den Punkten der Realitätscurve C gewisse Strecken der realen u-Axe in den verschiedenen Blättern von T, wir wollen diese Strecken als die Realitätslinien von T bezeichnen. Den Punkten dieser Realitätslinien entsprechen dann die Punkte der Begrenzung von R in der η-Ebene.

Gehen wir von einer Stelle (u, v) des Gebietes B auf einem in der Riemann'schen Fläche T verlaufenden Wege nach der conjugirten Stelle $(\bar{u}, \bar{v})$ des Gebietes B', so müssen wir eine der Realitätslinien, etwa l, in einem Punkte überschreiten. Wir richten den Weg so ein, dass dieser Punkt kein singulärer Punkt sei, d. h. dass demselben keine Ecke des Bereiches R der η-Ebene entspricht und dass er kein Verzweigungspunkt von T sei. Dann entspricht dem l ein Theil eines gewissen Kreisbogens s der η-Ebene, der einen Theil der Begrenzung, oder wie wir sagen wollen eine Seite von R bildet. Nach dem erwähnten Riemann'schen Principe ist dann der Stelle $(\bar{u}, \bar{v})$ derjenige Werth von η zuzuordnen, der aus dem der Stelle (u, v) entsprechenden Punkte η von R durch Spiegelung in Bezug auf den Kreisbogen s hervorgeht.

Sei also R' das Spiegelbild von R in Bezug auf s, so bilden die beiden Bereiche R und R' zusammengenommen einen von Kreisbogen begrenzten Bereich R_0, der die eindeutig conforme Abbildung der ganzen durch die Realitätslinien mit Ausnahme von l zerschnittenen Riemann'schen Fläche T darstellt.

Vollziehen wir den Uebergang von (u, v) nach $(\bar{u}, \bar{v})$, indem wir ne von l verschiedene Realitätslinie, oder l selbst aber in einem ınkte überschreiten, der von dem früher gewählten Durchgangspunkte ırch einen singulären Punkt, der einer Ecke von R entspricht, geennt ist, so wird dem Punkte $(\bar{u}, \bar{v})$ jetzt ein η-Werth zuzuordnen in, der aus η durch Spiegelung in Bezug auf eine von s verschiedene ›ite des Bereiches R hervorgeht. Der so erscheinende Punkt der Ebene geht also aus dem früher gefundenen durch eine linear ge:ochene (projective) Substitution hervor.

Wir sehen also, dass η eine unendlich vieldeutige Function des ·tes auf der Riemann'schen Fläche T ist, und dass geschlossenen 'egen von (u, v) in der Fläche T gewisse projective Substitutionen tsprechen, die η beim Durchlaufen dieser Wege erfährt. Diese Sub.tutionen bilden offenbar eine Gruppe ϑ.

Da der Ausdruck

$$\varDelta\binom{\eta}{u},$$

e leicht einzusehen ist, ebenfalls eine Function vom Charakter $G(\eta)$;, so ist dieser Ausdruck rational durch (u, v) darstellbar; sei

$$\varDelta\binom{\eta}{u} = \varphi(u, v)\cdot$$

ınn bildet also

$$y_1 = \sqrt{\frac{du}{d\eta}}, \quad y_2 = \eta\sqrt{\frac{du}{d\eta}}$$

ı Fundamentalsystem der linearen Differentialgleichung

$$) \qquad \frac{d^2 y}{du^2} = \varphi(u, v)\, y,$$

›rin $\varphi(u, v)$ eine rationale Function der durch die Gleichung (I) verüpften Variabeln u, v mit realen Coefficienten darstellt.

2. Die Frage der eindeutigen Umkehrbarkeit. Die Klein'schen .d die allgemeinen Fuchs'schen Gruppen. Beispiel symmetrischer Klein'scher Gruppen vom Geschlechte Null.

Es entsteht nun die Frage, unter welchen Bedingungen u, v einutige Functionen von η sind, d. h. wann ϑ eine discontinuirliche ·uppe ist.

Die projectiven Fundamentalsubstitutionen der Gleichung (II) sind :enbar nichts anderes, wie diejenigen projectiven Substitutionen, die ·ei Seiten des Bereiches R_0, die Spiegelbilder von einander in Bezug

auf s sind, in einander überführen. Wir werden also R_0 als den Fundamentalbereich der Gruppe ϑ ansehen müssen. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Discontinuität von ϑ ist dann die folgende.

Denken wir uns aus R durch Spiegelung in Bezug auf seine sämmtlichen Seiten symmetrische Bereiche gebildet, spiegeln wir diese Bereiche weiter über ihre freien Seiten und fahren so fort, so bilden die so entstehenden Bereiche eine Fläche F, die einen Theil oder auch die ganze η-Ebene einfach oder mehrfach überdeckt. Je zwei dieser Bereiche fügen sich zu einem Bereiche zusammen, der aus R_0 durch eine Substitution von ϑ hervorgeht. Die Gruppe ϑ ist also discontinuirlich, wenn die Fläche F die η-Ebene an keiner Stelle mehrfach überdeckt.

Die explicite Aufstellung der Bedingungen, denen der Bereich R genügen muss, damit eine solche einfache Ueberdeckung eintritt, bietet im Allgemeinen nicht unerhebliche Schwierigkeiten dar.

Wenn die Kreisbogen, die die Begrenzung von R bilden, einen allen gemeinsamen Orthogonalkreis besitzen, so sind die Substitutionen von ϑ Verschiebungen in Bezug auf den Orthogonalkreis. In diesem Falle sind die Discontinuitätsbedingungen leicht aufzustellen.

Fassen wir diejenigen Ecken von R_0, die einer und derselben Stelle der Riemann'schen Fläche T entsprechen, zu einem Cyklus zusammen, so ist für die Discontinuität der Gruppe ϑ nothwendig und hinreichend, dass die Summe der Winkel bei jedem solchen Cyklus ein aliquoter Theil von 2π sei. Der Beweis ist bis auf geringe Modificationen genau derselbe, wie der in der Nr. 287 (S. 108) für den Fall der Dreiecksfunction gelieferte.

Nehmen wir dann $p = 0$, d. h. das Kreisbogenpolygon R als ein einfach zusammenhängendes, so kommen wir auf den Fall einer symmetrischen Fuchs'schen Gruppe von der in der Nr. 319 (S. 227) erörterten Art.

Herr Poincaré bezeichnet allgemein eine discontinuirliche Gruppe projectiver Substitutionen, die Verschiebungen in Bezug auf einen Orthogonalkreis sind, als eine Fuchs'sche, eine discontinuirliche Gruppe, deren Substitutionen keine Verschiebungen sind, als eine Klein'sche Gruppe. Die von uns bisher betrachteten Fuchs'schen Gruppen werden als solche vom Geschlechte Null zu charakterisiren sein, weil sich jede zu einer solchen Gruppe gehörige Fuchs'sche Function rational durch eine dieser Functionen darstellen lässt, oder, was dasselbe heisst, weil zwischen je zwei derartigen Functionen eine algebraische Gleichung vom Range (oder Geschlechte) Null besteht.

Wenn die vorhin erörterte Abbildungsaufgabe des mehrfach ($p+1$-fach) zusammenhängenden Kreisbogenpolygons R auf den Bereich B der Riemann'schen Fläche T zu einer discontinuirlichen Gruppe ϑ führt, so liefert uns diese ein Beispiel einer Fuchs'schen oder Klein'schen Gruppe vom Geschlechte p, u. z. einer symmetrischen Gruppe dieses Geschlechtes.

Wir wollen nun noch einige specielle Fälle des Kreisbogenpolygons R kurz behandeln, in welchen die Discontinuität der entsprechenden projectiven Gruppe unmittelbar evident ist. Für die allgemeine Theorie der Fuchs'schen und Klein'schen Gruppen, sowie der zu solchen Gruppen gehörigen eindeutigen Functionen müssen wir auf die Arbeiten von Herrn Poincaré in den Acta Mathematica verweisen.

Sei der Bereich R begrenzt von $(\sigma+1)$ Kreisbogen $s_0, s_1, s_2, \cdots s_\sigma$, die so beschaffen sind, dass $s_\varkappa$, $s_{\varkappa+1}$ für $\varkappa = 0, 1, \cdots \sigma$ einander im Punkte $\lambda_{\varkappa+1}$ von aussen berühren; dabei ist $s_{\sigma+1} = s_0$ zu nehmen. Es ist dann $p=0$, die Gleichung (I) kann in der Form

$$v = \text{const.}$$

geschrieben werden, und die sämmtlichen zum Bereiche R gehörigen Functionen vom Charakter $G(\eta)$ sind rational durch u darstellbar. Diese Function u vermittelt die Abbildung von R auf eine der beiden Halbebenen, in welche die u-Ebene durch die reale u-Axe, die jetzt als Realitätslinie fungirt, getheilt wird. Sei R' das Spiegelbild von R in Bezug auf den Kreis s_0, so bilden R und R' zusammengenommen einen Bereich R_0, der von 2σ Kreisbogen begrenzt wird. Alle Winkel von R_0 sind gleich Null und die Substitutionen $S_\varkappa$, welche die Seiten $s_\varkappa$ in ihre Spiegelbilder $s_\varkappa'$ in Bezug auf s_0 überführen, bilden mit ihren Inversen die Basis einer Gruppe ϑ projectiver Substitutionen. Die $(\sigma+1)$ Substitutionen

$$S_\varkappa^{-1} S_{\varkappa+1} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma)$$

sind parabolisch und können ebenfalls als eine Basis von ϑ angesehen werden.

Die Discontinuität der Gruppe ϑ ist evident. Denn das Spiegelbild von R in Bezug auf irgend eine seiner Seiten $s_\varkappa$ liegt ganz innerhalb des Kreises, dem $s_\varkappa$ angehört, kann also mit R keinen Theil gemein haben; ähnlich schliesst man für die durch fortgesetzte Spiegelung entstehenden Bereiche, dass sie einander nicht überdecken können (vergl. Nr. 272, S. 50 und Nr. 304, S. 173).

Also ist ϑ eine symmetrische Klein'sche Gruppe vom Geschlechte null; die Function u, die bei den Substitutionen dieser Gruppe ungeändert bleibt, ist eindeutig in η und nimmt innerhalb des Funda-

mentalbereiches R_0 von ϑ jeden Werth nur ein einziges Mal an. Auf der Begrenzung von R_0 ebensowohl wie auf der Diagonale s_0 ist u real. Jede Function von η, die sich innerhalb R_0 wie eine rationale Function verhält und bei den Substitutionen von ϑ ungeändert bleibt, ist rational durch u darstellbar, und η ist der Integralquotient einer Differentialgleichung

$$\text{(IIa)} \qquad \frac{d^2y}{du^2} = \varphi(u)y,$$

wo $\varphi(u)$ eine rationale Function bedeutet. Die singulären Punkte dieser Differentialgleichung sind die Werthe $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$, die u in den Ecken $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{\sigma+1}$ von R annimmt; die Differentialgleichung (IIa) gehört zur Fuchs'schen Classe, und die determinirenden Fundamentalgleichungen, die zu den Punkten $a_\varkappa$ gehören, haben je eine doppelte Wurzel.

Man nennt nach Herrn Poincaré u und jede rationale Function von u eine Klein'sche Function von η.

Wenn die Kreisbogen $s_0, s_1, s_2, \cdots s_\sigma$ einen Orthogonalkreis O besitzen, so haben wir den Fall einer Fuchs'schen Gruppe von der von uns betrachteten Art, u. z. ist die Gruppe eine symmetrische und die Zahlen $g_1, g_2, \cdots g_{\sigma+1}$ sind insgesammt unendlich. Wenn dann R innerhalb des Orthogonalkreises O gelegen ist, so existirt die Function u nur im Innern von O, und O ist, wie wir wissen, überall dicht besetzt von den Doppelpunkten der parabolischen und hyperbolischen Substitutionen der Gruppe ϑ.

Besitzen die Kreisbogen $s_0, s_1, s_2, \cdots s_\sigma$ keinen Orthogonalkreis, so ist gleichwohl der Existenzbereich der Function u ein beschränkter. Die Grenze dieses Existenzbereiches wird gebildet von der Gesammtheit der Doppelpunkte der parabolischen, hyperbolischen und loxodromischen Substitutionen der Klein'schen Gruppe ϑ. Fügen wir der von diesen Doppelpunkten gebildeten Punktmenge ihre erste Ableitung hinzu, so erhalten wir eine perfecte Punktmenge Ω. Während aber im Falle der Existenz eines Orthogonalkreises O die perfecte Punktmenge Ω mit der Peripherie von O identisch ist, bildet Ω, wenn die Gruppe keine Fuchs'sche ist, eine nicht analytische Linie. Dieser merkwürdige Umstand ist zuerst von Herrn Klein bemerkt worden. Wie Herr Poincaré gezeigt hat, besitzt diese Linie Ω in jedem Punkte, der eine Ecke eines der aus R durch Spiegelungen hervorgehenden Kreisbogenpolygone ist, eine bestimmte Tangente, sie besitzt aber an keiner Stelle einen Krümmungskreis.

323. Beispiel einer Klein'schen Gruppe von beliebigem Geschlechte. Klein'sche Functionen.

Betrachten wir als zweites Beispiel einen Bereich R, der von $(\sigma + 1)$ sich gegenseitig ausschliessenden Vollkreisen begrenzt wird; seien diese Kreise

$$s_0, s_1, s_2, \cdots s_\sigma.$$

Der Bereich R ist dann vom Zusammenhange $\sigma + 1$ und er besitzt keine Ecke. Spiegeln wir denselben z. B. in Bezug auf den Kreis s_0, so bildet das Spiegelbild R' mit R zusammengenommen einen von 2σ Kreisen, nämlich den $s_1, s_2, \cdots s_\sigma$ und ihren Spiegelbildern in Bezug auf s_0

$$s_1', s_2', \cdots s_\sigma',$$

egrenzten Bereich R_0. Die Substitutionen $S_\varkappa$, welche $s_\varkappa$ in $s_\varkappa'$ verwandeln, sind hyperbolische oder loxodromische, dieselben bilden nit ihren inversen die Basis einer projectiven Gruppe ϑ.

Die Discontinuität dieser Gruppe ergiebt sich ebenso wie in dem orhin betrachteten Beispiele aus der einfachen Bemerkung, dass z. B. las Spiegelbild von R in Bezug auf eine Seite $s_\varkappa$ dieses Bereiches anz im Innern des Kreises $s_\varkappa$ gelegen sein muss, also den Bereich R n keiner Stelle überdecken kann. Demnach ist ϑ im Allgemeinen eine lein'sche Gruppe, sie wird insbesondere zu einer Fuchs'schen, wenn ie Kreise $s_0, s_1, s_2, \cdots s_\sigma$ einen Orthogonalkreis O besitzen.

Die Gleichung (I), welche die beiden zu diesem Bereiche R gehörigen Functionen u, v mit einander verknüpft, ist vom Range σ. hre Riemann'sche Fläche T wird durch die Realitätslinien, die den reisen

$$s_1, s_2, \cdots s_\sigma, \qquad s_1', s_2', \cdots s_\sigma'$$

ntsprechen, in eine $(2\sigma - 1)$-fach zusammenhängende zerschnitten. iese ist die eindeutig conforme Abbildung des $(2\sigma - 1)$-fach zusammenängenden Bereiches R_0. Da die Gruppe ϑ eine discontinuirliche ist, o sind die u, v eindeutige Functionen von η, und jede eindeutige unction von η, die sich innerhalb R_0 wie eine rationale Function erhält und bei den Substitutionen von ϑ ungeändert bleibt, ist eine ationale Function der durch die Gleichung (I) verknüpften Grössen u, v.

Denken wir uns den Bereich R_0 aus der η-Ebene ausgeschnitten nd durch Deformation und Biegung so umgestaltet, dass die correpondirenden Punkte der Seiten

$$s_\varkappa, s_\varkappa' \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

aufeinanderfallen, so stellt derselbe eine geschlossene Fläche $\overline{T}$ dar, die die eindeutig conforme Abbildung der unzerschnittenen Riemann'schen Fläche T ist.

Die so definirte Klein'sche Gruppe ist eine symmetrische, die Gleichung (I), die zwischen u, v besteht, hat dem entsprechend reale Coefficienten.

Wir können aber leicht eine analog beschaffene nicht symmetrische Klein'sche Gruppe definiren.

Denken wir uns nämlich in der η-Ebene 2σ beliebige Kreise

$$s_1, s_2, \cdots s_\sigma, \quad s_1', s_2', \cdots s_\sigma',$$

die sich gegenseitig ausschliessen und weder schneiden noch berühren. Bezeichnen wir das durch diese Kreise begrenzte Gebiet der η-Ebene durch R_0, so gehen die Seiten

$$s_\varkappa, s_\varkappa' \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

dieses Bereiches durch hyperbolische oder loxodromische Substitutionen $S_\varkappa$ aus einander hervor, und diese Substitutionen $S_\varkappa$ bilden mit ihren inversen die Basis einer projectiven Gruppe ϑ.

Genau so wie im symmetrischen Falle schliessen wir, dass diese Gruppe eine discontinuirliche sein müsse. In der That, construiren wir z. B. die Abbildung von R_0 durch die Function

$$S_\varkappa \eta,$$

so erhalten wir einen Bereich $R_\varkappa$, der ganz innerhalb des Kreises $s_\varkappa'$ gelegen ist, also R_0 nicht überdecken kann; u. s. w. Man kann leicht einsehen, dass die aus R_0 durch Anwendung der Substitutionen von ϑ hervorgehenden Bereiche die ganze η-Ebene, mit Ausnahme gewisser perfecter Punktmengen, die aber kein zweidimensionales Gebiet erfüllen, einfach und lückenlos bedecken.

Man kann nun in ähnlicher Weise, wie wir es nach dem Verfahren von Herrn Klein in der Nr. 214 (Bd. II, 1, S. 332 ff.) für den daselbst betrachteten einfach zusammenhängenden Bereich gethan haben, die Existenz von Functionen nachweisen, die sich innerhalb R_0 wie rationale Functionen verhalten und in correspondirenden Punkten der Seiten

$$s_\varkappa, s_\varkappa' \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

dieselben Werthe annehmen. Man kann die Existenz solcher Functionen aber auch nach dem Vorgange von Herrn Poincaré dadurch erweisen, dass man mittelst der Substitutionen

$$1 = S_0, S_1, S_2, \cdots \qquad \text{ad infinitum}$$

der Gruppe ϑ, Thetareihen

$$\Theta(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} H(S_\nu \eta) \left(\frac{d S_\nu \eta}{d\eta}\right)^m$$

bildet, wo H eine beliebige rationale Function, m eine ganze Zahl grösser als Eins bedeutet. Die Convergenz dieser Thetareihen, die Herr Poincaré als Klein'sche Thetareihen bezeichnet, kann nach dem beim ersten Convergenzbeweise für die Fuchs'schen Thetareihen (Nr. 306, S. 177) angewandten Verfahren erwiesen werden. Dieselben haben die Eigenschaft, dass wenn

$$S_\varkappa \eta = \frac{\alpha_\varkappa \eta + \beta_\varkappa}{\gamma_\varkappa \eta + \delta_\varkappa}$$

eine beliebige Substitution der Gruppe ϑ bedeutet,

$$\Theta(S_\varkappa \eta) = (\gamma_\varkappa \eta + \delta_\varkappa)^{2m}\, \Theta(\eta)$$

ist; man erhält also durch Quotientenbildung aus solchen Klein'schen Thetafunctionen Ausdrücke, die innerhalb R_0 den Charakter von rationalen Functionen besitzen und bei den Substitutionen der Gruppe ϑ ungeändert bleiben. Herr Poincaré bezeichnet diese Functionen als Klein'sche (vgl. Nr. 322, S. 238).

Denken wir uns den Bereich R_0 durch Dehnung und Biegung wiederum so umgeformt, dass correspondirende Punkte der Seiten

$$s_\varkappa, \; s_\varkappa' \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

.ufeinanderfallen, so sind die zur Gruppe ϑ gehörigen Klein'schen 'unctionen eindeutige Functionen des Ortes auf der so entstehenden ·eschlossenen Fläche $\bar{\bar{T}}$, die in jedem Punkte dieser Fläche den Charak-·r von rationalen Functionen besitzen.

Da die Fläche $\bar{\bar{T}}$ eine $(2\sigma + 1)$-fach zusammenhängende ist, so ·lgt hieraus nach einem von Riemann in der Theorie der algebrai-hen Functionen angewandten Schlussverfahren, dass sich jede zur ruppe ϑ gehörige Klein'sche Function durch zwei solche Functionen v, zwischen denen eine algebraische Gleichung vom Range σ

$$f(u, v) = 0 \qquad \text{ı)}$$

·teht, rational darstellen lässt. Die zu der Gleichung (Ia) gehörige, ·. über der u-Ebene auszubreitende Riemann'sche Fläche ist die ·eutig conforme Abbildung der geschlossenen Fläche $\bar{\bar{T}}$.

Wir haben also in diesem Falle die beiden durch die ·chung (Ia) vom Range σ verknüpften Variabeln als ein-ige Klein'sche Functionen des Parameters η dargestellt.

324. Darstellung der durch eine algebraische Gleichung verknüpften Variabeln als eindeutiger Functionen eines Parameters.

Der am Schlusse der vorigen Nummer erwähnte Parameter η erscheint als Integralquotient einer linearen Differentialgleichung

$$\text{(IIb)} \qquad \frac{d^2 y}{du^2} = \varphi(u, v)\, y,$$

wo $\varphi(u, v)$ eine rationale Function der durch die Gleichung (Ia) verknüpften Variabeln u, v darstellt. Die projective Monodromiegruppe dieser Differentialgleichung ist ϑ, und da der Fundamentalbereich R_0 keine Ecken hat, sind die einzigen singulären Punkte dieser Differentialgleichung die Verzweigungspunkte der algebraischen Function v von u. Das Verhalten der Integrale von (IIb) in der Umgebung dieser Punkte lässt sich ohne Schwierigkeit übersehen.

Die Functionen u, v sind nicht eindeutig bestimmt; man kann vielmehr an Stelle derselben zwei rationale Functionen

$$u_1 = \varphi(u, v), \quad v_1 = \psi(u, v)$$

betrachten, die so beschaffen sind, dass sich u, v mit Berücksichtigung der Gleichung (Ia) auch wieder als rationale Functionen

$$u = \varphi_1(u_1, v_1), \quad v = \psi_1(u_1, v_1)$$

von u_1, v_1 ergeben. Die u_1, v_1 genügen also dann einer Gleichung

$$\text{(Ib)} \qquad f_1(u_1, v_1) = 0,$$

die mit (Ia) in der Bezeichnung von Riemann (vgl. Nr. 163, Bd. II, 1, S. 110) zu derselben Classe gehört.

Wir können also nicht nur u, v, sondern irgend zwei Variable u_1, v_1, die durch eine mit (Ia) zur selben Classe gehörige Gleichung (Ib) mit einander verknüpft sind, als eindeutige, zur Gruppe ϑ gehörige Klein'sche Functionen der Variabeln η darstellen.

Wenn $\sigma = 1$ ist, d. h. wenn R_0 von zwei Kreisen begrenzt wird, so besteht die Gruppe ϑ aus den Potenzen einer einzigen hyperbolischen oder loxodromischen Substitution, die wir in der Normalform als

$$\frac{S\eta - \lambda}{S\eta - \mu} = K \frac{\eta - \lambda}{\eta - \mu}, \qquad |K| \neq 1,$$

schreiben wollen. Bilden wir uns dann eine eindeutige doppeltperiodische Function $p(\zeta)$ mit den Perioden

$$2\pi i, \ \log K,$$

die innerhalb des Periodenparallelogramms jeden Werth nur zweimal annimmt, so liefert die Function

$$u = p\left(\log \frac{\eta - \lambda}{\eta - \mu}\right)$$

und die Ableitung derselben nach ζ

$$v = p'\left(\log \frac{\eta - \lambda}{\eta - \mu}\right)$$

das durch eine Gleichung vom Range Eins

(III) $$f(u, v) = 0$$

verknüpfte Functionenpaar u, v, durch welches eine jede zu dieser Klein'schen Gruppe ϑ gehörige Klein'sche Function rational dargestellt werden kann.

Diese Gruppe ist nichts anderes wie die projective Monodromiegruppe des in der Nr. 197 (Bd. II, 1, S. 256) behandelten Fuchs'schen Beispiels.

Bilden wir den zu dem Periodenquotienten

(IV) $$\frac{\log K}{2\pi i}$$

gehörigen Modul $\varkappa^2$ des entsprechenden elliptischen Integrals, so ist dieser Modul eine Invariante der durch die Gleichung (III) bestimmten Classe von algebraischen Gleichungen oder Functionen.

Ist umgekehrt ein beliebiger Modul $\varkappa^2$ vorgelegt, so können wir den entsprechenden Periodenquotienten finden und denselben in die Form (IV) setzen. Wir erhalten auf diese Weise die Substitution $S\eta$ (natürlich abgesehen von einer noch willkürlich zu wählenden projectiven Substitution, durch welche $S\eta$ transformirt werden kann und durch deren Festlegung die Doppelpunkte von $S\eta$ fixirt werden) und somit für eine beliebige Classe von algebraischen Gleichungen vom Range Eins die Variable η, mit Hülfe deren die durch eine solche Gleichung verknüpften Variabeln, als eindeutige Klein'sche Functionen dargestellt werden können.

Wenn $\varkappa^2$ real ist, so können wir K real nehmen, dann ist die Substitution $S\eta$ eine hyperbolische, und die Gruppe ϑ wird zu einer Fuchs'schen.

Wenn $\sigma > 1$ ist, so wird, wie Riemann gezeigt hat, eine Classe von algebraischen Gleichungen vom Range σ durch $3\sigma - 3$ constante Grössen bestimmt. Man nennt dieselben die Classenmoduln, und diese spielen für $\sigma > 1$ die analoge Rolle wie das $\varkappa^2$ für $\sigma = 1$.

Wenn wir von einem durch die 2σ Kreise $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ begrenzten Bereiche R_0 ausgehen, so sind die $3\sigma - 3$ Classenmoduln derjenigen

Classe von algebraischen Gleichungen, die die Eigenschaft haben, dass die durch dieselben verknüpften Variabeln als eindeutige Functionen von η erscheinen, vollkommen bestimmt.

Nun hängt die aus den σ Substitutionen $S_\varkappa \eta$ und deren inversen gebildete Klein'sche Gruppe ϑ von 3σ, und wenn wir von einer willkürlichen transformirenden projectiven Substitution absehen, von

$$3\sigma - 3$$

Parametern ab. Die Anzahl der Parameter der Gruppe ϑ stimmt also genau überein mit der Anzahl der Classenmoduln der zugehörigen Classe von algebraischen Gleichungen.

Es liegt also die Frage nahe, ob man nicht auch allgemein, wenn $\sigma > 1$ ist, die Classenmoduln willkürlich vorschreiben und dann die $3\sigma - 3$ Parameter einer Klein'schen Gruppe ϑ von der jetzt betrachteten Art finden kann, die so beschaffen ist, dass sich zwei Variable, die durch eine Gleichung der durch die gegebenen Moduln bestimmten Classe verknüpft sind, als eindeutige zu ϑ gehörige Klein'sche Functionen darstellen lassen.

Diese Frage lässt sich nach Herrn Poincaré im bejahenden Sinne beantworten und dadurch der fundamentale Satz beweisen, dass zwei durch irgend eine algebraische Gleichung verknüpfte Variable als eindeutige Klein'sche Functionen eines Parameters dargestellt werden können.

Wenn die Kreise

$$s_\varkappa, \; s_\varkappa' \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

einen Orthogonalkreis besitzen, so sind die Substitutionen $S_\varkappa$ hyperbolische und die Gruppe ϑ eine Fuchs'sche. In diesem Falle kann man zeigen, dass die $3\sigma - 3$ Classenmoduln der entsprechenden Classe von algebraischen Gleichungen reale Grössen sind. Für Gleichungen mit realen Classenmoduln würde also eine Darstellung der durch eine solche Gleichung verknüpften Variabeln durch Fuchs'sche Functionen möglich sein.

Herr Poincaré hat aber gezeigt, dass sich auch für die durch eine beliebige algebraische Gleichung (mit complexen Classenmoduln) verknüpften Variabeln eine Darstellung als Fuchs'sche Functionen eines Parameters angeben lässt; wir werden eine solche Darstellung noch später kennen lernen.

Sechzehnter Abschnitt.

Das Poincaré'sche Princip und seine Anwendungen.

Erstes Kapitel.

325. Formulirung eines neuen Problems. Bedeutung desselben. Das Poincarésche Princip in allgemeiner Fassung.

Zum Beweise des Theorems, welches wir oben (Nr. 324, S. 244) erwähnt hatten, kann man sich einer Methode bedienen, die Herr Poincaré erdacht und als Méthode de continuité bezeichnet hat. Wir werden weiter unten (Nr. 328) diese Methode an einem einfachen Beispiele auseinandersetzen, in Bezug auf die allgemeine Fassung derselben müssen wir uns damit begnügen, auf die Arbeit von Herrn Poincaré im vierten Bande der Acta Mathematica hinzuweisen.

Es möge jetzt ein etwas anderes Problem formulirt werden, welches Herr Poincaré durch eben diese Methode gelöst hat. Wir beschränken uns dabei auf die besondere Art von Fuchs'schen Functionen, die wir in den drei ersten Kapiteln des vorigen Abschnittes behandelt haben.

Wir waren ausgehend von dem Fundamentalbereiche R_0, der in den aus den Ecken gebildeten Cykeln

$$\lambda_1,\ (\lambda_2,\ \lambda_2'),\ (\lambda_3,\ \lambda_3'),\ \cdots\ (\lambda_\sigma,\ \lambda_\sigma'),\ \lambda_{\sigma+1}$$

beziehungsweise die Winkelsummen

$$\frac{2\pi}{g_1},\quad \frac{2\pi}{g_2},\quad \frac{2\pi}{g_3},\quad \cdots\quad \frac{2\pi}{g_\sigma},\quad \frac{2\pi}{g_{\sigma+1}}$$

aufweist, zu einer Fuchs'schen Gruppe ϑ und den zugehörigen Fuchs'schen Functionen gelangt, die sich insgesammt durch

$$z = f(\eta)$$

rational darstellen lassen. Dabei war η der Integralquotient einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = q(z)\, y, \tag{1}$$

wo die rationale Function $q(z)$, die in der Nr. 216 (Bd. II, 1, S. 343, Gl. [29b]) angegebene Form

$$q(z) = \frac{1}{\prod_{\lambda=1}^{\sigma}(z-a_\lambda)}\left\{-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{g_{\sigma+1}^2}\right)E_{\sigma-2}(z) - \sum_{\lambda=1}^{\sigma}\frac{(a_\lambda-a_1)\cdots(a_\lambda-a_\sigma)}{z-a_\lambda}\,\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{g_\lambda^2}\right)\right\} \tag{2}$$

besitzt, wenn wir z so einrichten, dass

$$a_{\sigma+1} = f(\lambda_{\sigma+1}) = \infty$$

ist; dabei bedeutet $E_{\sigma-2}(z)$ eine ganze Function $(\sigma-2)^{\text{ten}}$ Grades, in welcher der Coefficient von $z^{\sigma-2}$ den Werth Eins besitzt.

Wenn wir noch $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ wählen, so sind in der rationalen Function $q(z)$ noch die $\sigma - 2$ Grössen

$$a_3, a_4, \cdots a_\sigma$$

und die $\sigma - 2$ Coefficienten von $E_{\sigma-2}(z)$ enthalten, die, wenn wir uns die Zahlen

$$g_1, g_2, \cdots g_\sigma, g_{\sigma+1} \tag{3}$$

fest denken, d. h. wenn wir einen Typus holoedrisch isomorpher Fuchs'scher Gruppen betrachten, durch Angabe der Gruppe ϑ vollkommen bestimmt sind.

Innerhalb eines Typus holoedrisch isomorpher Gruppen, der durch Angabe eines bestimmten Systems der ganzen Zahlen (3) charakterisirt ist, hängt eine einzelne Gruppe (vergl. Nr. 308, S. 189) noch von $2\sigma - 4$ realen Parametern ab. Durch Angabe dieser $2\sigma - 4$ realen Grössen, die nur noch gewissen Ungleichheitsbedingungen zu genügen haben, damit die Gruppe eine Fuchs'sche sei, sind also die $2\sigma - 4$ in $q(z)$ auftretenden complexen Grössen vollkommen bestimmt.

Diese $2\sigma - 4$ complexen Grössen sind $4\sigma - 8$ realen Grössen aequivalent, so dass also $q(z)$ genau $2\sigma - 4$ reale Parameter mehr enthält, wie die Fuchs'sche Gruppe ϑ.

Wir schliessen hieraus, dass zwischen den $4\sigma - 8$ realen Parametern, die in $q(z)$ bei Fixirung der Grössen (3) noch enthalten sind, genau $2\sigma - 4$ Bedingungsgleichungen erfüllt sein müssen, wenn in der Differentialgleichung (1) z eine Fuchs'sche Function des Integralquotienten η sein soll.

Hat man also die Aufgabe, $q(z)$ so zu bestimmen, dass für (1) die letztere Bedingung (immer bei bestimmter Wahl der Zahlen (3)) erfüllt ist, so darf man nur über $2\sigma - 4$ der in $q(z)$ enthaltenen realen Parameter disponiren.

Man kann also z. B. die $\sigma - 2$ singulären Stellen

$$a_3, a_4, \cdots a_\sigma$$

vorschreiben und fragen:

Lassen sich die gedachten $2\sigma - 4$ Bedingungsgleichungen stets befriedigen, wenn in $q(z)$, nebst den Grössen (3), noch die singulären Punkte $a_3, a_4, \cdots a_\sigma$ willkürlich vorgeschrieben werden; oder mit anderen Worten (vergl. Nr. 216, Bd. II, 1, S. 346):

Kann man die Coefficienten der ganzen Function $E_{\sigma-2}(z)$ stets so bestimmen, dass bei fester Wahl der Grössen (3) und für willkürlich gegebene singuläre Punkte $a_3, a_4, \cdots a_\sigma$ in der Differentialgleichung (1) die unabhängige Variable eine eindeutige Fuchs'sche Function des Integralquotienten sei?

Um die grosse Bedeutung, welche die Beantwortung dieser Frage besitzt, hervortreten zu lassen, knüpfen wir an das in der Nr. 303 (S. 162) für den besonderen Fall einer Function mit drei singulären Punkten dargelegte Poincaré'sche Princip an.

Sei durch eine bestimmte Fuchs'sche Gruppe ϑ des durch die Zahlen (3) charakterisirten Typus eine Differentialgleichung (1) gewonnen, in welcher also die $a_3, a_4, \cdots a_\sigma$ bestimmte Werthe besitzen.

Betrachten wir eine Function

$$Y = F(z),$$

die keine anderen Stellen der z-Ebene als

$$0, 1, a_3, a_4, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$$

zu Verzweigungspunkten hat, und die so beschaffen ist, dass jeder Zweig von Y, wenn $g_\varkappa$ eine endliche ganze Zahl ist, nach $g_\varkappa$-maliger Umkreisung des singulären Punktes $a_\varkappa$ zu seinem Ausgangswerthe zurückkehrt, während sie, wenn $g_\varkappa$ unendlich gross ist, in der Umgebung von $z = a_\varkappa$ auch unendlich vieldeutig sein kann.

Setzen wir dann

$$z = f(\eta),$$

wo η den Integralquotienten der Differentialgleichung (1) bedeutet, so ist die Function

$$Y = F(f(\eta)) = g(\eta)$$

von η offenbar nur innerhalb des Einheitskreises der η-Ebene definirt.

In der Umgebung einer Stelle η, die keine Ecke eines der Bereiche R_ν ist, die aus R_0 durch die Substitutionen

$$S_\nu \qquad (\nu=0,1,2,\cdots\cdots)$$

der Gruppe ϑ hervorgehen, verhält sich die Function $g(\eta)$ offenbar eindeutig, sie verhält sich aber auch eindeutig in der Umgebung einer im Innern des Einheitskreises gelegenen Ecke eines Bereiches R_ν. Denn wenn diese Ecke z. B. mit der Ecke $\lambda_\varkappa$ von R_0 correspondirt, so entspricht einem einfachen Umlaufe von η um $\lambda_\varkappa$ eine $g_\varkappa$-malige Umkreisung des Punktes $a_\varkappa$ durch die Variable z.

Also ist $g(\eta)$ eine unverzweigte und folglich, da das Innere des Einheitskreises eine einfach zusammenhängende Fläche ist, eine schlechthin eindeutige Function von η.

Die functionale Beziehung zwischen Y und z lässt sich also in der Form

$$z=f(\eta), \quad Y=g(\eta)$$

darstellen, wo $f(\eta)$, $g(\eta)$ eindeutige Functionen von η sind, und wir erhalten die sämmtlichen Zweige der Function Y von z, wenn wir in $g(\eta)$ an die Stelle von η die Werthe $S_\nu\eta$ setzen und S_ν der Reihe nach die Substitutionen der Gruppe ϑ durchlaufen lassen. Dies ist das Poincaré'sche Princip in seiner allgemeinen Fassung.

Sei nun

$$Y=F(z)$$

eine willkürlich gegebene Function, die nur eine endliche Anzahl $\sigma+1$ von Verzweigungspunkten besitzt und die eindeutig ist, wenn wir uns die z-Ebene durch einen diese $\sigma+1$ Punkte untereinander verbindenden Schnitt zerschnitten denken. Dann können wir zunächst ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass drei der Verzweigungspunkte an den Stellen

$$a_1=0, \quad a_2=1, \quad a_{\sigma+1}=\infty$$

der z-Ebene gelegen sind, die übrigen $\sigma-2$ Verzweigungspunkte seien

$$a_3, a_4, \cdots a_\sigma.$$

Wenn jeder Zweig der Function Y nach einer endlichen Anzahl von Umkreisungen des Punktes $a_\varkappa$ zu seinem Ausgangswerthe zurückkommt, so sei $g_\varkappa$ gleich dieser Anzahl; wenn die Function Y in der Umgebung von $a_\varkappa$ unendlich vieldeutig ist, so nehmen wir $g_\varkappa=\infty$.

Bilden wir mit Hülfe dieser Werthe $a_3, a_4, \cdots a_\sigma$ und der zugehörigen Zahlen

$$g_1, g_2, \cdots g_\sigma, g_{\sigma+1}$$

die durch die Gleichung (2) definirte Function $q(z)$, und betrachten dann die Differentialgleichung (1), worin $q(z)$ die eben erklärte Bedeutung hat.

Wenn es dann möglich ist, über die in $q(z)$ noch unbestimmt gebliebenen Coefficienten von $E_{\sigma-2}(z)$ so zu disponiren, dass z eine eindeutige Function des Integralquotienten η wird, für welche der Bereich, wo sich diese Function wie eine rationale Function verhält, ein einfach zusammenhängender ist, so folgt aus dem Poincaré'schen Principe, dass auch Y eine eindeutige Function von η sein muss, so dass also die functionale Beziehung, die zwischen Y und z besteht, dadurch dargestellt werden könnte, dass wir z und Y als eindeutige Functionen des Parameters η ausdrücken.

Y kann als Function von z, z. B. als die Lösung einer beliebigen linearen Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten definirt sein, dann sind offenbar die für die Function $F(z)$ aufgestellten Bedingungen erfüllt.

326. Normale Differentialgleichungen. Fuchs'sche Differentialgleichungen. Untergeordnete Differentialgleichungen. Fuchs'sche Functionen, die vorgeschriebene Werthe auslassen.

Wir sagen von einer Differentialgleichung (1), in welcher $q(z)$ die Form (2) besitzt und wo die g_x positive ganze Zahlen oder unendlich gross sind, sie sei eine normale Differentialgleichung. Wenn in einer normalen Differentialgleichung die unabhängige Variable z eine Fuchs'sche Function des Integralquotienten ist, so sagen wir, sie sei eine Fuchs'sche Differentialgleichung.

Damit eine normale Differentialgleichung eine Fuchs'sche sein könne, müssen die Zahlen $g_1, g_2, \cdots g_{\sigma+1}$ die Ungleichung

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{\sigma+1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_i}\right)-1=\frac{-1}{\nu}>0$$

erfüllen, welche (vergl. Nr. 312, S. 205) besagt, dass die Summe der Winkel des Fundamentalbereiches F_0 oder R_0 kleiner als

$$2\pi(\sigma-1)$$

ist, d. h. mit anderen Worten, dass sich R_0 eindeutig conform auf ein von geodätischen Linien gebildetes Polygon auf einer Fläche vom constanten Krümmungsmaasse — 1 abbilden lässt.

Wenn die Zahlen g_i die Ungleichung (4) nicht erfüllen, d. h. wenn entweder

(I) $$-\frac{1}{\nu} < 0$$

oder

(II) $$-\frac{1}{\nu} = 0,$$

so kann die normale Differentialgleichung (1) zwar keine Fuchs'sche sein, aber es kann gleichwohl z eine eindeutige Function von η werden, deren Existenzbereich ein einfach zusammenhängender ist.

Was zunächst den Fall (I) anlangt, so muss also für positives ν

$$\sum_{i=1}^{\sigma+1} \frac{\nu}{g_i}(g_i - 1) = 2\nu - 2$$

sein. Diese Gleichung wurde in der Nr. 299 (S. 149 ff.) discutirt, und wir fanden daselbst als die einzig möglichen Fälle die cyklischen Gruppen mit $\sigma = 1$ und die Gruppen des Dieders, Tetraeders, Oktaeders und Ikosaeders mit $\sigma = 2$. Wie wir schon in der Nr. 312 (S. 206) erwähnt haben, folgt hieraus, dass ν, wenn es positiv ist, stets eine ganze Zahl sein muss; wir haben also das Resultat:

Im Falle (I) bleibt in $q(z)$ kein Parameter unbestimmt, und in der Normalgleichung (1) ist z stets eine rationale Function des Integralquotienten.

Im Falle (II) muss offenbar σ gleich Zwei oder gleich Drei sein.

Für $\sigma = 2$ ist $q(z)$ wiederum vollständig bestimmt, und wir haben die drei (beziehungsweise vier) in der Nr. 289 (S. 113) behandelten Fälle, wo R_0 oder F_0 als geradliniges Dreieck gewählt werden kann und in welchen z eine elliptische Function von η ist.

Für $\sigma = 3$ ergiebt sich als einzige Möglichkeit

$$g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = \frac{1}{2},$$

und $q(z)$ enthält, wenn $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_4 = \infty$ und a_3 willkürlich, aber gegeben ist, noch einen unbestimmten Parameter.

In diesem Falle ist, wie man leicht erkennt, die Differentialgleichung (1) im Wesentlichen diejenige, die wir in der Nr. 197 (Bd. II, 1, S. 256) als das Fuchs'sche Beispiel behandelt haben.

Es ergab sich daselbst, dass der in $q(z)$ willkürlich bleibende Parameter stets und zwar nur auf eine Weise so bestimmt werden kann, dass z als eindeutige Function von η erscheint, und zwar ist dann z im Wesentlichen auch eine elliptische Function von η.

Der Fall (II) liefert also nebst den bereits erledigten Fällen $\sigma = 2$, wo $q(z)$ vollkommen bestimmt ist, einen Fall, in welchem wir lernen, dass die Bestimmung des Parameters, der in $q(z)$ noch

willkürlich geblieben ist, stets und nur auf eine Weise so erfolgen kann, dass z eine eindeutige Function von η sei.

Ein analoges Resultat besteht nun in dem Falle, wo die Zahlen

$$g_1, g_2, \cdots g_{\sigma+1}$$

die Ungleichung (4) befriedigen. Herr Poincaré hat nämlich mit Hülfe der „Méthode de continuité" den folgenden Satz bewiesen:

Wenn in einer normalen Differentialgleichung (1) nebst den die Ungleichung (4) befriedigenden Zahlen g_i noch die singulären Punkte

$$a_3, a_4, \cdots a_\sigma$$

willkürlich vorgeschrieben sind, so lassen sich die Coefficienten der ganzen Function $E_{\sigma-2}(z)$ in $q(z)$ stets und nur auf eine Weise so bestimmen, dass z eine Fuchs'sche Function des Integralquotienten η sei.

Aus diesem Satze, der die in der vorigen Nummer (S. 247) aufgeworfene Frage erledigt, folgt in Verbindung mit den für die Fälle (I), (II) bereits früher gefundenen Resultaten, dass in der That für jede Function

$$Y = F(z),$$

die nur eine endliche Anzahl von Verzweigungspunkten besitzt und die in der durch eine Curve, welche die Verzweigungspunkte untereinander verbindet, zerschnittenen z-Ebene eindeutig ist, ein Parameter η so gefunden werden kann, dass Y und z als eindeutige Functionen von η erscheinen.

Um jedoch die Möglichkeit einer solchen Darstellung zu erweisen, bedarf es nicht des Poincaré'schen Satzes in seiner vollen Allgemeinheit. Um dies einzusehen bemerken wir Folgendes.

Seien für eine gegebene Function Y von der angegebenen Beschaffenheit die Verzweigungspunkte

$$0, 1, a_3, a_4, \cdots a_\sigma, \infty$$

und die zu denselben gehörigen Zahlen $g_\varkappa$ gegeben; dann ist (1) die mit diesen Grössen gebildete normale Differentialgleichung.

Denken wir uns eine andere normale Differentialgleichung (1'), die nebst den singulären Punkten

$$0, 1, a_3, a_4, \cdots a_\sigma, \infty$$

eventuell noch gewisse andere singuläre Punkte

$$a_{\sigma+2}, a_{\sigma+3}, \cdots a_{\sigma+\tau+1}$$

besitzt, in welcher ferner die Differenz der Wurzeln der zu einem Punkte a_x gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung für

$$x = 1, 2, \cdots \sigma + 1$$

der reciproke Werth einer ganzen Zahl γ_x ist, die ein Vielfaches von g_x oder unendlich gross ist, während für $x > \sigma + 1$ diese Differenzen eine beliebige reciproke ganze Zahl oder Null sein kann. Wir sagen dann (vergl. Nr. 303, S. 165) von der normalen Differentialgleichung (1′) sie sei der normalen Differentialgleichung (1) untergeordnet oder subordinirt.

Wir können z. B. eine normale Differentialgleichung, die die $\sigma + 1$ singulären Punkte

$$0, 1, a_3, \cdots a_\sigma, \infty$$

besitzt und deren determinirende Fundamentalgleichungen sämmtlich eine doppelte Wurzel haben, stets als der Differentialgleichung (1) subordinirt ansehen, wenn in (1) einige der Zahlen g_i endliche ganzzahlige Werthe haben.

Gelingt es dann zu zeigen, dass sich in einer der Differentialgleichung (1) subordinirten normalen Differentialgleichung (1′) die noch unbestimmt gebliebenen $\sigma + \tau - 2$ Parameter so bestimmen lassen, dass diese Differentialgleichung eine Fuchs'sche wird, so sind offenbar für die Function

$$Y = F(z)$$

Y und z auch eindeutige Functionen des Integralquotienten dieser Fuchs'schen Differentialgleichung.

Wenn in einer Fuchs'schen Differentialgleichung alle determinirenden Fundamentalgleichungen doppelte Wurzeln haben, so sind in dem Fundamentalbereiche R_0 der entsprechenden Fuchs'schen Gruppe ϑ alle Winkel gleich Null, die Ecken aller Bereiche, die aus R_0 durch die Substitutionen von ϑ hervorgehen, liegen auf der Peripherie des Einheitskreises, und die unabhängige Variable z, die eine Fuchs'sche Function des Integralquotienten ist, hat die charakteristische Eigenschaft, innerhalb des Bereiches, wo sich diese Function wie eine rationale Function verhält, keinen der Werthe annehmen zu können, der einem singulären Punkte der betrachteten Fuchs'schen Differentialgleichung entspricht. Wir sagen dann (vergl. Nr. 303, S. 166), diese Fuchs'sche Function lasse die gedachten Werthe aus.

Es wird also hinreichend sein, wenn wir zeigen, dass stets eine Fuchs'sche Function hergestellt werden kann, die die beliebig vorgeschriebenen Werthe

$$a_1, a_2, a_3, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1},$$

wo wir, ohne die Allgemeinheit zu beschränken,

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

nehmen können, und eventuell auch noch gewisse andere Werthe

$$a_{\sigma+2}, \cdots a_{\tau+\sigma+1}$$

auslässt.

327. Beweis, dass eine normale Differentialgleichung nicht auf zwei Arten zu einer Fuchs'schen gemacht werden kann.

Ehe wir auf den am Schlusse der vorigen Nummer in Aussicht gestellten Nachweis eingehen, möge erst gezeigt werden, dass allgemein für eine beliebige normale Differentialgleichung (1), wo die $g_\varkappa$ der Ungleichung (4) Genüge leisten, die Bestimmung der Coefficienten von $E_{\sigma-2}(z)$ bei fester Wahl der $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ nicht auf zwei verschiedene Weisen so erfolgen kann, dass die Differentialgleichung eine Fuchs'sche wird.

Nehmen wir an, es sei für eine bestimmte Wahl der Coefficienten von $E_{\sigma-2}(z)$ die Function $q(z)$ gleich $q_1(z)$, für eine andere Wahl dieser Coefficienten gleich $q_2(z)$, und mögen die beiden Differentialgleichungen

(5) $$\frac{d^2y}{dz^2} = q_1(z)y, \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = q_2(z)y$$

Fuchs'sche sein. Wir bezeichnen den Integralquotienten der ersten Gleichung durch η, den der zweiten durch ζ und denken uns η, ζ so gewählt, dass für beide Fuchs'sche Functionen

$$z = f_1(\eta), \qquad z = f_2(\zeta)$$

der Orthogonalkreis der Einheitskreis der η- beziehungsweise ζ-Ebene sei, dass ferner η und ζ gleichzeitig verschwinden, so dass etwa

$$a = f_1(0), \qquad a = f_2(0)$$

ist, wo a einen regulären Punkt beider Differentialgleichungen (5) bedeutet, und dass endlich für einen anderen ebenfalls regulären Punkt $z = b$ sowohl η als auch ζ reale Werthe annehmen.

Die Gruppen ϑ_1, ϑ_2, die zu den beiden Fuchs'schen Functionen $f_1(\eta)$, $f_2(\zeta)$ gehören, sind holoedrisch isomorph, die entsprechenden Fundamentalbereiche R_0^1 und R_0^2 sind beide eindeutig conforme Ab-

bildungen der in passender Weise zerschnittenen z-Ebene. Wir schliessen hieraus, dass η, ζ gegenseitig eindeutige Functionen von einander sind, so lange diese beiden Grössen innerhalb des Einheitskreises verbleiben.

Betrachten wir den Quotienten

$$\frac{\zeta}{\eta},$$

so ist derselbe sowohl als Function von η als auch als Function von ζ aufgefasst eindeutig innerhalb des Einheitskreises der betreffenden Variabeln, und bleibt überdies, da ζ, η gleichzeitig verschwinden, daselbst stets endlich und von Null verschieden.

Zerlegen wir z. B. η in seinen realen und imaginären Theil

$$\eta = u + vi$$

und fassen den Quotienten von ζ und η als Function von η auf, so wird der Ausdruck

$$t = \log \left| \frac{\zeta}{\eta} \right|$$

eine in dem Bereiche

$$u^2 + v^2 < 1$$

eindeutige, endliche und stetige Function der beiden realen Variabeln u, v sein, die überdies, da t den realen Theil der monogenen Function

$$\log \frac{\zeta}{\eta}$$

darstellt, der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} = 0 \tag{6}$$

Genüge leistet.

Betrachten wir in der η-Ebene einen Kreis

$$u^2 + v^2 = r^2,$$

dessen Radius r kleiner ist als Eins. Wenn η auf der Peripherie dieses Kreises verbleibt, ist ζ dem absoluten Betrage nach stets kleiner wie Eins, und folglich

$$t < \log \frac{1}{r}. \tag{7}$$

Nach einem bekannten Satze kann aber eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (6), die innerhalb eines von einer geschlossenen Curve C begrenzten Bereiches eindeutig, endlich und stetig ist, im Innern dieses Bereiches keinen Werth annehmen der grösser ist, als der grösste Werth, den die Function auf der Begrenzung C erhält. Die Ungleichung (7) gilt folglich für alle Werthe

$$u^2 + v^2 < r^2.$$

Lassen wir nun r gegen die Einheit convergiren, dann ist

$$\lim_{r=1} \log \frac{1}{r} = 0;$$

wir schliessen also, dass t niemals positiv sein kann, wenn η im Innern des Einheitskreises verbleibt. Es ist also für $|\eta| < 1$ jedenfalls

$$\left|\frac{\zeta}{\eta}\right| \leqq 1.$$

Da η und ζ einander ganz gleichberechtigt gegenüberstehen, folgt ebenso, dass für $|\zeta| < 1$ auch

$$\left|\frac{\eta}{\zeta}\right| \leqq 1$$

sein muss. Wir haben also für

$$|\eta| < 1, \qquad |\zeta| < 1$$

nothwendig die Gleichung

$$|\eta| = |\zeta|,$$

also

$$\eta = e^{\tau i} \zeta$$

wo τ eine reale Constante bedeutet.

Da aber η, ζ für $z = b$ gleichzeitig reale Werthe annehmen sollten, muss $\tau = 0$ sein, d. h. es ist

$$\eta = \zeta,$$

so dass in der That die beiden Differentialgleichungen (5) identisch sein müssen. D. h.:

Wenn bei gegebenen g_i und a_i die Coefficienten von $E_{\sigma-2}(z)$ so bestimmt werden können, dass die normale Differentialgleichung (1) eine Fuchs'sche wird, so ist diese Bestimmung auch nur auf eine einzige Weise möglich.

328. Erläuterung der „Méthode de continuité" an einem einfachen Beispiele.

Wir wollen nun die „Méthode de continuité", deren sich Herr Poincaré zum Beweise seines in der Nr. 326 (S. 251) angeführten Satzes bedient, an einem einfachen Beispiele zu erläutern suchen, um eine Vorstellung von dieser tiefen und wichtigen Methode zu erlangen.

Wir betrachten den Fall, wo die gegebenen Werthe

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$$

real sind. Wenn dann die normale Differentialgleichung (1) durch geeignete Wahl der Coefficienten von $E_{\sigma-2}(z)$ zu einer Fuchs'schen

gemacht werden kann, so ist leicht einzusehen, dass die entsprechende Fuchs'sche Gruppe ϑ eine symmetrische sein müsse. Dann sind also (Nr. 320, S. 231) in $q(z)$ alle Coefficienten real, d. h. die Coefficienten von $E_{\sigma-2}(z)$ selbst sind reale Grössen.

Für $\sigma = 2$ ist $q(z)$ vollkommen bestimmt. Der nächste Fall $\sigma = 3$ ist also der einfachste, für den der Poincaré'sche Satz überhaupt in Betracht kommt.

Nehmen wir also $\sigma = 3$, d. h. nebst

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_4 = \infty$$

noch einen Punkt a_3, und zwar möge a_3 ein realer zwischen 1 und ∞ gelegener Werth sein.

Die Zahlen g_1, g_2, g_3, g_4 mögen sämmtlich unendlich gross gewählt werden, es handelt sich darum zu zeigen, dass es eine Fuchs'sche Function giebt, die die Werthe $0, 1, a_3, \infty$ auslässt.

Betrachten wir in der η-Ebene ein Viereck mit den auf dem Einheitskreise gelegenen Ecken $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, dessen Seiten Kreise sind, die den Einheitskreis rechtwinkelig schneiden. Wir construiren das Spiegelbild dieses Vierecks etwa in Bezug auf die Seite (μ_1, μ_4) und vereinigen dasselbe mit dem ursprünglichen Vierecke zu einem Bereiche R_0, der dann den Fundamentalbereich einer gewissen symmetrischen Fuchs'schen Gruppe $\bar{\vartheta}$ darstellt.

Sei

$$x = \varphi(\eta)$$

diejenige zur Gruppe $\bar{\vartheta}$ gehörige Fuchs'sche Function, die die eindeutig conforme Abbildung des Viereckes $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ auf die untere x-Halbebene darstellt und die in den Punkten μ_1, μ_2, μ_4 die Werthe

$$0 = \varphi(\mu_1), \quad 1 = \varphi(\mu_2), \quad \infty = \varphi(\mu_4)$$

annimmt. Setzen wir dann

$$\varphi(\mu_3) = c,$$

so ist c real positiv und grösser wie Eins.

Die Function η von x ist dann der Integralquotient einer linearen Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \bar{q}(x)\,y, \tag{8}$$

wo $\bar{q}(x)$ eine rationale Function bedeutet, die aus dem Ausdrucke (2) (Nr. 325, S. 246) hervorgeht, wenn man daselbst x an Stelle von z schreibt und

$$\sigma = 3, \quad a_1 = 0, \; a_2 = 1, \; a_3 = c, \quad g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = 0$$

nimmt; in

$$E_{\sigma-2}(x) = x + \tau$$

hat der constante Parameter τ einen bestimmten Werth.

Es handelt sich darum zu zeigen, dass wir die Ecken $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ des Vierecks als Punkte des Einheitskreises so wählen können, dass

$$c = \varphi(\mu_3)$$

gleich dem willkürlich vorgeschriebenen zwischen 1 und ∞ gelegenen realen Werthe a_3 wird.

Lassen wir die drei Ecken μ_1, μ_2, μ_4 fest (vergl. Fig. 32), und denken wir uns μ_3 auf dem Bogen (μ_2, μ_4) veränderlich, so hängt die Function x der Variabeln η von dem veränderlichen Parameter μ_3 ab. Mit μ_3 ändert sich auch die Gruppe $\bar{\vartheta}$, und zwar sind die verschiedenen Gruppen, welche verschiedenen Werthen von μ_3 entsprechen, offenbar holoedrisch isomorph.

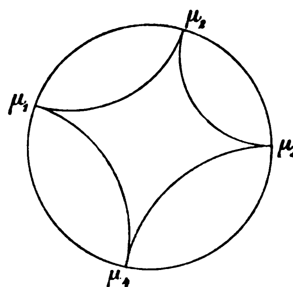


Fig. 32.

Nach dem Satze der Nr. 309 (S. 192) sind die zur Gruppe $\bar{\vartheta}$ gehörigen Fuchs'schen Thetafunctionen stetige Functionen des Parameters μ_3; also ist auch die Function $\varphi(\eta)$ eine stetige Function von μ_3, und folglich hängt auch der Werth c, den diese Function für $\eta = \mu_3$ annimmt, stetig von dem Parameter μ_3 ab.

Lassen wir μ_3 mit μ_2 oder μ_4 zusammenfallen, so verwandelt sich das Viereck, von welchem wir ausgegangen waren, in ein Dreieck. Die Untersuchung dieser Grenzfälle bildet einen wesentlichen Theil der Poincaré'schen Methode.

Herr Poincaré zeigt, dass wenn μ_3 auf der Peripherie des Einheitskreises verbleibend in den Punkt μ_2 einrückt,

$$\lim_{\mu_3=\mu_2} \varphi(\mu_3) = \lim_{\mu_3=\mu_2} c = 1,$$

und wenn μ_3 ebenso in den Punkt μ_4 einrückt,

$$\lim_{\mu_3=\mu_4} \varphi(\mu_3) = \lim_{\mu_3=\mu_4} c = \infty$$

wird.

Nach dem in der vorigen Nummer bewiesenen Satze kann nicht für zwei von einander verschiedene Werthe von μ_3, die auf dem Einheitskreise zwischen μ_2, μ_4 liegen, die Grösse c denselben Werth annehmen.

Wir haben also eine stetige Function c von μ_3, die, wenn μ_3 auf dem Einheitskreise von μ_2 bis μ_4 geht, jeden Werth nur einmal annimmt, für $\mu_3 = \mu_2$ gleich Eins und für $\mu_3 = \mu_4$ gleich Unendlich wird. Nach einem bekannten Satze muss diese Function folglich jeden zwischen Eins und Unendlich gelegenen Werth einmal und nur einmal annehmen, während μ_3 den zwischen μ_2 und μ_4 gelegenen Bogen des Einheitskreises durchläuft.

Damit ist also der Poincaré'sche Satz (Nr. 326, S. 251) in dem hier betrachteten besonderen Falle bewiesen. Aehnlich lässt sich der Beweis für den Fall beliebig vieler realer $a_3, a_4, \cdots a_\sigma$ und beliebiger der Ungleichung (4) (Nr. 326, S. 249) genügender g_x führen. Wesentlich schwieriger ist die Anwendung der „Méthode de continuité" im allgemeinen Falle nicht realer Werthe der

$$a_3, a_4, \cdots a_\sigma;$$

wir müssen es uns versagen, auf eine Darlegung des Verfahrens einzugehen, mit Hülfe dessen Herr Poincaré diese Schwierigkeiten überwunden hat.

329. Untergruppen mit endlichem Quotienten von Fuchs'schen Gruppen.

Wir wollen nun eine andere Methode entwickeln, die in dem Falle realer Werthe der $a_3, a_4, \cdots a_\sigma$ und für unendlich grosse g_x nicht nur einen Beweis des Poincaré'schen Theorems liefert, sondern auch lehrt, wie man die Fuchs'sche Function, welche die Werthe

$$a_1 = 0, \; a_2 = 1, \; a_3, \; a_4, \cdots a_\sigma, \; a_{\sigma+1} = \infty$$

auslässt, wirklich herzustellen im Stande ist. Diese Methode stützt sich auf die Theorie der Untergruppen oder, wie man auch sagen kann, auf die Theorie der Transformation der Fuchs'schen Functionen; wir müssen daher jetzt Einiges aus den Grundzügen dieser Theorie entwickeln.

Es sei eine Fuchs'sche Gruppe ϑ von der in den ersten Kapiteln des vorigen Abschnittes behandelten Art durch ihren Fundamentalbereich R_0 gegeben, die Substitutionen von ϑ seien

$$S_0 = 1, \; S_1, \; S_2, \cdots,$$

insbesondere möge $S_x (x = 1, 2, \cdots \sigma)$ diejenige Substitution bedeuten, die die Seite t_x von R_0 in die congruente t_x' überführt. Ferner sei

$$z = f(\eta)$$

eine zur Gruppe ϑ gehörige Fuchs'sche Function, die innerhalb R_0 jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt, durch welche sich also jede zur Gruppe ϑ gehörige Fuchs'sche Function rational ausdrücken lässt. Die Werthe, welche z in den Eckpunkten

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{\sigma+1}$$

von R_0 annimmt, bezeichnen wir wie gewöhnlich mit

(1) $$a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}.$$

Wir gelangen auf die einfachste Weise zu derjenigen Art von Untergruppen der Gruppe ϑ, die uns hier am meisten interessirt, indem wir eine algebraische Function Z von z betrachten, die sich nur in den Punkten (1) der z-Ebene verzweigt, und die folglich nach dem Poincaré'schen Principe als eindeutige Function von η

$$Z = F(\eta)$$

dargestellt werden kann, wenn, wie wir voraussetzen wollen, die Ordnungszahlen der dem Punkte $a_\varkappa$ entsprechenden Windungspunkte in der die Verzweigung von Z darstellenden Riemann'schen Fläche T in der zu $a_\varkappa$ gehörigen Zahl $g_\varkappa$ als Divisoren enthalten sind.

Betrachten wir ein System von geschlossenen Wegen in der z-Ebene, die so beschaffen sind, dass beim Durchlaufen derselben alle Zweige der algebraischen Function Z von z zum Vorschein kommen, dann entsprechen diesen Wegen gewisse Substitutionen

$$T_1, T_2, \cdots T_{n-1}$$

der Gruppe ϑ, und wir haben folglich in den n Ausdrücken

(2) $$Z_\varkappa = F(T_\varkappa \eta) \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n-1),$$

woselbst

$$T_0 = 1, \qquad Z_0 = Z = F(\eta)$$

gesetzt wurde, die sämmtlichen Wurzeln der irreductiblen algebraischen Gleichung n-ten Grades mit in z rationalen Coefficienten

(3) $$\Phi(Z, z) = 0,$$

der Z als Function von z genügt.

Die Function $F(\eta)$ bleibt bei gewissen Substitutionen der Gruppe ϑ ungeändert; diese Substitutionen bilden offenbar eine Gruppe Θ, also eine Untergruppe von ϑ. Die Gruppe Θ ist im Sinne der allgemeinen der Nr. 322 (S. 236) aufgestellten Definition eine Fuchs'sche, sie aber im Allgemeinen nicht vom Geschlechte Null, wie ϑ.

Setzen wir

$$Z_\varkappa = F(T_\varkappa \eta) = F_\varkappa(\eta) \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n-1),$$

so ist offenbar, wenn Σ irgend eine Substitution von Θ bedeutet,

$$F_\varkappa(\eta) = F(\Sigma T_\varkappa \eta) = F(T_\varkappa T_\varkappa^{-1} \Sigma T_\varkappa \eta) = F_\varkappa(T_\varkappa^{-1} \Sigma T_\varkappa \eta),$$

und umgekehrt ist jede Substitution von ϑ, die $F_\varkappa(\eta)$ ungeändert lässt, in der Form

$$T_\varkappa^{-1} \Sigma T_\varkappa$$

darstellbar. Die Substitutionen von ϑ, welche $F_\varkappa(\eta)$ ungeändert lassen, bilden folglich die mit Θ innerhalb ϑ gleichberechtigte Untergruppe (Nr. 140, Bd. II, 1, S. 36)

$$\Theta_\varkappa = T_\varkappa^{-1} \Theta T_\varkappa.$$

Betrachten wir nun eine beliebige Substitution S von ϑ und bilden

$$F(S\eta),$$

so muss, da die Anwendung der Substitution S auf η einem geschlossenen Wege der Variabeln z entspricht,

$$F(S\eta) = F_\varkappa(\eta)$$

sein, wo $\varkappa$ eine bestimmte der Zahlen $0, 1, \cdots n-1$ bedeutet. Wir haben also

$$F(S\eta) = F(T_\varkappa \eta),$$

d. h. die Substitution

$$S T_\varkappa^{-1} = \Sigma$$

gehört der Gruppe Θ an, denn sie lässt $F(\eta)$ ungeändert und ist in ϑ enthalten.

Die beliebige Substitution S von ϑ ist also in der Form

$$S = \Sigma T_\varkappa$$

darstellbar.

Wir können demnach

(4) $$\vartheta = \Theta(1, T_1, T_2, \cdots T_{n-1})$$

setzen, wo das symbolische Product auf der rechten Seite andeutet, dass jede Substitution von Θ mit jeder der Substitutionen

(5) $$1, T_1, T_2, \cdots T_{n-1}$$

zu componiren ist. Wir nennen das System der Substitutionen (5) den Quotienten der Untergruppe Θ in Bezug auf ϑ (vergl. Nr. 275, S. 66),

ɪd sagen, da dieser Quotient aus einer endlichen Anzahl von Sub-itutionen besteht, Θ sei eine **Untergruppe mit endlichem Quo-enten** von ϑ.

Wir können uns die Substitutionen (5) so gewählt denken, dass e Bereiche

$$R_\varkappa = T_\varkappa R_0 \qquad (\varkappa=1,2,\cdots n-1),$$

e aus dem Fundamentalbereiche R_0 durch Anwendung dieser Sub-tutionen hervorgehen, mit R_0 zusammengenommen ein zusammen-ngendes Gebiet P_0 bilden. Dieses Gebiet spielt für die Untergruppe die Rolle des Fundamentalbereiches, die Ecken von P_0 vertheilen h in Cykeln, und die Winkelsumme bei den Ecken eines Cyklus ist, die Gruppe Θ eine discontinuirliche ist, gleich einem aliquoten eile von 2π.

). Vereinigung mehrerer Bereiche zu einem Fundamentalbereiche. Untergruppen vom Geschlechte Null.

Wir betrachten nun umgekehrt eine gewisse Anzahl von Bereichen · der Gruppe ϑ entsprechenden Theilung des Innern des Einheits-ɪises, die mit R_0 zusammengenommen ein zusammenhängendes Gebiet ' bilden; seien

$$R_0,\ R_1',\ R_2',\ \cdots R'_{n-1}$$

ɪse Bereiche, und bedeute $T_\varkappa'$ die Substitution von ϑ, welche R_0 in ' überführt. Dann werden von den Seiten der Bereiche (6) gewisse ɪi geblieben sein, d. h. längs einiger dieser Seiten stösst der Bereich ' an Bereiche der der Gruppe ϑ entsprechenden Theilung, die von ɪ Bereichen (6) verschieden sind. Diese Seiten bilden die Begren-ɪg von P_0'.

Sei t_i irgend eine Seite von R_0, t_i' die ihr congruente; also

$$t_i' = S_i t_i,$$

eute ferner $t_{i\varkappa}$ die dem t_i entsprechende Seite von $R_\varkappa'$ und $t_{i\varkappa}'$ die ɪ t_i' entsprechende Seite von $R_\varkappa'$, also

$$t_{i\varkappa} = T_\varkappa t_i, \quad t_{i\varkappa}' = T_\varkappa t_i',$$

ɪn werden von den Seiten

$$t_i,\ t_{i1},\ t_{i2},\ \cdots t_{i,n-1}$$

e gewisse Anzahl, etwa ν_i, frei geblieben sein. Offenbar sind dann ɪh genau ν_i von den Seiten

$$t_i',\ t_{i1}',\ t_{i2}',\ \cdots t_{i,n-1}'$$

i.

Wir können dann einer beliebigen der frei gebliebenen Seiten t_i eine beliebige der frei gebliebenen Seiten, deren erster Index ebenfalls gleich i ist, etwa $t'_{i\varkappa}$, zuordnen, und so ν_i Seitenpaare von P_0' erhalten. Auf diese Weise erscheinen die Seiten von P_0' einander paarweise zugeordnet; möge der Seite $\tau_\varkappa$ von P_0' die Seite $\tau'_\varkappa$ entsprechen, für

$$\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma_1; \quad \sigma_1 = \sum_{i=1}^{\sigma} \nu_i.$$

Die Ecken von P_0' mögen dann in folgender Weise angeordnet werden.

Denken wir uns die Begrenzung von P_0' in einem bestimmten Sinne, also etwa so durchlaufen, dass die Fläche von P_0' zur Linken bleibt. Wir gehen von einer Ecke $\lambda_1^{(1)}$ von P_0' aus, durchlaufen in dem angegebenen Sinne die in $\lambda_1^{(1)}$ einmündende Seite von P_0', dann in demselben Sinne die dieser Seite entsprechende und kommen auf diese Weise zu einer zweiten Ecke $\lambda_2^{(1)}$ von P_0'. Dann durchlaufen wir wiederum die in $\lambda_2^{(1)}$ einmündende Seite, dann ihre entsprechende, kommen so zu einer dritten Ecke $\lambda_3^{(1)}$ von P_0' und fahren so fort, bis wir zu der Ausgangsecke $\lambda_1^{(1)}$ zurückgekehrt sind, was offenbar nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen des angegebenen Vorganges eintreten muss. Die so der Reihe nach berührten Ecken

$$\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \lambda_3^{(1)}, \cdots$$

fassen wir in einen Cyklus zusammen.

Wir sehen, dass sich die Ecken von P_0' auf diese Weise in Cykeln vertheilen.

Es möge nun vorausgesetzt werden, dass für jeden der so gewonnenen Cykeln die Summe der Winkel von P_0' ein aliquoter Theil von 2π sei.

Dann bilden die Substitutionen $\Sigma_\varkappa$, welche die Seiten $\tau_\varkappa$ von P_0' in ihre entsprechenden $\tau_\varkappa'$ verwandeln, mit ihren inversen $\Sigma_\varkappa^{-1}$ die Basis einer Gruppe Θ', für welche P_0' die Rolle des Fundamentalbereiches spielt, und diese Gruppe Θ' ist eine Untergruppe von ϑ, also selbst wieder eine Fuchs'sche Gruppe.

Denken wir uns den Bereich P_0' ausgeschnitten und derart deformirt, dass jede Seite $\tau_\varkappa$ mit ihrer entsprechenden $\tau_\varkappa'$ so zusammenfällt, dass correspondirende Punkte zur Deckung gelangen, so vereinigen sich die in einen Cyklus zusammengefassten Ecken von P_0' in einem Punkte. Die so entstehende geschlossene Fläche $\overline{P_0'}$ ist im Allgemeinen von höherem als einfachem Zusammenhange, sei ihr Zusammenhang ein $(2\varrho + 1)$-facher.

Diese Fläche $\overline{P}_0'$ denken wir uns nun auf die z-Ebene in folgender Weise abgebildet. Wir markiren in jedem Punkte von $\overline{P}_0'$ denjenigen η-Werth, der vor der Deformation von P_0' durch den betreffenden Punkt dargestellt wurde, und bestimmen nun die Gesammtheit der z-Werthe, die diesen η-Werthen vermöge der Function

$$z = f(\eta)$$

entsprechen. Diese Gesammtheit bildet eine Fläche, welche die z-Ebene offenbar genau n-fach überdeckt und die eine unzerschnittene ist, da ja z in correspondirenden Punkten der Seiten $\tau_\varkappa$, $\tau_\varkappa'$ von P_0' denselben Werth annimmt. Diese n-blättrige Fläche T' ist als eindeutig conforme Abbildung von $\overline{P}_0'$ eine $(2\varrho + 1)$-fach zusammenhängende und besitzt nur die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$, die den Ecken der Bereiche (6), aus denen sich P_0' zusammensetzt, entsprechen, zu Windungspunkten.

Denken wir uns nun eine Function Z' von z, die auf dieser n-blättrigen Fläche T' eine eindeutige Function des Ortes ist und jeden Werth nur in einer endlichen Anzahl von Stellen annimmt, so ist diese Function eine algebraische Function von z und eine eindeutige Function von η

$$Z' = F'(\eta).$$

Diese Function bleibt offenbar bei den Substitutionen der Gruppe Θ' ungeändert, ist also eine zu dieser Untergruppe von ϑ gehörige Fuchs'sche Function, und zwar eine solche Function vom Geschlechte ϱ.

Die Gruppe Θ' ist eine Untergruppe mit endlichem Quotienten von ϑ; wir haben nämlich offenbar

$$\vartheta = \Theta'(1, T_1', T_2', \cdots T_{n-1}'),$$

und die Ausdrücke

$$Z_\varkappa' = F'(T_\varkappa' \eta) \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n-1)$$

stellen die sämmtlichen Zweige der algebraischen Function Z' von η dar.

Wir kommen also, sowohl wenn wir von einer algebraischen Function von z, die in η eindeutig ist, ausgehen, als auch wenn wir eine endliche Anzahl der Bereiche der durch die Gruppe ϑ bestimmten Theilung zu einem neuen Bereiche P_0 zusammenfassen, zu Untergruppen mit endlichem Quotienten von ϑ, und zwar können wir offenbar auf beide Arten zu jeder beliebigen solchen Untergruppe gelangen.

Von besonderer Wichtigkeit für uns ist der Fall, wo die Untergruppe mit endlichem Quotienten selbst wieder eine Fuchs'sche Gruppe von derselben Beschaffenheit wie ϑ, d. h. also eine Fuchs'sche Gruppe vom Geschlechte Null ist.

Um zu einer solchen Untergruppe Θ' zu gelangen, hat man die Bereiche (6) nur so zu wählen und die Zuordnung der frei gebliebenen Seiten in entsprechende Paare nur so einzurichten, dass der Bereich P_0' in Bezug auf die Vertheilung seiner Ecken in Cykeln die für den Bereich R_0 vorausgesetzte Beschaffenheit besitzt. Bedeutet dann Z' eine zu der Gruppe Θ' gehörige Fuchs'sche Function, welche innerhalb des Fundamentalbereiches P_0' jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt, so lässt sich jede zur Gruppe Θ' gehörige Fuchs'sche Function rational durch Z' darstellen.

Nun ist offenbar

$$z = f(\eta)$$

eine eindeutige Function von η, die bei den Substitutionen von Θ' ungeändert bleibt, denn z bleibt ja bei allen Substitutionen von ϑ ungeändert, und Θ' ist in ϑ als Untergruppe enthalten. Ferner nimmt z innerhalb eines jeden der Bereiche (6) jeden Werth nur einmal an, also erhält z innerhalb P_0' jeden Werth genau n Male, wenn n die Anzahl der Bereiche (6) angiebt. Es ist also z eine zur Gruppe Θ' gehörige Fuchs'sche Function und folglich eine rationale Function

$$z = \Re_1(Z') \tag{7}$$

von Z'.

Da zu jedem Werthe von z genau n Werthe von η innerhalb P_0' gehören und da Z' innerhalb P_0' jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt, gehören zu jedem Werthe von z genau n im Allgemeinen von einander verschiedene Werthe von Z', die nur für diejenigen z-Werthe, welche Ecken der Bereiche (6) entsprechen, d. h. für die Punkte

$$z = a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$$

theilweise zusammenfallen können.

D. h.: Die Gleichung (7) stellt eine algebraische Gleichung n-ten Grades für Z' als Function von z dar, und die Coefficienten dieser Gleichung sind lineare Functionen von z. Diese Gleichung ist also vom Range Null.

Wenn Z' eine Fuchs'sche Function bedeutet, die zu einer Untergruppe mit endlichem Quotienten Θ' von ϑ gehört, die ebenfalls eine Fuchs'sche Gruppe vom Geschlechte Null ist, und wenn Z' innerhalb des Fundamentalbereiches P_0' von Θ' jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt, so sagen wir, die Fuchs'sche Function Z' gehe aus der Fuchs'schen Function z durch eine rationale Transformation und zwar durch eine solche Transformation vom n-ten Grade hervor,

ɪn P_0' durch Vereinigung von n Bereichen der der Gruppe ϑ entechenden Theilung des Einheitskreises entstanden ist.

Wenn man die Bereiche (6) kennt, so hat es keine Schwierigkeit Riemann'sche Fläche anzugeben, die die Verzweigung der algeischen Function Z' von z darstellt. Wir werden dies im folgenden ɔitel an einigen Beispielen erläutern.

. Ausgezeichnete Untergruppen. Beziehungen zur Galois'schen Theorie der algebraischen Gleichungen.

Indem wir auf die Bezeichnungen der Nr. 329 zurückgreifen, wollen zunächst kurz den Fall betrachten, wo die Untergruppe Θ, die der algebraischen Function Z von z gehört, in der Gruppe ϑ als ɪgezeichnete Untergruppe enthalten ist.

In diesem Falle ist Θ mit jeder Substitution von ϑ vertauschbar, l folglich

$$\Theta_\varkappa = T_\varkappa^{-1} \Theta T_\varkappa = \Theta \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n-1).$$

Die sämmtlichen Zweige

$$Z_0, Z_1, \cdots Z_{n-1}$$

algebraischen Function Z von z sind also Fuchs'sche Functionen von lie bei den Substitutionen derselben Gruppe Θ ungeändert bleiben, . hieraus folgt (Nr. 323, S. 241), dass diese sämmtlichen Zweige ch einen derselben und durch z rational mit constanten Coeffiɪten dargestellt werden können. Die Gleichung (3) der Nr. 329 259), welche die algebraische Function Z von z definirt, ist demh im Sinne der von Kronecker eingeführten Terminologie eine .ois'sche.

Aus diesen Bemerkungen können wir in dem allgemeinen Falle, die Gruppe Θ keine ausgezeichnete Untergruppe von ϑ ist, einige htige Folgerungen ziehen. Betrachten wir nämlich die mit Θ innerɔ ϑ gleichberechtigten Untergruppen

$$\Theta_\varkappa = T_\varkappa^{-1} \Theta T_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n-1),$$

. sei S eine beliebige Substitution von ϑ. Dann ist S entweder Θ enthalten, oder es wird der Zweig Z_0 unserer algebraischen ɪction Z von z durch Anwendung von S auf η in einen anderen ɜig, etwa Z_i, dieser Function übergeführt. Im letzteren Falle ist Gruppe

$$S^{-1} \Theta S$$

diejenige, deren Substitutionen den Zweig Z_i ungeändert lassen, d. h. nichts anderes wie Θ_i. Wenn wir also die Gruppe Θ durch irgend eine Substitution von ϑ transformiren, so erhalten wir immer nur eine der Gruppen

$$\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_{n-1},$$

d. h. diese Gruppen sind die sämmtlichen mit Θ innerhalb ϑ gleichberechtigten Untergruppen.

Betrachten wir nun die Gesammtheit der Substitutionen, die denen Gruppen

$$\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_{n-1}$$

gleichzeitig angehören, so bildet diese Gesammtheit offenbar ebenfalls eine Gruppe, also eine Untergruppe T von ϑ.

Seien $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_{n-1}$ unbestimmte, aber von z unabhängige Grössen, dann ist

$$V = \alpha_0 Z_0 + \alpha_1 Z_1 + \cdots + \alpha_{n-1} Z_{n-1}$$

die zu der algebraischen Gleichung (3) gehörige empfindliche Function (Nr. 148, Bd. II, 1, S. 61). Da die Gruppe T aus der Gesammtheit derjenigen Substitutionen von ϑ besteht, die jeden Zweig der algebraischen Function Z von z ungeändert lassen, stellt offenbar T genau diejenige Gruppe dar, bei deren Substitutionen die Function V von η ihren Werth nicht verändert, d. h. V ist eine zu der Gruppe T gehörige Fuchs'sche Function von η, und da V überdies eine algebraische Function von z ist, so ist T eine Untergruppe mit endlichem Quotienten von ϑ.

Durch alle möglichen Umläufe, die die Variable z in ihrer Ebene vollzieht, erfahren die Zweige

$$Z_0, Z_1, \cdots Z_{n-1}$$

gewisse Permutationen, deren Gesammtheit die Galois'sche Gruppe γ der Gleichung (3) constituirt, wenn man als Rationalitätsbereich den Bereich der rationalen Functionen von z mit willkürlichen constanten Coefficienten zu Grunde legt. Durch Anwendung dieser Permutationen in dem Ausdrucke für V verwandelt sich diese Function in die sämmtlichen Zweige derjenigen irreductiblen Gleichung mit in z rationalen Coefficienten, der V Genüge leistet, und diese Gleichung ist dann nichts Anderes, wie der in dem angegebenen Rationalitätsbereiche irreductible Factor der zu der algebraischen Gleichung (3) gehörigen Galois'schen Resolvente. Sei

$$1, U_1, U_2, \cdots U_{\nu-1}$$

ein System von Substitutionen der Gruppe ϑ, bei deren Anwendung

auf η die sämmtlichen Zweige der algebraischen Function V von z zum Vorschein kommen, so ist also

$$\vartheta = \mathsf{T}(1, U_1, U_2, \cdots U_{\nu-1}),$$

und ν ist die Ordnung der zur Gleichung (3) gehörigen Galois'schen Gruppe γ, d. h. die Anzahl der in γ enthaltenen Permutationen, die ihrerseits eindeutig den Substitutionen

$$1, U_1, U_2, \cdots U_{\nu-1}$$

zugeordnet sind.

Da irgend eine Substitution S von ϑ auf η angewandt nur eine Permutation der Zweige

$$Z_0, Z_1, \cdots Z_{n-1}$$

bewirken kann, während die Substitutionen von T alle diese Zweige ungeändert lassen, so verwandelt sich jede Substitution von T durch Transformation mit S wieder in eine Substitution, die alle Zweige der Function Z von z ungeändert lässt, d. h. wieder in eine Substitution von T; wir haben also

$$S^{-1}\mathsf{T}S = \mathsf{T},$$

d. h. T ist eine ausgezeichnete Untergruppe von ϑ. Aus den oben gemachten Bemerkungen über ausgezeichnete Untergruppen folgt daher in Uebereinstimmung mit einem bekannten Satze der Algebra, dass die Gleichung, der V als Function von z genügt, die Eigenschaft besitzt, dass jede ihrer Wurzeln durch eine derselben und durch z rational ausgedrückt werden kann, d. h. dass diese Gleichung eine Galois'sche ist. Da ferner jedes $Z_\varkappa$ als Function von η durch die Substitutionen von T nicht verändert wird, ist auch jeder Zweig der algebraischen Function Z von z eine rationale Function von V und z mit constanten Coefficienten.

Zweites Kapitel.

332. Behandlung einer speciellen Untergruppe vom Geschlechte Null.

Sei die Gruppe ϑ so beschaffen, dass die sämmtlichen Winkel ihres Fundamentalbereiches R_0 gleich Null sind. Es ist also

$$g_\varkappa = \infty \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1),$$

und die Substitutionen S von ϑ befriedigen demnach keine Relation (Nr. 308, S. 188).

Wir denken uns dann die sämmtlichen Bereiche

$$R_{\pm\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma),$$

die den Fundamentalbereich R_0 kranzförmig umgeben, mit R_0 zu einem Bereiche $P_0^{(1)}$ vereinigt. Diese Bereiche, die aus R_0 durch die Substitutionen

$$S_\varkappa, \; S_\varkappa^{-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

hervorgehen, sind sämmtlich von einander verschieden, und $P_0^{(1)}$ besitzt demnach genau

(8) $$\sigma_1 = \sigma(2\sigma - 1)$$

freie Seitenpaare. Die Zuordnung dieser $2\sigma_1$ Seiten werde nun w folgt gemacht.

Wir bezeichnen diejenige Seite des Bereiches

$$R_{\pm\varkappa} = S_\varkappa^{\pm 1}(R_0) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma),$$

die der Seite t_i beziehungsweise t_i' von R_0 entspricht, mit

$$t_i^{(\pm\varkappa)} \text{ beziehungsweise } t_{-i}^{(\pm\varkappa)} \qquad (i = 1, 2, \cdots \sigma),$$

dann bilden die Seiten

$$t_i^{(\varkappa)} \qquad (i, \varkappa = \pm 1, \pm 2, \cdots \pm \sigma;\; i \neq \varkappa)$$

die Begrenzung von $P_0^{(1)}$, während längs der Seite $t_\varkappa^{(\varkappa)}$ der Berei mit R_0 zusammenstösst. Es mögen dann die Seitenpaare

$$t_i^{(\varkappa)}, \quad t_{-i}^{(-\varkappa)}$$

einander zugeordnet werden.

Die Substitutionen, welche diese Seitenpaare in einander über-hren, lauten der Reihe nach:

$$S_1 \quad S_1,\ S_1 S_2 \quad S_1, \cdots S_1 S_{\sigma-1} S_1,\ S_1 S_\sigma S_1,$$
$$S_\sigma^{-1} S_1,\ S_1 S_{\sigma-1}^{-1} S_1, \cdots S_1 S_2^{-1}\ S_1; \qquad S_2 S_1^{-1} S_2,$$
$$S_1 \quad S_2,\ S_2 S_2 \quad S_2, \cdots S_2 S_{\sigma-1} S_2,\ S_2 S_\sigma S_2, \quad \cdot$$
$$S_\sigma^{-1} S_2,\ S_2 S_{\sigma-1}^{-1} S_2, \cdots S_2 S_3^{-1}\ S_2; \qquad S_3 S_2^{-1}\ S_3,\ S_3 S_1^{-1} S_3,$$
$$\cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ; \qquad S_\varkappa S_{\varkappa-1}^{-1} S_\varkappa, \quad \cdots,\ S_\varkappa S_1^{-1} S_\varkappa,$$
$$S_1 \quad S_\varkappa,\ S_\varkappa S_2 \quad S_\varkappa, \cdots S_\varkappa S_{\sigma-1} S_\varkappa,\ S_\varkappa S_\sigma S_\varkappa,$$
$$S_\sigma^{-1} S_\varkappa,\ S_\varkappa S_{\sigma-1}^{-1} S_\varkappa, \cdots S_\varkappa S_{\varkappa+1}^{-1} S_\varkappa; \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\cdot \quad .$$

zeichnen wir dieselben in dieser Reihenfolge durch

$$S_1^{(1)},\ S_2^{(1)}, \cdots S_{\sigma_1}^{(1)},$$

constituiren diese Substitutionen mit ihren inversen die Basis einer Untergruppe $\Theta^{(1)}$, für welche $P_0^{(1)}$ als Fundamentalbereich fungirt.

Vermöge der angegebenen Art der gegenseitigen Zuordnung der Seiten von $P_0^{(1)}$ hat der Bereich $P_0^{(1)}$ genau dieselbe Structur wie der Fundamentalbereich R_0 der ursprünglichen Gruppe ϑ. Die Untergruppe $\Theta^{(1)}$ ist also eine Untergruppe mit endlichem Quotienten und vom Geschlechte Null.

Jede Substitution S von ϑ lässt sich in die Form setzen

$$(9) \qquad S = S^{(1)} S_\varkappa^{\pm 1},$$

wo $\varkappa$ eine bestimmte der Zahlen

$$0,\ 1,\ 2, \cdots \sigma_1, \qquad S_0 = 1,$$

und $S^{(1)}$ eine Substitution von $\Theta^{(1)}$ bedeutet. Um diese Darstellung für die Substitution S von ϑ zu erhalten, kann man wie folgt verfahren.

Sei die Substitution S durch die Elemente der Basis

$$(10) \qquad S_\varkappa,\ S_\varkappa^{-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

von ϑ ausgedrückt,

$$(11) \qquad S = S_{\varkappa_1}^{\varrho_{\varkappa_1}} S_{\varkappa_2}^{\varrho_{\varkappa_2}} \cdots S_{\varkappa_\mu}^{\varrho_{\varkappa_\mu}},$$

wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu$ Zahlen aus der Reihe

$$1,\ 2, \cdots \sigma$$

bedeuten, von denen niemals zwei auf einanderfolgende übereinstimmen, während die

$$g_{\varkappa_1}, g_{\varkappa_2}, \cdots g_{\varkappa_\mu}$$

positive oder negative ganze Zahlen sind. Wir nennen dann die Anzahl der Substitutionen der Basis von ϑ, die in dem Ausdrucke von S auftreten, den Index oder das Gewicht von S in Bezug auf die Gruppe ϑ und setzen

$$\sum_{i=1}^{\mu} |g_{\varkappa_i}| = \mathrm{Ind}_0\, S.$$

Seien S_α, S_β zwei Substitutionen der Basis (10) von ϑ, wo α, β irgend zwei Zahlen der Reihe

$$\pm 1, \pm 2, \cdots \pm \sigma$$

bedeuten und für negative Werthe von α, β

$$S_\alpha = S_{|\alpha|}^{-1}, \qquad S_\beta = S_{|\beta|}^{-1}$$

zu nehmen ist, dann lässt sich die componirte Substitution

$$S_\alpha S_\beta$$

in die Form setzen:

$$(12) \qquad S_\alpha S_\beta = S_\alpha S_\beta S_\alpha \cdot S_\alpha^{-1};$$

ebenso ist für eine aus drei Substitutionen der Basis (10) componirte Substitution

$$(13) \qquad S_\alpha S_\beta S_\gamma = S_\alpha S_\beta S_\alpha \cdot S_\alpha^{-1} S_\gamma S_\alpha^{-1} \cdot S_\alpha$$

u. s. w. Sowohl in (12) als auch in (13) steht auf der rechten Seite eine Substitution von $\Theta^{(1)}$ angewandt hinter einer Substitution der Basis (10).

Verfahren wir auf diese Weise mit den Substitutionen, welche die rechte Seite der Gleichung (11) bilden, so erhalten wir S in der Form

$$(14) \qquad S = (S_{l_1}^{(1)})^{h_{l_1}} (S_{l_2}^{(1)})^{h_{l_2}} \cdots (S_{l_\nu}^{(1)})^{h_{l_\nu}} \cdot S_\varkappa^{\pm 1},$$

wo $l_1, l_2, \cdots l_\nu$ Zahlen der Reihe

$$1, 2, \cdots \sigma_1$$

und $h_{l_1}, h_{l_2}, \cdots h_{l_\nu}$ positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, während $\varkappa$ eine bestimmte der Zahlen

$$0, 1, 2, \cdots \sigma$$

ist, und

$$S_0 = 1$$

gesetzt wurde. Ist also in (14) $\varkappa = 0$, so ist S selbst eine Substitution von $\Theta^{(1)}$, und die rechte Seite von (14) bricht mit

$$(S_{i_\nu}^{(1)})^{h_{l_\nu}}$$

. Ferner denken wir uns in (14) allemal zwei aufeinander folgende r Substitutionen $(S_i^{(1)})^{\pm 1}$, die einander zerstören, weggelassen, so dass o in der Folge der Zahlen

$$l_1, l_2, \cdots l_\nu$$

mals zwei aufeinanderfolgende identisch sind.

Dann liefert also die Gleichung (14) die gesuchte Darstellung von in der Form (9), und wir können zugleich über die Zusammensetzung Substitution $S^{(1)}$ von $\Theta^{(1)}$ eine wichtige Bemerkung machen.

Denken wir uns nämlich irgend eine Substitution $S^{(1)}$ von $\Theta^{(1)}$ in Form

$$S^{(1)} = (S_{i_1}^{(1)})^{m_{i_1}} (S_{i_2}^{(1)})^{m_{i_2}} \cdots (S_{i_\nu}^{(1)})^{m_{i_\nu}} \qquad (i_1, i_2, \cdots i_\nu = 1, 2, \cdots \sigma_1)$$

gestellt und zwar in der einfachsten Weise, d. h. so, dass zwei aufanderfolgende Substitutionen, die sich zerstören, bereits weggelassen d, so werden wir die Summe

$$\sum_{\varkappa=1}^{\nu} |m_{i_\varkappa}| = \mathrm{Ind}_1\, S^{(1)}$$

tzen und dieselbe als den Index oder das Gewicht der Substitution 1) in Bezug auf die Gruppe $\Theta^{(1)}$ bezeichnen.

Die Gleichungen (12), (13) zeigen uns, dass wenn S auf die ngegebene Weise in die Form (9) gesetzt wird, allemal

15) $$\mathrm{Ind}_1\, S^{(1)} < \mathrm{Ind}_0\, S$$

ein muss.

Für die Gruppe ϑ ergiebt sich die Darstellung

16) $$\vartheta = \Theta^{(1)}(1, S_1, S_2, \cdots S_\sigma, S_\sigma^{-1} \cdots S_2^{-1}, S_1^{-1})$$

ls Product von $\Theta^{(1)}$ in den Quotienten

17) $$Q_1 = (1, S_1, S_2, \cdots S_\sigma, S_\sigma^{-1} \cdots S_2^{-1}, S_1^{-1}).$$

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der zur Untergruppe $\Theta^{(1)}$ ehörigen Fuchs'schen Functionen.

333. Bestimmung der zu der betrachteten Untergruppe gehörigen Riemann'schen Fläche.

Sei

$$z = f(\eta)$$

eine zur Gruppe Θ gehörige,

$$z_1 = f_1(\eta)$$

eine zur Gruppe $\Theta^{(1)}$ gehörige Fuchs'sche Function, die innerhalb des Fundamentalbereiches R_0, beziehungweise $P_0^{(1)}$, jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt. Dann wissen wir, dass z als rationale Function von z_1 darstellbar sein muss, und dass die Gleichung, der z_1 als Function von z genügt, in z_1 vom Grade $2\sigma + 1$ und in z vom ersten Grade ist.

Die einzigen Verzweigungspunkte der Function z_1 von z sind die den Ecken von R_0 entsprechenden Werthe $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$. Wir untersuchen also das Verhalten von z_1, wenn z geschlossene Umläufe um diese Punkte vollzieht.

Einem einfachen positiven Umlaufe von z um den Punkt $a_\varkappa$ entspricht die Substitution $A_\varkappa$ von Θ. Diese Substitution ist nach Gleichung (2) der Nr. 319 (S. 226) für $\varkappa = 2, 3, \cdots \sigma$ in der Form

$$A_\varkappa = S_\varkappa^{-1} S_{\varkappa-1}$$

darstellbar. Die Function z_1, oder genauer gesprochen der Zweig

$$z_1^{(0)} = f_1(\eta)$$

dieser Function, verwandelt sich demnach durch einen einfachen positiven Umlauf der Variabeln z um $a_\varkappa$ in den Zweig

$$f_1(S_\varkappa^{-1} S_{\varkappa-1}\eta) = f_1(S_\varkappa^{-1} S_{\varkappa-1} S_\varkappa^{-1} \cdot S_\varkappa \eta) = f_1(S_\varkappa \eta) = z_1^{(\varkappa)}.$$

Eine Wiederholung dieses Umlaufes verwandelt $z_1^{(\varkappa)}$ in den Zweig

$$f_1(S_\varkappa S_\varkappa^{-1} S_{\varkappa-1}\eta) = f_1(S_{\varkappa-1}\eta) = z_1^{(\varkappa-1)},$$

und durch einen dritten Umlauf um $a_\varkappa$ wird $z_1^{(\varkappa-1)}$ in den Zweig

$$f_1(S_{\varkappa-1} S_\varkappa^{-1} S_{\varkappa-1}\eta) = f_1(\eta) = z_1^{(0)}$$

zurückkehren.

Für a_1 ist

$$A_1 = S_1^{-1},$$

wir haben also beim erstmaligen Umlaufe um a_1 für den Zweig $z_1^{(0)}$

$$f_1(S_1^{-1}\eta) = z_1^{(-1)},$$

beim zweiten Umlaufe

$$f_1(S_1^{-1}S_1^{-1}\eta) = f_1(S_1^{-1}S_1^{-1}S_1^{-1}\cdot S_1\eta) = z_1^{(1)},$$

während der dritte Umlauf wieder den Ausgangszweig

$$f_1(S_1^{-1}S_1^{-1}S_1^{-1}\eta) = f_1(\eta) = z_1^{(0)}$$

liefert. Der Zweig

$$z_1^{(\varkappa)} = f_1(S_\varkappa \eta) \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots \sigma)$$

verwandelt sich bei einmaligem Umlaufe von z um a_1 in

$$f_1(S_\varkappa S_1^{-1}\eta) = f_1(S_\varkappa S_1^{-1}S_\varkappa \cdot S_\varkappa^{-1}\eta) = z_1^{(-\varkappa)},$$

und ein nochmaliger Umlauf um a_1 führt $z_1^{(-\varkappa)}$ in

$$f_1(S_\varkappa^{-1}S_1^{-1}\eta) = f_1(S_\varkappa^{-1}S_1^{-1}S_\varkappa^{-1}\cdot S_\varkappa\eta) = z_1^{(\varkappa)}$$

zurück.

Für $a_{\sigma+1}$ ist

$$A_{\sigma+1} = A_1^{-1}A_2^{-1}\cdots A_\sigma^{-1} = S_\sigma,$$

also verwandelt ein einmaliger Umlauf um diesen Punkt den Zweig $z_1^{(0)}$ in

$$f_1(S_\sigma\eta) = z_1^{(\sigma)},$$

und den Zweig $z_1^{(\varkappa)}$ für $\varkappa = 1, 2, 3, \cdots \sigma$ in

$$f_1(S_\varkappa S_\sigma \eta) = f_1(S_\varkappa S_\sigma S_\varkappa \cdot S_\varkappa^{-1}\eta) = z_1^{(-\varkappa)}.$$

Ein abermaliger Umlauf um $a_{\sigma+1}$ wird dann $z_1^{(-\varkappa)}$ in

$$f_1(S_\varkappa^{-1}S_\sigma\eta) = f_1(S_\varkappa^{-1}S_\sigma S_\varkappa^{-1}\cdot S_\varkappa\eta) = z_1^{(\varkappa)}$$

überführen, so dass also $z_1^{(0)}$ nach einem dreimaligen Umlaufe um $a_{\sigma+1}$ zu seinem Ausgangswerthe zurückkehrt.

Die Zweige $z_1^{(\varkappa)}$ und $z_1^{(-\varkappa)}$ bleiben, da

$$f_1(S_\varkappa^{\pm 1}S_i^{-1}S_{i-1}\eta) = f_1(S_\varkappa^{\pm 1}S_i^{-1}S_\varkappa^{\pm 1}S_\varkappa^{\mp 1}S_{i-1}S_\varkappa^{\mp 1}\cdot S_\varkappa^{\pm 1}\eta) = f_1(S_\varkappa^{\pm 1}\eta)$$

ist, falls i von $1, \varkappa, \varkappa+1, \sigma+1$ verschieden genommen wird, ungeändert, wenn z einen Umlauf um einen der Punkte a_i vollzieht.

Bezeichnen wir also kurz durch $\pm\varkappa$ den Zweig

$$z_1^{(\pm\varkappa)} = f_1(S_\varkappa^{\pm 1}\eta) \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots \sigma),$$

so wird das Verhalten der algebraischen Function z_1 von z durch das folgende Schema dargestellt:

$$(18)\begin{cases} z=a_1\colon (0,\ -1,\ +1),\ (2,\ -2),\ (3,\ -3),\cdots(\sigma,\ -\sigma);\\ z=a_\varkappa\colon (0,\ \varkappa,\ \varkappa-1) \qquad\qquad (\varkappa=2,\ 3,\cdots\sigma);\\ z=a_{\sigma+1}\colon (0,\ \sigma,\ -\sigma),\ (1,\ -1),\ (2,\ -2),\cdots[\sigma-1,-(\sigma-1)]. \end{cases}$$

Die über der z-Ebene auszubreitende $(2\sigma+1)$-blättrige Riemannsche Fläche T^1, welche die Verzweigung der Function z_1 von z darstellt, wird demnach in folgender Weise zu construiren sein.

Wir legen durch die Punkte

$$a_1,\ a_2,\cdots a_\sigma,\ a_{\sigma+1}$$

einen alle $(2\sigma+1)$ Blätter (die wir den durch dieselben repräsentirten Zweigen $z_1^{(\pm\varkappa)}$ entsprechend durch die Zahlen

$$0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots\pm\sigma$$

bezeichnen wollen) durchdringenden Verzweigungschnitt und heften für

$$\varkappa=1,\ 2,\cdots\sigma$$

längs des Stückes $(a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1})$ das rechte (negative) Ufer des Schnittes im Blatte 0 an das linke (positive) Ufer im Blatte $-\varkappa$, das rechte Ufer im Blatte $-\varkappa$ an das linke im Blatte $\varkappa$, das rechte Ufer im Blatte $\varkappa$ an das linke im Blatte 0, ferner wenn i eine von $\varkappa$ verschiedene Zahl der Reihe

$$1,\ 2,\cdots\sigma$$

bedeutet, das rechte Ufer des Schnittes im Blatte i an das linke im Blatte $-i$ und das rechte Ufer im Blatte $-i$ an das linke im Blatte i.

Ein positiver Umlauf um $a_\varkappa$ ist dann für $\varkappa=2,3,\cdots\sigma$ so zu vollziehen, dass wir von dem in einem bestimmten Blatte $\varkappa_1$ gelegenen z-Werthe ausgehend zuerst bis an das rechte Ufer des zwischen $a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1}$ gelegenen Schnittstückes herangehen, den Schnitt überschreitend in ein Blatt $\varkappa_2$ gelangen, in diesem bis an das linke Ufer des zwischen $a_{\varkappa-1},\ a_\varkappa$ gelegenen Schnittstückes fortschreiten, den Schnitt abermals überschreitend in ein Blatt $\varkappa_3$ gelangen und in diesem uns dem über dem Ausgangspunkte z gelegenen Punkte annähern. Beim positiven Umlaufe um $a_{\sigma+1}$ hat man dagegen das zwischen $(a_\sigma,\ a_{\sigma+1})$ gelegene Schnittstück längs seines linken Ufers zu überschreiten und in dem Blatte, in welches man so gelangt, zu der über dem Ausgangspunkte gelegenen Stelle hinzugehen.

Unter den Zweigen

$$z_1^{(0)},\ z_1^{(1)},\ z_1^{(-1)},\cdots z_1^{(\sigma)},\ z_1^{(-\sigma)}$$

der algebraischen Function z_1 von z ist der Zweig $z_1^{(0)}$ dadurch vor allen übrigen ausgezeichnet, dass sich derselbe in jedem der Verzweigungspunkte

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$$

verzweigt. Wir können darum diesen Zweig $z_1^{(0)}$ als den Hauptzweig bezeichnen.

334. Betrachtung einer speciellen Untergruppe im Falle eines symmetrischen Fundamentalbereiches.

Wenn die Gruppe ϑ, von der wir in dem vorigen Beispiele ausgegangen waren, eine symmetrische ist, d. h. wenn der Fundamentalbereich R_0 durch die Diagonale t_0, die die Ecken $\lambda_{\sigma+1}, \lambda_1$ mit einander verbindet, in zwei symmetrische Hälften R_0', R_0'' zerlegt wird, so kann man Untergruppen mit endlichem Quotienten von ϑ angeben, die selbst wieder symmetrische Gruppen sind. Wir erhalten z. B. auf folgende Weise eine derartige Untergruppe, die ebenso wie ϑ vom Geschlechte Null ist.

Der Bereich R_0' ist von den $(\sigma + 1)$ Kreisbogen

$$t_0, t_\sigma, t_{\sigma-1}, \cdots t_1$$

begrenzt, von denen jeder sowohl den vorhergehenden wie den darauf folgenden in einem auf dem Einheitskreise der η-Ebene gelegenen Punkte berührt. Sei

$$z = f(\eta)$$

diejenige zu ϑ gehörige Fuchs'sche Function, die die eindeutig conforme Abbildung von R_0' auf das Innere des Einheitskreises der z-Ebene vermittelt. Dann entsprechen also den Punkten der Begrenzung von R_0' die Punkte der Peripherie des Einheitskreises der z-Ebene, diese Peripherie ist also die Linie l, welche die singulären Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1},$$

die den Ecken von R_0' entsprechen, untereinander verbindet.

Wir denken uns nun die Spiegelbilder des Bereiches R_0' in Bezug auf jede seiner $\sigma + 1$ Seiten construirt; seien diese

$$(19) \qquad \mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \cdots \mathfrak{R}_\sigma,$$

so dass also $\mathfrak{R}_\varkappa$ das Spiegelbild von R_0' in Bezug auf die Seite $t_\varkappa$ bedeutet. Vereinigen wir dann R_0' mit den $(\sigma + 1)$ Bereichen (19), so erhalten wir einen von

$$\sigma_1 + 1 = \sigma(\sigma + 1)$$

Seiten begrenzten Bereich $\mathfrak{R}^1$, der genau dieselbe Beschaffenheit besitzt wie R_0' selbst. Diesen Bereich $\mathfrak{R}^1$ denken wir uns durch eine Function

$$\zeta_1 = \varphi_1(\eta)$$

auf das Innere des Einheitskreises einer ζ_1-Ebene abgebildet, dann ist diese Function offenbar auch wieder eine Fuchs'sche von derselben Beschaffenheit wie $f(\eta)$; wir behaupten, dass die zu der Function $\varphi_1(\eta)$ gehörige Gruppe ϑ^1 eine Untergruppe mit endlichem Quotienten von ϑ ist.

Bezeichnen wir den Werth, der das Spiegelbild eines complexen Werthes a in Bezug auf den Einheitskreis darstellt, durch

$$'a = \frac{1}{\bar{a}},$$

wo $\bar{a}$ der conjugirte complexe Werth von a ist, und nennen (wie in der Nr. 306, S. 177) $'a$ kurz den zu a harmonischen Werth, so lautet die Gleichung des Kreises, der die Seite $t_\varkappa$ des Bereiches R_0' bildet,

$$(20) \qquad 2\eta'\eta - (\lambda_\varkappa + \lambda_{\varkappa+1})(\eta + '\eta) + 2\lambda_\varkappa\lambda_{\varkappa+1} = 0 \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma),$$

wo für $\varkappa = 0$

$$\lambda_0 = \lambda_{\sigma+1}$$

zu nehmen ist. In der That schneidet der durch die Gleichung (20) dargestellte Kreis den Einheitskreis der η-Ebene in den Punkten $\lambda_\varkappa$, $\lambda_{\varkappa+1}$ unter rechtem Winkel.

Bezeichnen wir die projective Substitution mit der Determinante -1

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_\varkappa + \lambda_{\varkappa+1}}{\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa+1}} & -\dfrac{2\lambda_\varkappa\lambda_{\varkappa+1}}{\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa+1}} \\ \dfrac{2}{\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa+1}} & -\dfrac{\lambda_\varkappa + \lambda_{\varkappa+1}}{\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa+1}} \end{pmatrix}$$

mit $\Sigma_\varkappa$, so ist offenbar

$$(21) \qquad \Sigma_\varkappa^2 = 1 \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma)$$

und der Ausdruck

$$\Sigma_\varkappa\,'\eta = '(\Sigma_\varkappa \eta)$$

stellt das Spiegelbild des Punktes η in Bezug auf den Kreis (20) dar. Wir können also die Spiegelung in Bezug auf den Kreisbogen $t_\varkappa$ mit

$$\Sigma_{\varkappa}'\eta$$

:zeichnen. In der Regel werden wir für dieselbe kurz nur $\Sigma_{\varkappa}$ hreiben.

Bilden wir nun aus den $\sigma + 1$ Operationen

2) $$\Sigma_0'\eta, \; \Sigma_1'\eta, \cdots \Sigma_{\sigma}'\eta$$

ɜ Basis eine Gruppe $\bar{\vartheta}$, so sind die Operationen dieser Gruppe eindeutig zugeordnet den verschiedenen Bereichen, die aus R_0' durch immer rtgesetzte Spiegelungen in Bezug auf die Seiten entstehen, d. h. mit deren Worten, den **Halbbereichen**, in welche die Bereiche

$$S_{\nu}R_0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots \infty),$$

ɜ aus R_0 durch die Substitutionen S_{ν} der Gruppe ϑ hervorgehen, rch die der Diagonale t_0 von R_0 entsprechenden Diagonalen zerlegt ɪrden.

Eine Operation der Gruppe $\bar{\vartheta}$, die aus einer geraden Anzahl von ɪerationen der Basis (22) zusammengesetzt ist, ist offenbar nichts deres wie eine projective Substitution der Gruppe ϑ, und umgekehrt jede Substitution von ϑ als Composition einer geraden Anzahl von ɪerationen der Reihe (22) darstellbar, denn wir haben

$$\Sigma_{\varkappa}\Sigma_0\Sigma_{\varkappa}'(\Sigma_{\varkappa}'\eta) = \Sigma_{\varkappa}\Sigma_0\eta = S_{\varkappa}\eta \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma).$$

e Operationen von $\bar{\vartheta}$ zerfallen demnach in zwei Arten; die Operaɪnen der **ersten Art** sind die aus einer geraden Anzahl der Operaɪnen (22) componirten projectiven Substitutionen der Gruppe ϑ, die ɜerationen der **zweiten Art** bestehen aus einer ungeraden Anzahl ɪn Operationen (22). Wir bezeichnen die letztere Art von Operaɪnen typisch durch Σ, während für die erste Art die Bezeichnung S ibehalten wird.

Wir haben dann offenbar, wenn S irgend eine Operation erster t bedeutet, in

$$\Sigma^{-1}S\Sigma$$

der eine Operation der ersten Art, d. h. es gilt der Satz:

Die Gruppe ϑ ist in der Gruppe $\bar{\vartheta}$ als ausgezeichnete tergruppe enthalten.

Man sagt mit Herrn **Klein**, die Gruppe $\bar{\vartheta}$ sei aus der Gruppe ϑ ɔh **Erweiterung** mittelst der Spiegelung $\Sigma_0'\eta$ hervorgegangen, n offenbar kann jede Operation von $\bar{\vartheta}$ in einer der beiden Formen

$$S\eta, \qquad S\Sigma_0'\eta$$

gestellt werden, wo S eine Substitution von ϑ bedeutet.

Die Beziehungen der Operationen der erweiterten Gruppe $\bar{\vartheta}$ zu d[illegible] Function

$$z = f(\eta)$$

lassen sich auf Grund der Ergebnisse der Nr. 319 (S. 225 ff.) so[illegible] angeben.

Für eine Operation erster Art S ist

$$z = f(S\eta),$$

dagegen verwandelt sich z in seinen harmonischen Werth $'z$, we[illegible] η eine Operation zweiter Art Σ erleidet, d. h. wir haben

$$'z = f(\Sigma\,'\eta).$$

Insbesondere können wir sagen: wenn η von einem Punkte η_0 des Bereiches R_0' ausgehend, die Seite $t_\varkappa$ überschreitend nach dem Pun[illegible]kte

$$\Sigma_\varkappa\,'\eta$$

des Bereiches $R_\varkappa$ geht, so bewegt sich z von dem Punkte

$$z_0 = f(\eta_0)$$

nach dem harmonischen Punkte

$$'z_0 = f(\Sigma_\varkappa\,'\eta_0)$$

hin, indem es die Peripherie l des Einheitskreises in einem zwis[illegible]hen den Stellen $a_\varkappa$, $a_{\varkappa+1}$ gelegenen Punkte überschreitet; dabei ist für $\varkappa = 0$

$$a_0 = a_{\sigma+1}$$

zu nehmen.

Wenn wir uns also die unendlich vielblättrige Riemann'sche Fläche T denken, die über der z-Ebene ausgebreitet die Verzweigung der Function η von z darstellt, und jedes Blatt dieser Fläche durch den Einheitskreis l in zwei Halbblätter zerlegen, so entsprechen diese Halbblätter den oben erwähnten Halbbereichen der Theilung der η-Ebene, und dadurch eindeutig den Operationen der erweiterten Gruppe $\bar{\vartheta}$. Die Art, wie die Halbblätter längs der einzelnen Theile des Schnittes l in einander übergehen, ist durch die Gruppe $\bar{\vartheta}$ vollkommen bestimmt; da wir den Bereich R_0' mit

$$\mathfrak{R}_0 = R_0''$$

zusammen als den Fundamentalbereich R_0 auffassen, sind diejenigen beiden Halbblätter, die längs des Schnitttheiles

$$l_0 = (a_1, a_{\sigma+1})$$

mit einander zusammenhängen, zu einem ganzen Blatte der Fläche T zu vereinigen.

335. Beziehungen zwischen der ursprünglichen Gruppe und der betrachteten Untergruppe.

Betrachten wir nun den durch Vereinigung der Bereiche

$$R_0', \mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \cdots \mathfrak{R}_\sigma$$

entstandenen Bereich $\mathfrak{R}^1$. Die zu den $\sigma_1 + 1$ freien Seiten von $\mathfrak{R}_1$ gehörigen Spiegelungen sind dann, wie man sofort übersieht

$$\Sigma_h \Sigma_\varkappa \Sigma_h{}' \eta \qquad (h, \varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma;\ h \neq \varkappa);$$

wir bezeichnen dieselben z. B. in der Reihenfolge

$$(23) \qquad \begin{cases} \Sigma_1 \Sigma_0 \quad \Sigma_1, & \Sigma_1 \Sigma_\sigma \quad \Sigma_1, \cdots \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_1, \\ \Sigma_2 \Sigma_1 \quad \Sigma_2, & \Sigma_2 \Sigma_0 \quad \Sigma_2, \cdots \Sigma_2 \Sigma_3 \Sigma_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Sigma_\sigma \Sigma_{\sigma-1} \Sigma_\sigma, & \Sigma_\sigma \Sigma_{\sigma-2} \Sigma_\sigma, \cdots \Sigma_\sigma \Sigma_0 \Sigma_\sigma, \\ \Sigma_0 \Sigma_\sigma \quad \Sigma_0, & \Sigma_0 \Sigma_{\sigma-1} \Sigma_0, \cdots \Sigma_0 \Sigma_1 \Sigma_0 \end{cases}$$

durch

$$\Sigma_0^1, \Sigma_1^1, \cdots \Sigma_{\sigma_1}^1$$

und bilden aus den Operationen

$$\Sigma_\varkappa^{1\,\prime} \eta \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma_1)$$

als Basis eine Gruppe $\bar{\vartheta}^1$.

Diese Gruppe ist dann offenbar eine Untergruppe der Gruppe $\bar{\vartheta}$. Wir können die Beziehung zwischen $\bar{\vartheta}$ und $\bar{\vartheta}^1$ sehr leicht angeben.

Da die Operationen (22) den Gleichungen (21) Genüge leisten, so lässt sich jede beliebige Operation $\bar{S}$ der Gruppe $\bar{\vartheta}$ auf eine Weise in der Form

$$(24) \qquad \bar{S} = \Sigma_{i_1} \Sigma_{i_2} \cdots \Sigma_{i_\nu}$$

darstellen, wo die

$$i_1, i_2, \cdots i_\nu$$

irgendwelche Zahlen der Reihe

$$0, 1, 2, \cdots \sigma$$

bedeuten und niemals zwei aufeinanderfolgende dieser Zahlen einander gleich sind. Wir nennen dann ν den Index oder das Gewicht der Operation (24) in Bezug auf die Gruppe $\bar{\vartheta}$ und setzen

$$\nu = \overline{\text{Ind}}_0\, S.$$

Ebenso kann jede Operation $\bar{S}^1$ von $\bar{\vartheta}^1$ nur auf eine Weise in der Form

$$\bar{S}^1 = \Sigma^1_{i_1} \Sigma^1_{i_2} \cdots \Sigma^1_{i_{\nu_1}}$$

dargestellt werden, wo die

$$i_1, i_2, \cdots i_{\nu_1}$$

Zahlen der Reihe

$$0, 1, 2, \cdots \sigma_1$$

bedeuten, von denen niemals zwei aufeinanderfolgende einander gleich sind, da die Operationen $\Sigma_\varkappa^1$ auch die Relationen

$$\Sigma_\varkappa^1 \Sigma_\varkappa^1 = 1$$

erfüllen. Wir setzen dann

$$\nu_1 = \overline{\text{Ind}}_1\, \bar{S}^1$$

und nennen diese Zahl den Index oder das Gewicht der Operation $\bar{S}^1$ in Bezug auf die Gruppe $\bar{\vartheta}^1$.

Um nun eine beliebige Operation von $\bar{\vartheta}$ aus Operationen von $\bar{\vartheta}^1$ und gewissen einfachsten Operationen von $\bar{\vartheta}$ zusammenzusetzen, verfahren wir ähnlich wie in der Nr. 331 (S. 270) für die daselbst betrachteten Gruppen.

Die aus zwei Operationen der Basis (22) von $\bar{\vartheta}$ zusammengesetzte Operation

$$\Sigma_\alpha \Sigma_\beta, \qquad (\alpha \neq \beta),$$

lässt sich in die Form setzen

$$\Sigma_\alpha \Sigma_\beta = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_\alpha; \tag{25}$$

ebenso ist eine aus drei Operationen der Basis (22) componirte Operation in der Form

$$\Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_\alpha \Sigma_\gamma \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_\alpha \qquad (\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma) \tag{26}$$

darstellbar, wenn γ von α verschieden ist.

Auf diese Weise lässt sich also jede Operation $\bar{S}$ von $\bar{\vartheta}$, die in der Form (24) gegeben ist, in der Gestalt

$$\bar{S} = \bar{S}^1 \cdot \Sigma_\varkappa \tag{27}$$

darstellen, wo $\bar{S}^1$ eine Operation von $\bar{\vartheta}^1$ und $\Sigma_\varkappa$ entweder eine der Operationen der Basis (22) oder die identische Operation 1 bedeutet.

Aus den Gleichungen (25), (26) schliessen wir, dass bei der Darstellung (27) stets

$$\overline{\text{Ind}}_0\, \bar{S} > \overline{\text{Ind}}_1\, \bar{S}^1 \tag{28}$$

sein wird.

Wir können demzufolge die Beziehung zwischen den Gruppen $\bar{\vartheta}$ und $\bar{\vartheta}^1$ durch die Gleichung

$$\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}^1(1, \Sigma_0, \Sigma_1, \cdots \Sigma_\sigma)$$

darstellen, d. h. die Gruppe $\bar{\vartheta}^1$ ist eine Untergruppe mit dem endlichen Quotienten

$$1, \Sigma_0, \Sigma_1, \cdots \Sigma_\sigma$$

von $\bar{\vartheta}$.

Betrachten wir nun die in der Nr. 334 (S. 276) definirte Fuchs'sche Function

$$\zeta_1 = \varphi_1(\eta),$$

welche die eindeutig conforme Abbildung des Bereiches $\mathfrak{R}^1$ auf das Innere des Einheitskreises der ζ_1-Ebene vermittelt. Die Gruppe ϑ^1 projectiver Substitutionen, bei deren Anwendung die Function $\varphi_1(\eta)$ ungeändert bleibt, ist dann nichts Anderes wie die Gruppe derjenigen Operationen der Gruppe $\bar{\vartheta}^1$, deren Index eine gerade Zahl ist, ebenso wie ϑ aus den Operationen mit geradzahligem Index der Gruppe $\bar{\vartheta}$ besteht.

Also ist ϑ^1 eine ausgezeichnete Untergruppe mit endlichem Quotienten von $\bar{\vartheta}^1$ und folglich, wie wir behauptet hatten, auch eine Untergruppe mit endlichem Quotienten von ϑ.

Die Gruppe ϑ^1 ist überdies vom Geschlechte Null, d. h. jede bei ϑ^1 unveränderliche Fuchs'sche Function ist rational durch ζ_1 darstellbar; also erscheint z als rationale Function von ζ_1,

$$z = P_1(\zeta_1).$$

Wir haben nun die durch diese Gleichung definirte algebraische Function ζ_1 von z genauer zu charakterisiren.

336. Bestimmung der zu der betrachteten Untergruppe gehörigen Riemann'schen Fläche.

Die einzigen Verzweigungsstellen der Function ζ_1 von z sind offenbar die Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1},$$

die den Ecken von R_0' entsprechen. In der durch den Querschnitt l, der längs der Peripherie des Einheitskreises von a_1 über a_2 u. s. w. nach $a_{\sigma+1}$ hingeführt ist, zerschnittenen z-Ebene ist also ζ_1 eindeutig determinirt.

Gehen wir für einen z-Werth mit dem innerhalb des Fundamental-bereiches R_0 von ϑ gelegenen η-Werthe aus, und berechnen den entsprechenden Werth von

$$\varphi_1(\eta),$$

so erhalten wir einen wohlbestimmten Zweig $\zeta_1^{(0)}$ der Function ζ_1, der also innerhalb der durch $\bar{l}$ zerschnittenen z-Ebene eindeutig gegeben ist.

Wir vollziehen nun einen positiven geschlossenen Umlauf um den Punkt $a_\varkappa$, indem wir zunächst den zwischen $a_\varkappa$, $a_{\varkappa+1}$ gelegenen Theil des Schnittes $\bar{l}$ in der Richtung vom negativen nach dem positiven Ufer hin (vergl. die Fig. 31, S. 230) überschreitend nach dem zu dem Ausgangswerthe z harmonischen Werthe $'z$ gehen, dann den zwischen $a_\varkappa$ und $a_{\varkappa-1}$ gelegenen Theil von $\bar{l}$ in der Richtung vom positiven nach dem negativen Ufer hin überschreitend nach z zurückkehren. Die Variable η ist dann von dem innerhalb R_0 gelegenen Werthe η zu dem Werthe

$$\Sigma_\varkappa{}'\eta,$$

und von diesem Punkte weiter nach

$$\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_\varkappa{}'(\Sigma_\varkappa{}'\eta) = \Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\eta$$

gegangen. Demgemäss hat sich also

$$\zeta_1^{(0)} = \varphi_1(\eta)$$

in den Zweig

$$\zeta_1^{(\varkappa)} = \varphi_1(\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\eta)$$

verwandelt.

Ein abermaliger positiver Umlauf von z um $a_\varkappa$ verwandelt den Zweig $\zeta_1^{(\varkappa)}$ in

$$\varphi_1(\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\eta).$$

Nun ist aber

$$\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1} = \Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_\varkappa \cdot \Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_{\varkappa-2}\Sigma_{\varkappa-1} \cdot \Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_{\varkappa-2},$$

wir haben folglich, da die Substitution

$$\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_\varkappa \cdot \Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_{\varkappa-2}\Sigma_{\varkappa-1}$$

der Gruppe ϑ^1 angehört,

$$\varphi_1(\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\eta) = \varphi_1(\Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_{\varkappa-2}\eta) = \zeta_1^{(\varkappa-1)}.$$

Wenn wir z den Umlauf um $a_\varkappa$ zum dritten Male vollziehen lassen, so verwandelt sich $\zeta_1^{(\varkappa-1)}$ in

$$\varphi_1(\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_\varkappa \cdot \Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\eta) = \varphi_1(\eta)$$

d. h. wieder in den Ausgangszweig.

Dies gilt für alle Werthe

$$\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1,$$

nur ist für $\varkappa = 1$ im oberen Index von ζ_1 zu nehmen

$$\varkappa - 1 = \sigma + 1,$$

und im untern Index der Σ

$$\varkappa - 1 = 0, \qquad \varkappa - 2 = \sigma;$$

ferner ist zu beachten, dass der zwischen a_1 und $a_{\sigma+1}$ gelegene Bogen l_0 des Einheitskreises der z-Ebene nicht als Querschnitt fungirt, dass vielmehr der Uebergang von einem Punkte z zu seinem harmonischen Werthe innerhalb der zerschnittenen z-Ebene so erfolgen muss, dass der Einheitskreis in einem Punkte von l_0 passirt wird.

Wir haben also die $\sigma + 2$ Zweige

$$\zeta_1^{(0)} = \varphi_1(\eta), \qquad \zeta_1^{(\varkappa)} = \varphi_1(\Sigma_\varkappa \Sigma_{\varkappa-1}\eta), \qquad (\varkappa=1, 2, \cdots \sigma+1)$$

der algebraischen Function ζ_1 von z, und wenn wir dieselben kurz durch die als obere Indices fungirenden Zahlen bezeichnen, so gilt für den singulären Punkt $a_\varkappa$ das Verzweigungsschema

$$(0, \varkappa, \varkappa - 1) \qquad (\varkappa=1, 2, \cdots \sigma+1).$$

In der That bleibt der Zweig $\zeta_1^{(i)}$ bei einem einfachen Umlaufe um $a_\varkappa$ ungeändert, wenn i von 0, $\varkappa$, $\varkappa - 1$ verschieden ist, denn es ist dann

$$\Sigma_{i-1}\Sigma_{i-2}\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1} = \Sigma_{i-1}\Sigma_{i-2}\Sigma_{i-1}\cdot\Sigma_{i-1}\Sigma_\varkappa\Sigma_{i-1}\cdot$$
$$\cdot\Sigma_{i-1}\Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_{i-1}\cdot\Sigma_{i-1}\Sigma_{i-2}\Sigma_{i-1}\cdot\Sigma_{i-1}\Sigma_{i-2}$$

und folglich

$$\varphi_1(\Sigma_{i-1}\Sigma_{i-2}\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\eta) = \varphi_1(\Sigma_{i-1}\Sigma_{i-2}\eta).$$

Die Construction der die Verzweigung von ζ_1 darstellenden Riemann'schen Fläche gestaltet sich hiernach wie folgt:

Man lege durch die $(\sigma+2)$-fach gedachte z-Ebene den alle $\sigma + 2$ Blätter (die wir entsprechend den durch dieselben repräsentirten Zweigen von ζ_1 durch

$$0, 1, 2, \cdots \sigma + 1$$

bezeichnen) durchdringenden Schnitt $\bar{l}$, und hefte längs des zwischen $a_{\varkappa-1}$ und $a_\varkappa$ gelegenen Stückes für

$$\varkappa = 2, 3, \cdots \sigma + 1$$

das rechte (negative) Ufer des Schnittes $\bar{l}$ im Blatte 0 an das linke (positive) Ufer im Blatte $\varkappa - 1$, das rechte Ufer im Blatte $\varkappa - 1$ an

das linke im Blatte $\sigma + 1$, das rechte Ufer im Blatte $\sigma + 1$ an das linke im Blatte 0, und wenn i eine von 0, $\varkappa - 1$, $\sigma + 1$ verschiedene der Zahlen

$$0, 1, 2, \cdots \sigma + 1$$

bedeutet, das rechte Ufer im Blatte i an das linke Ufer im selben Blatte, so dass also in den Blättern i das zwischen $a_{\varkappa-1}$ und $a_\varkappa$ gelegene Stück von $\bar{l}$ nicht als Verzweigungsschnitt fungirt.

In dieser Riemann'schen Fläche $\mathfrak{T}^1$ ist dann ζ_1 eine eindeutige Function des Ortes.

Um von der Natur der Fläche $\mathfrak{T}^1$ eine klare Vorstellung zu gewinnen, denken wir uns jedes Blatt derselben durch den Einheitskreis l in zwei Halbblätter zerlegt, die wir, jenachdem sie das Innere oder das Aeussere des Einheitskreises bilden, als das innere, beziehungsweise äussere Halbblatt des betreffenden Blattes von $\mathfrak{T}^1$ bezeichnen. Die so entstehenden $2\sigma + 4$ Halbblätter entsprechen gewissen Halbbereichen der durch die Gruppe $\bar{\vartheta}$ bestimmten Theilung des Einheitskreises der η-Ebene, die wir in folgender Weise erhalten.

Wir spiegeln den Bereich

$$\mathfrak{R}^1 = R_0' + \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_\sigma$$

in Bezug auf irgend eine seiner Seiten τ_0 und bezeichnen die so entstehenden Spiegelbilder von $\mathfrak{R}^1$, R_0' und $\mathfrak{R}_\varkappa$ beziehungsweise mit

$$\bar{\mathfrak{R}}^1, \bar{R}_0', \bar{\mathfrak{R}}_\varkappa \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma),$$

so dass also

$$\bar{\mathfrak{R}}^1 = \bar{R}_0' + \bar{\mathfrak{R}}_0 + \bar{\mathfrak{R}}_1 + \cdots + \bar{\mathfrak{R}}_\sigma$$

ist. Der Bereich

$$\mathfrak{R}^1 + \bar{\mathfrak{R}}^1$$

ist dann der Fundamentalbereich der Fuchs'schen Gruppe ϑ^1, und wenn wir diejenigen Seiten desselben, die Spiegelbilder von einander in Bezug auf die Seite τ_0 von $\mathfrak{R}^1$ sind, einander zuordnen, so bilden die Substitutionen, durch welche zwei so zugeordnete Seiten in einander transformirt werden, mit ihren inversen eine Basis von ϑ^1.

Offenbar ist nun $(\mathfrak{R}^1 + \bar{\mathfrak{R}}^1)$ die eindeutig conforme Abbildung der Riemann'schen Fläche $\mathfrak{T}^1$, wenn wir uns diesen Bereich durch stetige Deformation und Biegung so umgewandelt denken, dass correspondirende Punkte je zweier einander zugeordneter Seiten zur Deckung kommen. Es entsprechen demnach dem innern, beziehungsweise äussern Halbblatte des Blattes 0 von $\mathfrak{T}^1$ die Halbbereiche

$$R_0' \text{ und } \mathfrak{R}_0,$$

dem innern beziehungsweise äussern Halbblatte des Blattes $(\sigma + 1)$ von $\mathfrak{T}^1$ die Halbbereiche

$$\overline{\mathfrak{R}}_0 \text{ und } \overline{R}_0',$$

während dem innern beziehungsweise äussern Halbblatte des Blattes i von $\mathfrak{T}^1$ die Halbbereiche

$$\mathfrak{R}_i \text{ und } \overline{\mathfrak{R}}_i \qquad (i=1,2,\cdots\sigma)$$

entsprechen.

Die auf die angegebene Weise aus dem Bereiche

$$\mathfrak{R}^1 + \overline{\mathfrak{R}}^1$$

gebildete geschlossene Fläche ist aber auch die eindeutig conforme Abbildung der ζ_1-Ebene. Den Punkten der Begrenzung von $\mathfrak{R}^1$ entsprechen die Punkte der Peripherie des Einheitskreises der ζ_1-Ebene; den Ecken von $\mathfrak{R}^1$ mögen in einer bestimmten Reihenfolge die Punkte

$$\zeta_1 = a_1^{\,1},\ a_2^{\,1},\ \cdots\ a_{\sigma_1+1}^1$$

entsprechen. Es sind dies dann diejenigen Werthe der algebraischen Function ζ_1 von z, die in den Verzweigungspunkten

$$z = a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_{\sigma+1}$$

zum Vorschein kommen. Der Eintheilung des Bereiches $(\mathfrak{R}^1 + \overline{\mathfrak{R}}^1)$, beziehungsweise der aus demselben gebildeten geschlossenen Fläche in die Halbbereiche

$$R_0',\ \overline{R}_0',\ \mathfrak{R}_\varkappa,\ \overline{\mathfrak{R}}_\varkappa \qquad (\varkappa=0,1,2,\cdots\sigma),$$

entspricht eine Eintheilung der ζ_1-Ebene in Parzellen, die sich schlicht neben einander lagern und deren Begrenzung von jenen ζ_1 Punkten gebildet wird, für welche

$$|z| = 1$$

ist. Diese Parzellen sind nichts anderes wie die den einzelnen Halbblättern der Fläche $\mathfrak{T}^1$ entsprechenden Bereiche, dieselben geben also in ihrer Anordnung wieder eine getreue Darstellung der Gestalt von $\mathfrak{T}^1$. Hieraus können wir einige für das Folgende wichtige Schlüsse ziehen.

Denken wir uns z. B. z auf das Innere des Einheitskreises beschränkt; wenn dann z einen Punkt des Blattes 0 darstellt, so liegt der entsprechende η-Werth in dem Bereiche R_0'. Alle Punkte von R_0', auch die Punkte der Begrenzung, mit Ausnahme der Ecken,

liegen aber im Innern von $\mathfrak{R}^1$, also liegen die entsprechenden Werthe von ζ_1 (da ζ_1 die conforme Abbildung von $\mathfrak{R}^1$ auf das Innere des Einheitskreises vermittelt) innerhalb des Einheitskreises. D. h.:

Wenn z innerhalb oder auf dem positiven Ufer der Peripherie des Einheitskreises gelegen ist, und nicht mit einem der Verzweigungspunkte zusammenfällt, so sind die zugehörigen Werthe des dem Blatte 0 von $\mathfrak{T}^1$ entsprechenden Zweiges $\zeta_1^{(0)}$ von ζ_1 dem absoluten Betrage nach kleiner wie Eins.

Möge z. B. der Punkt $a_1^{\ 1}$ dem Werthe $z = a_1$ entsprechen, und mögen die Punkte $a_1^{\ 1}$, $a_2^{\ 1}$, $\cdots a^1_{\sigma_1+1}$ auf der Peripherie des Einheitskreises der ζ_1-Ebene so aufeinander folgen, wie die wachsenden Zahlen auf dem Zifferblatte einer Uhr. Dann sind die Punkte

$$(\alpha) \qquad a_1^{\ 1},\ a^1_{\sigma+1},\ a^1_{2\sigma+1},\ \cdots\ a^1_{\sigma^2+1}$$

die Ecken der dem innern Halbblatte 0 entsprechenden Parzelle der ζ_1-Ebene, und die Begrenzung dieser Parzelle wird von Curven gebildet, die ganz im Innern des Einheitskreises verlaufen und nur die Punkte (α) mit der Peripherie dieses Kreises gemein haben. Von den $(\sigma + 1)$ übrigen Parzellen, in welche das Innere des Einheitskreises durch jene Curven getheilt wird, entspricht die eine dem äusseren Halbblatte 0, während die übrigen den äusseren Halbblättern $1, 2, \cdots \sigma$ entsprechen.

Wenn z ausserhalb des Einheitskreises im Blatte $\sigma + 1$ gelegen ist, so befindet sich η im Bereiche $\bar{R}_0'$. Alle Punkte dieses Bereiches, auch die auf der Begrenzung desselben gelegenen Punkte, mit Ausnahme der Ecken, liegen innerhalb des Bereiches $\mathfrak{R}^1$, der die Abbildung des ausserhalb des Einheitskreises gelegenen Theiles der ζ_1-Ebene darstellt. Also liegen die den Punkten des äusseren Halbblattes $\sigma + 1$ entsprechenden ζ_1-Werthe ganz ausserhalb des Einheitskreises und erfüllen ein zusammenhängendes Gebiet, welches von $(\sigma + 1)$ Curven begrenzt wird, die selbst ganz ausserhalb des Einheitskreises verlaufen und nur ihre Endpunkte, d. h. je zwei aufeinanderfolgende der Punkte (α) mit der Peripherie des Einheitskreises gemein haben. Die $\sigma + 1$ zwischen diesen Curven und dem Einheitskreise gelegenen Parzellen entsprechen beziehungsweise den inneren Halbblättern

$$1,\ 2,\ \cdots\ \sigma,\ \sigma + 1$$

der Fläche $\mathfrak{T}^1$.

Wir heben als das für die Folge wichtigste Resultat hervor:

Wenn z im Innern oder auf dem positiven Ufer des Einheitskreises selbst verbleibt und nicht mit einem der Verzweigungspunkte zusammenfällt, so sind die entsprechenden Werthe des einen Zweiges $\zeta_1^{(0)}$ der algebraischen Function ζ_1 dem absoluten Betrage nach kleiner wie Eins, während die entsprechenden Werthe der übrigen Zweige absolute Beträge besitzen, die grösser oder gleich Eins sind.

Wir nennen diesen Zweig $\zeta_1^{(0)}$ den Hauptzweig der algebraischen Function ζ_1 von z.

Drittes Kapitel.

337. Definition der gefundenen algebraischen Function bei gegebenen Werthen ihrer Verzweigungspunkte.

Wenn wir von der Art, wie wir die algebraische Function ζ_1 - z erhalten haben, absehen und uns nur die auf dem Einheitskreise z-Ebene gelegenen Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$$

gegeben denken, so können wir die in der vorigen Nummer (S. 283) beschriebene $(\sigma + 2)$-blättrige Riemann'sche Fläche $\mathfrak{T}^1$ über der z-Ebene aufbauen, und dann auf Grund der Riemann'schen Existenztheoreme schliessen, dass es eine algebraische Function Z_1 von z geben muss, die auf dieser Fläche eine eindeutige Function des Ortes ist.

Die Riemann'sche Fläche $\mathfrak{T}^1$ ist eine einfach zusammenhängende, denn die Anzahl w der einfach zu zählenden Verzweigungspunkte ist

$$w = 2(\sigma + 1),$$

indem jedes a_x ein doppelt zu zählender Verzweigungspunkt ist, die Anzahl n der Blätter ist

$$n = \sigma + 2,$$

man hat also für die Zahl $2p + 1$, die die Ordnung des Zusammenhanges der Fläche bestimmt, nach der Riemann'schen Formel

$$w - 2n = 2p - 2,$$

den Werth Eins.

Wir können folglich die algebraische Function Z_1 von z so einrichten, dass sie nur an einer Stelle der Fläche $\mathfrak{T}^1$ von der ersten Ordnung unendlich wird, und behalten dann in Z_1 noch drei willkürliche Constanten, indem nämlich, wenn Z_1 eine specielle so beschaffene Function bedeutet, auch

$$\frac{\alpha Z_1 + \beta}{\gamma Z_1 + \delta}, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

ür willkürliche complexe Werthe der α, β, γ die gleichen Eigenschaften besitzt, und umgekehrt jede algebraische Function von der angegebenen Beschaffenheit in dieser Form, d. h. als linear gebrochene Function von Z_1 dargestellt werden kann. Es ist dann z eine rationale Function von Z_1. Bezeichen wir nun durch

$$Z_1 = A(z)$$

die erwähnte specielle Function, dann ist der conjugirte complexe Werth

$$\overline{Z}_1 = \overline{A(z)}$$

eine monogene Function von $\bar{z}$, also auch von

$$'z = \frac{1}{\bar{z}}$$

und besitzt als Function von $'z$ aufgefasst die analogen Eigenschaften wie Z_1 als Function von z, indem ja die Verzweigungsstellen

$$a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1},$$

von denen die Natur der algebraischen Function $A(z)$ allein abhängt, beim Uebergange von z zu $'z$ dieselben bleiben. Aus demselben Grunde ist

$$A('z),$$

ebenfalls als Function von $'z$, eine in der Fläche $\mathfrak{T}^1$ eindeutige Function, die nur an einer Stelle von der ersten Ordnung unendlich wird; wir erkennen also, dass $\overline{Z}_1$ als linear gebrochene Function von $A('z)$ darstellbar sein muss.

Daraus folgt (vergl. die in der Nr. 320, S. 229, angewandte Schlussweise), dass es in der Z_1-Ebene einen Kreis K giebt, auf welchem alle Werthe der Function Z_1 liegen, die den Verzweigungspunkten

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$$

der Fläche $\mathfrak{T}^1$ entsprechen, und dass z auf der Peripherie des Einheitskreises verbleibt, wenn Z_1 die Peripherie von K durchläuft.

Da wir durch eine lineare Function den Kreis K auf den Einheitskreis abbilden können, so folgt, dass wir uns die Function Z_1 von vornherein so gewählt denken können, dass wenn

$$|Z_1| = 1$$

ist, auch z dem absoluten Betrage nach gleich Eins wird. Die so bestimmte Function Z_1 enthält noch drei reale willkürliche Constanten, indem der Ausdruck

$$\frac{\alpha Z_1 + \beta}{\gamma Z_1 + \delta}, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

benso wie Z_1 beschaffene Function von z liefert, wenn die p[illegible]ro-
Substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Verschiebung in Bezug auf den Einheitskreis darstellt.
Die vorhin behandelte Function

$$\zeta_1 = \varphi_1(\eta)$$

t offenbar eine solche wie Z_1 beschaffene Function.

Für diese Function Z_1 von z gelten nun in Bezug auf ihre Zw[illegible]eige genau dieselben Gesetze wie die, welche wir für die Function ζ_1 gefunden hatten, wenn wir noch die Bedingung hinzufügen, dass ei[illegible]em bestimmten Werthe von z, der innerhalb des Einheitskreises liegt, ein Werth des Hauptzweiges der Function Z_1 entsprechen soll, der ebenfalls im Innern des Einheitskreises gelegen ist. Es ist also, wenn $Z_1^{(0)}$ den Hauptzweig,

$$Z_1^{(1)},\ Z_1^{(2)},\ \ldots\ Z_1^{(\sigma+1)}$$

die übrigen Zweige der Function Z_1 darstellen,

$$\text{für } |z| < 1, \quad |Z_1^{(0)}| < 1, \quad |Z_1^{(\varkappa)}| > 1 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots \sigma+1).$$

Wir wollen nun über die drei realen Constanten, von denen Z noch abhängt, so disponiren, dass Z_1 mit z gleichzeitig verschwind (dadurch sind zwei reale Constanten festgelegt), und dass einem wissen realen innerhalb des Einheitskreises gelegenen Werthe b_1 Z_1 ein ebenfalls realer und innerhalb des Einheitskreises geleg Werth b von z entspricht. Die so vollständig fixirte Function wollen wir in Uebereinstimmung mit der bereits benutzten Be nung ζ_1 nennen. Da für $|\zeta_1| = 1$ auch $|z| = 1$ ist, so entsp nach dem Riemann'schen Fortsetzungsprincipe harmonischen W von ζ_1 auch harmonische Werthe von z, es ist folglich für auch z unendlich gross.

Denken wir uns nun die Gleichung, der ζ_1 als Functio genügt, so besitzt dieselbe, da z rational durch ζ_1 ausdrüc muss, in z lineare Coefficienten, und der Coefficient von $\zeta_1^{\sigma+}$ und ζ_1 gleichzeitig unendlich werden, eine Constante, die Eins nehmen können. Da ferner ζ_1 und z auch gleichzeitig den, ist der Coefficient der nullten Potenz von ζ_1 mit z I also etwa gleich

$$c_0 z,$$

nd zwar ist, wie man ohne Schwierigkeit einsieht,

$$|c_0| = 1.$$

Nun haben wir aber

$$(-1)^{\sigma+2} c_0 z = \zeta_1^{(0)} \zeta_1^{(1)} \cdots \zeta_1^{(\sigma+1)},$$

s ist also, wenn z dem absoluten Betrage nach kleiner wie Eins ist,

29) $$|\zeta_1^{(0)}| < |z|.$$

38. Wiederholte Anwendung des zur Bildung der algebraischen Function angegebenen Verfahrens.

Wir können nun dasselbe Verfahren, welches wir auf die Function

$$z = f(\eta)$$

ngewandt haben, um zu der Function

$$\zeta_1 = \varphi_1(\eta)$$

u gelangen, auch auf diese ebenso wie $f(\eta)$ beschaffene Fuchs'sche 'unction anwenden. D. h. mit anderen Worten, wir bilden die Spiegelilder von $\mathfrak{R}^1$ in Bezug auf die sämmtlichen Seiten dieses Bereiches nd vereinigen dieselben mit $\mathfrak{R}^1$ zu einem neuen Bereiche $\mathfrak{R}^2$, der von

$$\sigma_2 + 1 = \sigma_1(\sigma_1 + 1)$$

reisbogen begrenzt wird und dessen sämmtliche Winkel gleich Null nd; die conforme Abbildung dieses Bereiches $\mathfrak{R}^2$ auf das Innere des inheitskreises einer ζ_2-Ebene wird durch eine Function

$$\zeta_2 = \varphi_2(\eta)$$

ermittelt, die zu einer symmetrischen Fuchs'schen Gruppe ϑ^2 gehört. 'on der Gruppe ϑ^2 ist evident, dass sie ebenso aus ϑ^1 hervorgeht, wie ^{1} aus ϑ.

Bilden wir nämlich aus den zu den Seiten von $\mathfrak{R}^1$ gehörigen piegelungen

$$\Sigma_i^1 \Sigma_\varkappa^1 \Sigma_i^1\,'\eta \qquad (i, \varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma_1,\ i \neq \varkappa),$$

ie wir etwa in der dem Schema (23) (S. 279) entsprechenden Reihenolge durch

$$\Sigma_0^2,\ \Sigma_1^2,\ \cdots\ \Sigma_{\sigma_2}^2$$

bezeichnen, als Basis einer Gruppe $\bar{\vartheta}^2$, so ist jede Operation $\bar{S}^2$ von $\bar{\vartheta}^2$ nur auf eine Weise in der Form

$$\bar{S}^2 = \Sigma^2_{i_1} \Sigma^2_{i_2} \cdots \Sigma^2_{i_{\nu_2}}$$

darstellbar, wo

$$i_1, i_2, \cdots i_{\nu_2} = 0, 1, 2, \cdots \sigma_2; \quad i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3, \cdots$$

ist. Wir setzen

$$\nu_2 = \overline{\text{Ind}}_2 \, \bar{S}^2,$$

dann ist ϑ^2 diejenige ausgezeichnete Untergruppe von $\bar{\vartheta}^2$, die aus den Operationen mit geradzahligem Index, d. h. aus den in $\bar{\vartheta}^2$ enthaltenen projectiven Substitutionen von η gebildet wird.

Jede Operation von $\bar{\vartheta}^1$ ist nach den Ergebnissen der Nr. 335 (S. 280) in der Form

$$\bar{S}^1 = \bar{S}^2 \cdot \Sigma_x^1$$

darstellbar, wo $\bar{S}^2$ eine Operation von $\bar{\vartheta}^2$ und Σ_x^1 eine der Operationen der Basis von $\bar{\vartheta}^1$ oder die identische Operation 1 bedeutet, und wir haben

(30) $$\overline{\text{Ind}}_2 \, \bar{S}^2 < \overline{\text{Ind}}_1 \, \bar{S}^1.$$

Die Beziehung zwischen der Gruppe $\bar{\vartheta}^2$ und der ursprünglichen Gruppe $\bar{\vartheta}$ lässt sich hiernach durch die Gleichung

(31) $$\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}^2 (1, \Sigma_0^1, \Sigma_1^1, \cdots \Sigma^1_{\sigma_1}) (1, \Sigma_0, \Sigma_1, \cdots \Sigma_\sigma)$$

wiedergeben, d. h. jede Operation $\bar{S}$ von $\bar{\vartheta}$ kann in der Form

(32) $$\bar{S} = \bar{S}^2 \Sigma^1_{x_1} \Sigma_{x_0}$$

dargestellt werden, wo $\bar{S}^2$ eine Operation von $\bar{\vartheta}^2$, $\Sigma^1_{x_1}$ eine der Operationen

$$1, \Sigma_0^1, \Sigma_1^1, \cdots \Sigma^1_{\sigma_1}$$

und Σ_{x_0} eine der Operationen

$$1, \Sigma_0, \Sigma_1, \cdots \Sigma_\sigma$$

bedeutet. Bei der Darstellung (32) ist dann nach (30) und (28) (Nr. 335, S. 280)

$$\overline{\text{Ind}}_2 \, \bar{S}^2 \leqq \overline{\text{Ind}}_0 \, \bar{S} - 2,$$

d. h. also, Operationen von $\bar{\vartheta}$, deren Index in Bezug auf $\bar{\vartheta}$ nicht grösser ist wie 2, müssen nothwendig in dem Quotienten

$$Q_2 = (1,\ \Sigma_0^1,\ \Sigma_1^1,\ \cdots\ \Sigma_{\sigma_1}^1)(1,\ \Sigma_0,\ \Sigma_1,\ \cdots\ \Sigma_\sigma)$$

der Gruppen $\overline{\vartheta}$ und $\overline{\vartheta}^2$ enthalten sein.

Durch die Function ζ_2 ist ζ_1 und folglich auch z rational darstellbar; die algebraische Function ζ_2 von ζ_1 ist eine eindeutige Function des Ortes in einer über der ζ_1-Ebene ausgebreiteten $(\sigma_1 + 2)$-blättrigen Riemann'schen Fläche $\mathfrak{T}^2$, die mittelst der Punkte

$$a_1^1,\ a_2^1,\ \cdots\ a_{\sigma_1+1}^1$$

genau ebenso gebildet ist, wie $\mathfrak{T}^1$ mittelst der Punkte

$$a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_{\sigma+1}\,.$$

Bezeichnen wir wieder mit $\zeta_2^{(0)}$ den **Hauptzweig** der Function ζ_2 von ζ_1, so ist, wenn $|\,\zeta_1\,|$ kleiner als Eins ist, nach (29) auch

$$|\,\zeta_2^{(0)}\,| < |\,\zeta_1\,|,$$

sofern wir die nur bis auf drei reale Constanten bestimmte Function ζ_2 so einrichten, dass sie mit ζ_1 gleichzeitig verschwindet.

So fahren wir nun fort, d. h. wir bilden aus

$$\zeta_2 = \varphi_2(\eta)$$

eine Function

$$\zeta_3 = \varphi_3(\eta)$$

in ähnlicher Weise wie ζ_2 aus ζ_1 und ζ_1 aus z gebildet worden war, aus dieser eine Function

$$\zeta_4 = \varphi_4(\eta),$$

u. s. w., allgemein sei

$$\zeta_\lambda = \varphi_\lambda(\eta)$$

die zu der symmetrischen Fuchs'schen Gruppe ϑ^λ gehörige Fuchs'sche Function, welche die eindeutig conforme Abbildung des Bereiches $\mathfrak{R}^\lambda$ auf das Innere des Einheitskreises der ζ_λ-Ebene vermittelt. $\mathfrak{R}^\lambda$ geht aus $\mathfrak{R}^{(\lambda-1)}$ durch Vereinigung dieses Bereiches mit seinen Spiegelbildern in Bezug auf sämmtliche Seiten desselben hervor.

Die Spiegelungen in Bezug auf die Seiten von $\mathfrak{R}^\lambda$, deren Anzahl gleich

$$\sigma_\lambda + 1 = \sigma_{\lambda-1}(\sigma_{\lambda-1} + 1)$$

ist, sind die in einer bestimmten Reihenfolge zu nehmenden

$$\Sigma_i^{\lambda-1}\Sigma_\varkappa^{\lambda-1}\Sigma_i^{\lambda-1}{}'\eta \qquad (i,\ \varkappa = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ \sigma_{\lambda-1};\ i \neq \varkappa),$$

wir bezeichnen sie mit

$$\Sigma_i^{\lambda}{}'\eta \qquad (i=0, 1, \cdots \sigma_\lambda).$$

Die aus denselben als Basis gebildete Gruppe $\bar{\vartheta}^\lambda$ enthält ϑ^λ als ausgezeichnete Untergruppe, indem, wenn wir irgend eine Substitution $\bar{S}^\lambda$ von $\bar{\vartheta}^\lambda$ in der Form

$$\bar{S}^\lambda = \Sigma_{i_1}^\lambda \Sigma_{i_2}^\lambda \cdots \Sigma_{i_{\nu_\lambda}}^\lambda$$

darstellen, wo

$$i_1, i_2, \cdots i_{\nu_\lambda} = 0, 1, 2, \cdots \sigma_\lambda; \qquad i_1 \neq i_2, \; i_2 \neq i_3, \cdots$$

ist, und

$$\nu_\lambda = \overline{\mathrm{Ind}}_\lambda \, \bar{S}^\lambda$$

setzen, in ϑ^λ diejenigen Operationen von $\bar{\vartheta}^\lambda$ enthalten sind, deren Index ν_λ eine gerade Zahl ist.

Die Beziehung zwischen $\bar{\vartheta}^\lambda$ und $\bar{\vartheta}$ wird, wie man sofort übersieht, durch die Gleichung

$$\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}^\lambda \cdot Q_\lambda \tag{33}$$

dargestellt, wo Q_λ durch das symbolische Product

$$Q_\lambda = \left(1, \Sigma_0^{\lambda-1}, \Sigma_1^{\lambda-1}, \cdots \Sigma_{\sigma_{\lambda-1}}^{\lambda-1}\right)\left(1, \Sigma_0^{\lambda-2}, \Sigma_1^{\lambda-2}, \cdots \Sigma_{\sigma_{\lambda-2}}^{\lambda-2}\right)\cdots \cdots (1, \Sigma_0, \Sigma_1, \cdots \Sigma_\sigma)$$

gegeben ist. D. h. bedeutet $\bar{S}$ irgend eine Operation von $\bar{\vartheta}$, so ist $\bar{S}$ in der Form

$$\bar{S} = \bar{S}^\lambda T_\varkappa \tag{34}$$

darstellbar, wo $\bar{S}^\lambda$ eine Operation von $\bar{\vartheta}^\lambda$ und $T_\varkappa$ eine Operation von Q_λ bedeutet.

Aus den Gleichungen (28) (Nr. 335, S. 280), (31) und den analogen Gleichungen für

$$\lambda = 2, 3, \cdots$$

folgt, dass bei der Darstellung (34) stets

$$\overline{\mathrm{Ind}}_0 \, \bar{S} > \overline{\mathrm{Ind}}_\lambda \, \bar{S}^\lambda + \lambda - 1 \tag{35}$$

sein muss, wenn $\bar{S}^\lambda$ eine von 1 verschiedene Operation der Gruppe $\bar{\vartheta}_\lambda$ ist. Wir haben also den Satz:

Alle Operationen der Gruppe $\bar{\vartheta}$, deren Index in Bezug auf diese Gruppe nicht grösser ist wie λ, sind unter den Operationen von Q_λ enthalten.

Die Anzahl der Operationen von Q_λ ist offenbar gleich

$$N_\lambda = (\sigma_{\lambda-1} + 2) N_{\lambda-1} = \prod_{\varkappa=0}^{\lambda-1} (\sigma_\varkappa + 2) \qquad (\sigma_0 = \sigma)$$

und liefert zugleich den Grad der algebraischen Gleichung mit in z linearen Coefficienten, der ζ_λ als Function von z Genüge leistet. Bedeutet $\zeta_\lambda^{(0)}$ den Hauptzweig der algebraischen Function ζ_λ von $\zeta_{\lambda-1}$, so ist ähnlich wie für $\lambda = 1$, wenn $\zeta_{\lambda-1}$ dem absoluten Betrage nach kleiner wie Eins ist,

$$|\zeta_\lambda^{(0)}| < |\zeta_{\lambda-1}|.$$

339. Grenzfunction des gefundenen Algorithmus algebraischer Functionen bei Betrachtung der Hauptzweige.

Unter dem Hauptzweige der algebraischen Function ζ_λ von z verstehen wir Folgendes. Wir nehmen zunächst ζ_λ als Function von $\zeta_{\lambda-1}$ und fixiren den Hauptzweig dieser Function; dann setzen wir hierin für $\zeta_{\lambda-1}$ den Hauptzweig $\zeta_{\lambda-1}^{(0)}$ der Function $\zeta_{\lambda-1}$ von $\zeta_{\lambda-2}$, hierin für $\zeta_{\lambda-2}$ den Hauptzweig $\zeta_{\lambda-2}^{(0)}$ der Function $\zeta_{\lambda-2}$ von $\zeta_{\lambda-3}$ u. s. w. ein. Den so bestimmten Zweig der Function ζ_λ von z bezeichnen wir durch $\overset{0}{\zeta}_\lambda$ und nennen ihn den Hauptzweig.

Wenn wir dann z auf das Innere des Einheitskreises beschränken, so befindet sich zufolge der Ungleichung

$$|\zeta_1^{(0)}| < |z|$$

auch $\zeta_1^{(0)}$ innerhalb des Einheitskreises, also gilt die Ungleichung

$$|\overset{0}{\zeta}_2| < |\zeta_1^{(0)}|,$$

und ebenso ist allgemein

$$(\alpha) \qquad |\overset{0}{\zeta}_\lambda| < |\overset{0}{\zeta}_{\lambda-1}| < \cdots < |z|,$$

wenn z dem absoluten Betrage nach kleiner ist wie Eins.

Hieraus folgt, dass die Functionenfolge

$$|z|, \quad |\zeta_1^{(0)}|, \quad |\overset{0}{\zeta}_2|, \cdots$$

sich einer bestimmten endlichen Grenzfunction

$$\lim_\lambda |\overset{0}{\zeta}_\lambda| = \mathsf{H}$$

nähert, sofern

$$|z| < 1$$

bleibt. Es ist nun auch sofort möglich, die Beziehung dieser Grenzfunction zu der Function η von z anzugeben.

Die Operationen von Q_λ entsprechen eindeutig den verschiedenen Halbbereichen (vgl. Nr. 334, S. 277) der der Gruppe $\bar{\vartheta}$ entsprechenden Theilung des Einheitskreises der η-Ebene, welche zu dem Bereiche $\mathfrak{R}^\lambda$ vereinigt worden sind, indem nämlich diese Halbbereiche aus R_0' durch Anwendung der Operationen von Q_λ hervorgehen.

Wir wollen uns η so eingerichtet denken, dass der Punkt $\eta = 0$ im Innern des Bereiches R_0' liegt, und dass für $\eta = 0$ die Function $z = f(\eta)$ verschwindet; überdies setzen wir auch gleich fest, dass der reale Werth $z = b$ für einen ebenfalls realen und innerhalb R_0' gelegenen Werth B von η zum Vorschein kommen soll. Diesen Forderungen können wir stets Genüge leisten, da wir η durch irgend eine linear gebrochene Function

$$\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

ersetzen können, worin die Substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

eine Verschiebung in Bezug auf den Einheitskreis darstellt.

Denken wir uns dann um den Punkt $\eta = 0$ als Mittelpunkt einen Kreis beschrieben, der ganz innerhalb des Bereiches $\mathfrak{R}^\lambda$ verläuft, und sei ϱ_λ der Radius des grössten Kreises, der diese Beschaffenheit besitzt. Dann ist also, wenn η auf der Begrenzung von $\mathfrak{R}^\lambda$ verbleibt,

$$\varrho_\lambda < |\eta| < 1,$$

und da die Function ζ_λ für die Punkte der Begrenzung von $\mathfrak{R}^\lambda$ dem absoluten Betrage nach gleich Eins wird, so haben wir für diese Werthe von η

$$|\eta| \leqq |\zeta_\lambda| < \frac{|\eta|}{\varrho_\lambda}, \tag{36}$$

und somit auch

$$\log|\eta| \leq \log|\zeta_\lambda| < \log\frac{|\eta|}{\varrho_\lambda}. \tag{36a}$$

Setzen wir nun

$$\eta = p + qi,$$

so ist der Logarithmus des absoluten Betrages von ζ_λ eine Function der beiden realen Variabeln p, q, die der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = 0 \tag{37}$$

Genüge leistet und innerhalb des Bereiches $\mathfrak{R}^\lambda$ mit Ausschluss der Stelle $\eta = 0$ eindeutig, endlich und stetig ist. Die Functionen

$$(38)\qquad \log|\eta| - \log|\zeta_\lambda|, \qquad \log|\zeta_\lambda| - \log\left|\frac{\eta}{\varrho_\lambda}\right|$$

genügen folglich derselben partiellen Differentialgleichung und sind, da für $\eta = 0$ sowohl z als auch alle Functionen

$$\zeta_1,\ \zeta_2,\ \cdots$$

erschwinden, innerhalb des ganzen Bereiches $\mathfrak{R}^\lambda$ eindeutig, endlich nd stetig. Zufolge der Ungleichung (36a) ist keine der beiden Funconen (38) auf der Begrenzung von $\mathfrak{R}^\lambda$ positiv, nach einem bekannten atze können folglich die Functionen (38) auch im Innern von $\mathfrak{R}^\lambda$ iemals positiv sein. D. h.:

Die Ungleichung (36a) und somit auch die Ungleihung (36) gilt für alle Werthe von η, die im Innern des ereiches $\mathfrak{R}^\lambda$ liegen.

Denken wir uns die Operationen der Gruppe $\bar{\vartheta}$ nach der Grösse ihrer Indices oder Gewichte angeordnet und jedem der Halbbereiche, die aus R_0' durch Anwendung der Operationen von $\bar{\vartheta}$ hervorgehen, den Index der betreffenden Operation als sein Gewicht beigelegt. Wenn dann ϱ irgend eine positive Zahl bedeutet, die kleiner ist als Eins, so ist es offenbar stets möglich, eine positive ganze Zahl m so anzugeben, dass der Bereich, der durch Vereinigung aller Halbbereiche von den Gewichten

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots m$$

entsteht, den mit dem Radius ϱ um den Punkt $\eta = 0$ als Mittelpunkt beschriebenen Kreis ganz in sich enthält.

Bedeutet nun ϱ irgend eine positive Zahl, die um ein Angebbares kleiner ist wie Eins, so bestimmen wir die zu diesem ϱ gehörige ganze Zahl m. Nach dem in der Nr. 338 (S. 294) bewiesenen Satze enthält dann der zur Gruppe $\bar{\vartheta}^m$ gehörige Quotient Q_m alle Operationen von $\bar{\vartheta}$, deren Indices nicht grösser sind wie m, und folglich enthält der Bereich $\mathfrak{R}^m$ alle Halbbereiche der ursprünglichen Theilung, deren Gewichte die Zahl m nicht übertreffen.

Wir haben demnach zufolge der Ungleichung (36) für Werthe von η, die innerhalb $\mathfrak{R}^m$ liegen,

$$|\eta| \leqq |\zeta_m| < \frac{|\eta|}{\varrho}$$

und a potiori für jedes ganzzahlige positive τ

$$|\eta| \leqq |\zeta_{m+\tau}| < \left|\frac{\eta}{\varrho}\right|.$$

Lassen wir nun ϱ gegen Eins convergiren, so folgt hieraus

$$\lim_{\lambda} |\zeta_\lambda| = |\eta|,$$

d. h. der Grenzwerth H, dem die Functionenfolge

$$|z|, \; |\zeta_1^{(0)}|, \; |\overset{0}{\zeta}_2|, \; |\overset{0}{\zeta}_3|, \cdots$$

zustrebt, ist nichts anderes wie der absolute Betrag des innerhalb R_0' gelegenen Werthes η, der dem zum Ausgangspunkte genommenen z-Werthe entspricht.

340. Beweis für die Existenz der Grenzfunction.

Betrachten wir nun die der partiellen Differentialgleichung (37) genügende Function

$$U_\lambda = \log \left| \frac{\zeta_\lambda}{\eta} \right|$$

der beiden realen Variabeln p, q, so ist nach (36a), wenn η innerhalb $\mathfrak{R}^\lambda$ verbleibt,

(39) $$0 < U_\lambda < \log \frac{1}{\varrho_\lambda},$$

und ferner

$$\lim_{\lambda} \varrho_\lambda = 1.$$

Die Ungleichung (39) besteht also jedenfalls, wenn

$$|\eta| < \bar{\varrho}_\lambda < \varrho_\lambda$$

ist, wo $\bar{\varrho}_\lambda$ sich von ϱ_λ um ein Angebbares unterscheidet. Hieraus können wir nun den Schluss ziehen, dass nicht nur die absoluten Beträge der ζ_λ dem Grenzwerthe $|\eta|$ zustreben, sondern dass die Grössen ζ_λ selbst sich der Grenze η nähern.

Hat man nämlich eine innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkte $p = 0$, $q = 0$ und dem Radius ϱ eindeutige, endliche und stetige Function $u(p, q)$, die der partiellen Differentialgleichung (37) Genüge leistet, so liefert (vergl. Nr. 212, Bd. II, 1, S. 323) der Ausdruck

$$v(p, q) = \int_{(\alpha,\beta)}^{(p,q)} \left(\frac{\partial u}{\partial p} dq - \frac{\partial u}{\partial q} dp \right),$$

wo (α, β) irgend ein dem Innern jenes Kreises angehöriges Werthepaar bedeutet und die Integration längs eines beliebigen ebenfalls innerhalb des gedachten Kreises verlaufenden Weges zu erstrecken ist, den Coefficienten von i in einer monogenen Function der complexen Variabeln η

$$u(p, q) + iv(p, q) = f(\eta),$$

deren realer Theil gleich $u(p, q)$, und die für

$$|\eta| < \varrho$$

eindeutig und allenthalben regulär ist. Also wird der Ausdruck

$$V_\lambda = \operatorname{Arg} \frac{\zeta_\lambda}{\eta},$$

der in der monogenen Function von η

$$\log \frac{\zeta_\lambda}{\eta}$$

den Coefficienten von i bildet, in der Form

$$V_\lambda = \int_{(\alpha_\lambda \beta_\lambda)}^{(p,q)} \left(\frac{\partial U_\lambda}{\partial p} dq - \frac{\partial U_\lambda}{\partial q} dp \right)$$

darstellbar sein müssen, wo $(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$ ein Werthepaar bedeutet, für welches V_λ gleich Null wird.

Nun besitzt aber zufolge der für die Function ζ_1 von z und damit auch für die Functionen ζ_2 von ζ_1 u. s. w. getroffenen Festsetzung (Nr. 337, S. 290) und zufolge der für η (Nr. 339, S. 296) gemachten Annahme, für den realen Werth $\eta = B$, die Function z von η den realen Werth b und die Function ζ_λ einen ebenfalls realen Werth. Wir können folglich für jeden Werth des Index λ den Ausdruck V_λ durch die Formel

$$V_\lambda = \int_{(B,0)}^{(p,q)} \left(\frac{\partial U_\lambda}{\partial p} dq - \frac{\partial U_\lambda}{\partial q} dp \right)$$

definiren.

Es kommt nun darauf an zu zeigen, dass die beiden Grenzwerthe

(40) $$\lim_\lambda \frac{\partial U_\lambda}{\partial q} = \lim_\lambda \frac{\partial U_\lambda}{\partial p} = 0$$

sind, denn dann folgt aus der eben gegebenen Darstellung, dass auch

$$\lim_\lambda V_\lambda = 0$$

sein muss, und hieraus ergiebt sich mit Rücksicht auf

$$\lim_\lambda U_\lambda = 0$$

ohne Weiteres, dass in der That

(41) $$\lim_\lambda \zeta_\lambda = \eta$$

ist.

Wir wissen, dass U_λ der Ungleichung (39) genügt, wenn

$$|\eta| < \bar{\varrho}_\lambda < \varrho_\lambda$$

ist. Weiss man allgemein von einer der partiellen Differentialgleichung (37) genügenden Function $u(p, q)$, dass dieselbe innerhalb des Kreises

(42) $$p^2 + q^2 = \varrho^2$$

eindeutig, endlich und stetig ist und dem absoluten Betrage nach stets kleiner bleibt wie eine bestimmte Grösse M, so kann man auf folgende Weise für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial p}, \quad \frac{\partial u}{\partial q}$$

dieser Function eine obere Grenze angeben.

Wir denken uns $u(p, q)$ innerhalb des Kreises (42) durch das Poisson'sche Integral (vergl. Nr. 212, Bd. II, 1, S. 324) dargestellt:

$$u(p, q) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\varrho^2 - (p^2 + q^2)}{(p - \bar{p})^2 + (q - \bar{q})^2}\, u(\bar{p}, \bar{q})\, ds,$$

wo $(\bar{p}, \bar{q})$ einen auf der Peripherie des Kreises (42) veränderlichen Punkt,

$$ds = \sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2}\ \mathrm{arctg}\, \frac{\bar{q}}{\bar{p}}$$

das Bogenelement des Kreises in diesem Punkte bedeutet, und wo die Integration über die ganze Kreisperipherie zu erstrecken ist. Differentiiren wir dann z. B. nach p unter dem Integralzeichen, was jedenfalls erlaubt ist, wenn

(43) $$p^2 + q^2 < \bar{\varrho}^2 < \varrho^2$$

ist, wo $\bar{\varrho}$ eine positive Grösse bedeutet, die um ein Angebbares kleiner ist wie ϱ, so erhalten wir

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\varrho^2 - (p^2 + q^2)}{(p - \bar{p})^2 + (q - \bar{q})^2}\left\{\frac{-2p}{\varrho^2 - (p^2 + q^2)} + \frac{-2(p - \bar{p})}{(p - \bar{p})^2 + (q - \bar{q})^2}\right\} u(\bar{p}, \bar{q})\, ds.$$

Nun ist zufolge der Ungleichung (43)

$$\varrho^2 - (p^2 + q^2) > \varrho^2 - \bar{\varrho}^2 > (\varrho - \bar{\varrho})^2,$$

und ebenso auch

$$(p - \bar{p})^2 + (q - \bar{q})^2 > (\varrho - \bar{\varrho})^2,$$

ferner ist offenbar

$$|-2p - 2(p - \bar{p})| < 6\varrho;$$

wir finden demnach, da

$$|u(\bar{p}, \bar{q})| < M$$

sein sollte, die Ungleichung

$$\left|\frac{\partial u}{\partial p}\right| < \frac{1}{\varrho}\,\frac{6M}{\left(1-\frac{\bar\varrho}{\varrho}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\frac{\varrho^2-(p^2+q^2)}{(p-\bar p)^2+(q-\bar q)^2}\,ds,$$

und da der zweite Factor auf der rechten Seite offenbar den Werth Eins hat,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial p}\right| < \frac{1}{\varrho}\,\frac{6M}{\left(1-\frac{\bar\varrho}{\varrho}\right)^2}.$$

Derselben Ungleichung genügt, wie man sofort übersieht, auch

$$\left|\frac{\partial u}{\partial q}\right|.$$

Wir haben demnach für die partiellen Ableitungen der Function U_λ die Ungleichungen

$$\left|\frac{\partial U_\lambda}{\partial p}\right| < \frac{1}{\varrho_\lambda}\,\frac{6\log\frac{1}{\varrho_\lambda}}{\left(1-\frac{\bar\varrho_\lambda}{\varrho_\lambda}\right)^2} > \left|\frac{\partial U_\lambda}{\partial q}\right|,$$

und folglich ist, da ϱ_λ mit wachsendem λ dem Werthe Eins zustrebt,

$$\lim_\lambda \frac{\partial U_\lambda}{\partial p} = \lim_\lambda \frac{\partial U_\lambda}{\partial q} = 0,$$

was zu beweisen war.

Wir haben also den wichtigen Satz:

Gehen wir von der zu der symmetrischen Fuchs'schen Gruppe ϑ gehörigen Fuchs'schen Function z von η zu der transformirten Fuchs'schen Function ζ_1 über, dann durch Wiederholung derselben Transformation von ζ_1 zu ζ_2 und fahren so bis in's Unbegrenzte fort; so nähern sich die auf diese Weise gebildeten Functionen einer wohlbestimmten Grenzfunction, und diese Grenzfunction ist nichts anderes wie die unabhängige Variable η.

Viertes Kapitel.

341. Definition der innerhalb und ausserhalb des Einheitskreises existirenden Grenzfunction.

Wir waren von der Function z von η ausgegangen, die durch eine bestimmte Gruppe ϑ definirt war, und die also die bestimmten auf der Peripherie des Einheitskreises gelegenen Werthe

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$$

ausliess. Denken wir uns nun, es seien diese $\sigma + 1$ Punkte $a_\varkappa$ irgendwie auf der Peripherie des Einheitskreises der z-Ebene in dieser Aufeinanderfolge gegeben, dann können wir mit Hülfe der eben dargelegten Methode die Existenz einer Function η der unabhängigen Variabeln z nachweisen, deren Umkehrung eine Fuchs'sche Function liefert, die nur innerhalb des Einheitskreises der η-Ebene existirt und die beliebig vorgeschriebenen auf dem Einheitskreise gelegenen Punkte $a_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1)$ auslässt.

In der That können wir, wie bereits in der Nr. 337 (S. 288) hervorgehoben wurde, aus z die algebraische Function ζ_1 von z herstellen, wenn nur die Lage der Punkte $a_\varkappa$ auf dem Einheitskreise gegeben ist. Ebenso kann der ganze Algorithmus der Functionen

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \cdots$$

in völlig bestimmter Weise hergestellt und auch immer der Hauptzweig $\overset{0}{\zeta}_\lambda$ einer jeden der successive auftretenden Functionen ζ_λ ausgesondert werden.

Für die so definirten Hauptzweige besteht dann die Ungleichung (α) der Nr. 339 (S. 295), aus welcher für $|z| < 1$ die Existenz der Grenzfunction

$$\lim_\lambda |\overset{0}{\zeta}_\lambda| = \mathsf{H}$$

folgt. Genau so wie in der Nr. 340 (S. 298) zeigt man nun, dass nicht nur die absoluten Beträge der $\overset{0}{\zeta}_\lambda$, sondern dass auch diese Grössen

selbst sich einer bestimmten endlichen Grenzfunction nähern; wir bezeichnen diese Grenzfunction mit

(1) $$\lim_{\lambda} \overset{0}{\zeta}_\lambda = \overset{0}{\eta};$$

dieselbe ist dann nur für $|z| < 1$ definirt.

Wenn wir, statt das Innere des Einheitskreises zu betrachten, das Aeussere dieses Kreises der Untersuchung zu Grunde legen wollten, so hätten wir für die Function ζ_1 von z nicht $\zeta_1^{(0)}$, sondern $\zeta_1^{(\sigma+1)}$ als den Hauptzweig zu definiren. Als Hauptzweig der Function ζ_λ von z wäre dann derjenige Zweig $\overset{\sigma+1}{\zeta}_\lambda$ anzusehen, der aus dem Zweige

$$\zeta_\lambda^{(\sigma_{\lambda-1}+1)}$$

der algebraischen Function ζ_λ von $\zeta_{\lambda-1}$ entsteht, wenn wir an die Stelle von $\zeta_{\lambda-1}$ setzen

$$\zeta_{\lambda-1}^{(\sigma_{\lambda-2}+1)},$$

hierin wieder an die Stelle von $\zeta_{\lambda-2}$ den Zweig

$$\zeta_{\lambda-2}^{(\sigma_{\lambda-3}+1)}$$

u. s. w. Nach den Ergebnissen der Nr. 336 (S. 284) besteht dann für diese Zweige $\overset{\sigma+1}{\zeta}_\lambda$ die fortlaufende Ungleichung

(β) $$|\overset{\sigma+1}{\zeta}_\lambda| > |\overset{\sigma+1}{\zeta}_{\lambda-1}| > \cdots > |\zeta_1^{(\sigma+1)}| > |z|$$

für Werthe von z, die dem absoluten Betrage nach grösser sind wie Eins, und aus (β) folgt nun die Existenz einer bestimmten endlichen Grenzfunction

$$\lim_{\lambda} |\overset{\sigma+1}{\zeta}_\lambda| = \overline{\mathsf{H}},$$

die wieder nach dem Verfahren der Nr. 340 (S. 298) auf die Existenz einer Grenzfunction

(2) $$\lim_{\lambda} \overset{\sigma+1}{\zeta}_\lambda = \overset{\sigma+1}{\eta}$$

zu schliessen gestattet, die für $|z| > 1$ definirt ist.

Wir werden uns auf die Untersuchung der durch die Gleichung (1) definirten Function $\overset{0}{\eta}$ beschränken, da für die Function $\overset{\sigma+1}{\eta}$ im Wesentlichen dieselben Betrachtungen massgebend sind.

Die Function $\overset{0}{\eta}$ ist durch den Algorithmus von algebraischen Functionen

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdots$$

der unabhängigen Variabeln z definirt, für Werthe von z, deren absoluter Betrag kleiner ist wie Eins. Es handelt sich darum, diese Function nach dem ausserhalb des Einheitskreises der z-Ebene gelegenen Gebiete hin fortzusetzen und die Eigenschaften der auf diese Weise entstehenden monogenen Function η von z zu erforschen.

342. Einführung der ω-Operationen und Betrachtung der aus denselben gebildeten Gruppen.

Indem wir den längs der Peripherie l des Einheitskreises der z-Ebene gelegten, die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ verbindenden Schnitt $\bar{l}$ in's Auge fassen, der durch das zwischen a_1 und $a_{\sigma+1}$ befindliche Stück l_0 der Peripherie zu l ergänzt wird, definiren wir einen von einem beliebigen Punkte z ausgehenden einfachen positiven Umlauf um den Punkt $a_\varkappa$ als eine auf z auszuübende Operation $\varpi_\varkappa$, wenn dieser Umlauf so ausgeführt wird, dass wir zuerst das zwischen $a_\varkappa$, $a_{\varkappa+1}$ gelegene Stück von $\bar{l}$ in der Richtung vom negativen nach dem positiven Ufer hin und dann das zwischen $a_\varkappa$, $a_{\varkappa-1}$ gelegene Stück von l in der Richtung vom positiven nach dem negativen Ufer hin überschreiten. Die Operation ϖ_1 ist dann einfach ein Umlauf um a_1, wobei dieser Punkt zur Linken bleibt, die Operation $\varpi_{\sigma+1}$ ist durch die Gleichung

$$\varpi_{\sigma+1} = \varpi_1^{-1}\varpi_2^{-1} \cdots \varpi_\sigma^{-1} \tag{3}$$

definirt, wo $\varpi_\varkappa^{-1}$ dem im entgegengesetzten Sinne vollzogenen Umlaufe $\varpi_\varkappa$ entspricht, und wo allgemein durch das Symbol $\varpi_\alpha\varpi_\beta$ ein Umlauf bezeichnet wird, der demjenigen äquivalent ist, den wir erhalten, wenn wir erst ϖ_α und dann ϖ_β ausführen.

Aus den Operationen

$$\varpi_1, \varpi_2, \cdots \varpi_{\sigma+1}$$

als Basis bilden wir eine Gruppe $\mathfrak{O}$, diese Gruppe ist dann mit der aus $\sigma+1$ parabolischen projectiven Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1},$$

wo

$$A_{\sigma+1} = A_1^{-1}A_2^{-1} \cdots A_\sigma^{-1}$$

ist, gebildeten Gruppe ϑ holoedrisch isomorph.

Wir erweitern nun die Gruppe $\mathfrak{O}$, indem wir eine Operation ω_0 hinzunehmen, die wir als den Uebergang von einem Punkte z nach seinem harmonischen Werthe $'z$ definiren, wobei der Uebergang auf

einem Wege zu vollziehen ist, der die Peripherie des Einheitskreises in einem zwischen $a_{\sigma+1}$, a_1 gelegenen Punkte überschreitet. Für diese Operation ist offenbar

(4) $$\omega_0^2 = 1,$$

und ω_0 ist überdies so beschaffen, dass die Transformation einer beliebigen Operation $\mathfrak{o}$ der Gruppe $\mathfrak{O}$ mit ω_0, d. h.

$$\omega_0 \mathfrak{o} \omega_0$$

wieder eine Operation von $\mathfrak{O}$ liefert. Betrachten wir dann die Operationen

$$\mathfrak{o}, \; \mathfrak{o}\omega_0,$$

wo $\mathfrak{o}$ alle Operationen von $\mathfrak{O}$ durchläuft, so bilden dieselben wiederum eine Gruppe Ω, in welcher $\mathfrak{O}$ als ausgezeichnete Untergruppe enthalten ist.

Für die Gruppe Ω können wir auf folgende Weise eine Basis herstellen.

Wir gehen z. B. von einem innerhalb des Einheitskreises der z-Ebene gelegenen Punkte z aus und beschreiben einen Weg, der den Schnitt $\bar{l}$ in einem zwischen $a_\varkappa$, $a_{\varkappa+1}$ gelegenen Punkte überschreitet und in dem zu z harmonischen Werthe $'z$ endigt. Diesen Uebergang bezeichnen wir als eine auf z ausgeübte Operation $\omega_\varkappa$. Für dieselbe besteht dann offenbar die Gleichung

(5) $$\omega_\varkappa^2 = 1 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma).$$

Wenn wir dann von dem Punkte $\omega_\varkappa z$ aus auf einem Wege, der den Schnitt $\bar{l}$ in einem zwischen a_i, a_{i+1} gelegenen Punkte überschreitet, zu dem Ausgangspunkte zurückkehren, so wird dies der auf $\omega_\varkappa z$ anzuwendenden Operation

$$\omega_\varkappa \omega_i \omega_\varkappa,$$

also für $i = \varkappa$ wie es sein muss, der Operation

$$\omega_\varkappa^3 = \omega_\varkappa$$

entsprechen.

Lassen wir nun z von irgend einem beliebigen Punkte aus den Umlauf

$$\mathfrak{o}_\varkappa = \varpi_\varkappa \varpi_{\varkappa-1} \cdots \varpi_1$$

vollziehen, der die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\varkappa$ einfach im positiven Sinne umschliesst, so können wir uns diesen Weg so ausgeführt denken, dass z zuerst nach seinem harmonischen Werthe geht und dann wieder in seine Ausgangslage zurückkehrt. Liegt z innerhalb des Einheits-

kreises, so ist also zunächst auf z die Operation ω_x und dann auf $\omega_x z$ die Operation

$$\omega_x \omega_0 \omega_x,$$

die dem Uebergange längs eines den Schnitt l zwischen $a_{\sigma+1}$, a_1 überschreitenden Weges entspricht, auszuüben, so dass mit Rücksicht auf (5)

$$\mathfrak{o}_x = \omega_x \omega_0 \omega_x \omega_x = \omega_x \omega_0$$

gefunden wird. Liegt z ausserhalb des Einheitskreises, so ist zuerst die Operation ω_0 und dann auf den innerhalb des Einheitskreises gelegenen Punkt $\omega_0 z$ die Operation ω_x anzuwenden, so dass sich auch wieder

$$\mathfrak{o}_x = \omega_x \omega_0$$

ergiebt.

Da aber die Operationen $\mathfrak{o}_x$ und deren inverse offenbar eine Basis der Gruppe $\mathfrak{O}$ ausmachen, so folgt hieraus, dass die Operationen

$$(6) \qquad \omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots \omega_\sigma$$

eine Basis der Gruppe Ω bilden. Ebenso wie $\mathfrak{O}$ der Gruppe ϑ, ist demnach Ω der Gruppe $\bar{\vartheta}$ holoedrisch isomorph, und wir können jetzt, indem wir die Index- oder Gewichtsbezeichnung für die Operationen der Gruppe Ω in ähnlicher Weise einführen wie in der Nr. 335 (S. 279) für die Gruppe $\bar{\vartheta}$, sagen:

Diejenigen Operationen von Ω, deren Gewicht bei Zugrundelegung der Basis (6) eine gerade Zahl ist, bilden die Gruppe $\mathfrak{O}$, wir bezeichnen sie typisch mit $\mathfrak{o}$ und nennen sie Operationen erster Art; dagegen bezeichnen wir die Operationen von Ω, deren Gewicht eine ungerade Zahl ist, mit ω und nennen dieselben Operationen zweiter Art.

Es ist dann stets

$$\omega z = {}'z, \qquad \mathfrak{o} z = z,$$

sofern z als complexer Zahlwerth betrachtet wird, dagegen ist der Punkt $\mathfrak{o}z$ als von dem Punkte z verschieden anzusehen. Wir veranschaulichen dies am besten, indem wir uns über der mit dem Schnitte $\bar{l}$ versehenen z-Ebene unendlich viele mit dieser Ebene congruente Blätter ausgebreitet denken, diese eindeutig den Operationen $\mathfrak{o}$ der Gruppe $\mathfrak{O}$ zuordnen und, der Bedeutung dieser Operationen als Umläufen entsprechend, längs der beiden Ufer der Theile von $\bar{l}$ aneinander heften.

Die von diesen Blättern gebildete Fläche ist dann ihrer Structur nach mit der in der Nr. 334 (S. 278) definirten Fläche T identisch; wir wollen dieselbe demgemäss auch hier mit T bezeichnen und

s jedes Blatt von T durch den Einheitskreis in zwei Halbblätter ·legt denken, ein inneres und ein äusseres. Diese Halbblätter tsprechen dann eindeutig den Operationen der Gruppe Ω.

Zufolge der in der Nr. 336 (S. 283) festgelegten Gestalt der emann'schen Fläche $\mathfrak{T}^1$, welche die Verzweigung der algebraischen nction ζ_1 von z versinnlicht, gehen die verschiedenen Zweige von ζ_1 s dem Hauptzweige $\zeta_1^{(0)}$ in folgender Weise durch die Operationen n Ω hervor.

Bezeichnen wir $\zeta_1^{(0)}$ als Function von z durch

$$\zeta_1^{(0)} = f_1(z),$$

ist

$$\zeta_1^{(\varkappa)} = f_1(\omega_\varkappa \omega_{\varkappa-1} z) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma+1;\ \omega_{\sigma+1} = \omega_0);$$

nn ferner z einen im Innern des Einheitskreises gelegenen Werth leutet, so haben wir

$$f_1(\omega_0 z) = f_1('z) = {}'\zeta_1^{(\sigma+1)},$$

$$f_1(\omega_\varkappa z) = {}'\zeta_1^{(\varkappa)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma),$$

d demgemäss

$$|f_1(z)| < 1, \qquad |f_1(\omega_\varkappa z)| < 1 \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma).$$

rner ist offenbar für $\varkappa \neq \lambda$

$$f_1(\omega_\varkappa \omega_\lambda \omega_\varkappa z) = f_1(\omega_\varkappa \omega_\lambda \cdot \omega_\varkappa \cdot \omega_\lambda \omega_\varkappa \cdot \omega_\varkappa \omega_\lambda \omega_\varkappa \cdot \omega_\varkappa z)$$

d folglich

$$f_1(\omega_\varkappa \omega_\lambda \omega_\varkappa z) = (f_1(z)).$$

zeichnen wir also die Operationen

$$\omega_\varkappa \omega_\lambda \omega_\varkappa \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots \sigma;\ \lambda \neq \varkappa)$$

der durch das Schema (23) der Nr. 335 (S. 279) fixirten Reihen- ge durch

$$\omega_0^1, \omega_1^1, \cdots \omega_{\sigma_1}^1$$

die aus diesen Operationen als Basis gebildete Gruppe mit Ω^1, so wandelt sich $\zeta_1^{(0)}$ durch Anwendung einer Operation zweiter Art von in seinen harmonischen Werth und bleibt bei Anwendung einer Ω^1 enthaltenen Operation erster Art ungeändert.

Die Beziehung zwischen den Gruppen Ω und Ω^1 ist dann genau elbe wie die, welche zwischen den oben betrachteten Gruppen ϑ und besteht; wir haben also insbesondere

$$\Omega = \Omega^1(1, \omega_0, \omega_1, \cdots \omega_\sigma).$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{O}^1$ die aus den Operationen erster Art von Ω^1 gebildete ausgezeichnete Untergruppe von Ω^1, so bleibt der Zweig

$$\zeta_1^{(0)} = f_1(z)$$

bei den Operationen von $\mathfrak{O}^1$ ungeändert, während der Zweig

$$\zeta_1^{(\varkappa)} = f_1(\omega_\varkappa \omega_{\varkappa-1} z)$$

bei den Operationen der Gruppe

(10) $$\omega_{\varkappa-1}\omega_\varkappa \mathfrak{O}^1 \omega_\varkappa \omega_{\varkappa-1},$$

die aus $\mathfrak{O}^1$ durch Transformation mit der Operation $\omega_\varkappa \omega_{\varkappa-1}$ hervorgeht, ungeändert bleibt.

343. Untersuchung und neue Definition der betrachteten algebraischen Function.

Betrachten wir nun die algebraische Gleichung $(\sigma+2)$-ten Grades, der ζ_1 als Function von z Genüge leistet, so hat dieselbe nach den Ergebnissen der Nr. 337 (S. 290) die Form

(11) $$\Phi_1(\zeta_1, z) = \zeta_1^{\sigma+2} + (c^1_{\sigma+1} z + \hat{c}^1_{\sigma+1})\zeta_1^{\sigma+1} + \cdots + (c_1^{\,1} z + \hat{c}_1^{\,1})\zeta_1 + c_0^{\,1} z = 0;$$

ihre Discriminante in Bezug auf ζ_1 lautet

$$\Delta_1(z) = \prod_{\varkappa=0}^{\sigma+1} \Phi_1'(\zeta_1^{(\varkappa)}, z),$$

wo Φ_1' die erste partielle Ableitung von Φ_1 nach ζ_1 bedeutet, $\Delta_1(z)$ ist also eine ganze rationale Function vom Grade $2(\sigma+1)$ in z.

Da sich (Nr. 336, S. 283) im Punkte $z = a_\varkappa$ die

$$\zeta_1^{(0)}, \zeta_1^{(\varkappa-1)}, \zeta_1^{(\varkappa)}$$

ineinander verzweigen und (vergl. Nr. 336, S. 286) daselbst den gemeinsamen Werth

$$a^1_{(\varkappa-1)\sigma+1}$$

annehmen, so bestehen die Gleichungen

$$\Phi_1(a^1_{(\varkappa-1)\sigma+1}, a_\varkappa) = 0, \quad \Phi_1'(a^1_{(\varkappa-1)\sigma+1}, a_\varkappa) = 0, \quad \Phi_1''(a^1_{(\varkappa-1)\sigma+1}, a_\varkappa) = 0,$$

wo Φ_1'' die zweite partielle Ableitung von Φ_1 nach ζ_1 bedeutet, und $\Delta_1(z)$ enthält demgemäss den Factor $(z - a_\varkappa)$ zur zweiten Potenz. Wir haben also

$$(12) \qquad \varDelta_1(z) = c \prod_{\varkappa=1}^{\sigma+1} (z - a_\varkappa)^2,$$

wo c eine von z unabhängige Grösse bedeutet.

Da die Discriminante einer algebraischen Gleichung in ζ_1 zufolge der ihr innewohnenden Invarianteneigenschaft bei linearer Transformation dieser Variabeln, abgesehen von einer Potenz der Transformationsdeterminante, ungeändert bleibt, so ist für jede der in der Nr. 337 (S. 288) definirten algebraischen Functionen Z_1 von z die zugehörige Discriminante, abgesehen von einem constanten Factor, mit $\varDelta_1(z)$ identisch, so dass also die Form (12) der Discriminante für die ganze Classe der algebraischen Functionen Z_1 charakteristisch ist.

Die Discriminante $\varDelta(z)$ der allgemeinen algebraischen Function Z_1 ist eine homogene Function $2(\sigma+1)$-ten Grades der Coefficienten

$$C_\varkappa z + D_\varkappa \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma+2)$$

der Gleichung, welcher Z_1 als Function von z Genüge leistet. Wenn wir also $\varDelta(z)$ nach Potenzen von z ordnen, so erscheint diese Discriminante als ganze Function $2(\sigma+1)$-ten Grades von z, deren Coefficienten homogen in den $2(\sigma+3)$ Grössen

$$C_\varkappa,\ D_\varkappa \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots \sigma+2)$$

sind. Die Gleichung (12) liefert also, indem wir auf beiden Seiten derselben die Coefficienten gleich hoher Potenzen von z miteinander vergleichen, $2\sigma+3$ Gleichungen, aus denen die Grössen $C_\varkappa$, $D_\varkappa$ als Functionen der

$$a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_{\sigma+1}$$

und dreier willkürlicher Parameter bestimmt werden können. Unter den Lösungssystemen dieser Gleichungen giebt es dann eines und nur eines, für welches die Gleichung

$$\sum_{\varkappa=0}^{\sigma+2} (C_\varkappa z + D_\varkappa) Z_1^\varkappa = 0$$

eine Function Z_1 von z definirt, welche die durch die Gestalt der Riemann'schen Fläche $\mathfrak{T}^1$ festgelegte Art der Verzweigung besitzt. Wir gewinnen auf diese Weise eine rein algebraische Bestimmung für die bisher nur auf Grund der Riemann'schen Existenztheoreme definirte Function Z_1 von z.

In der Umgebung von $z = a_\varkappa$ besitzen die Zweige

$$\zeta_1^{(0)},\ \zeta_1^{(\varkappa-1)},\ \zeta_1^{(\varkappa)}$$

die gemeinsame Entwickelung

$$(13)\qquad a^{1}_{(\varkappa-1)\sigma+1} + a_1^{(\varkappa)}(z-a_\varkappa)^{\frac{1}{3}} + a_2^{(\varkappa)}(z-a_\varkappa)^{\frac{2}{3}} + \cdots,$$

während die übrigen Zweige der algebraischen Function ζ_1 von z nach positiven ganzen Potenzen von $z - a_\varkappa$ entwickelbar sind.

Wir wollen uns nun die Abbildung der Riemann'schen Fläche $\mathfrak{T}^1$ auf die Ebene der complexen Variabeln ζ_1 construirt denken. Nach den Ergebnissen der Nr. 336 (S. 285) haben wir dann die ζ_1-Ebene durch die der Peripherie des Einheitskreises der z-Ebene entsprechenden Curvenzüge in $2(\sigma+1)$ Parzellen zerlegt, die den Halbblättern der Fläche $\mathfrak{T}^1$ entsprechen und zur einen Hälfte innerhalb, zur anderen Hälfte ausserhalb des Einheitskreises der ζ_1-Ebene liegen. Wir bezeichnen den dem inneren Halbblatte 0 von $\mathfrak{T}^1$ entsprechenden Bereich von ζ_1 mit $\gamma_1^{(0)}$; derselbe ist dann von $(\sigma+1)$ ganz innerhalb des Einheitskreises verlaufenden Curven begrenzt, die die Peripherie des Einheitskreises in den Punkten

$$a_1^{1},\ a^{1}_{\sigma+1},\ a^{1}_{2\sigma+1},\ \cdots\ a^{1}_{\sigma^2+1}$$

treffen, und zwar schliessen in jedem dieser Punkte die daselbst zusammenstossenden Curvenbogen der Begrenzung von $\gamma_1^{(0)}$ untereinander und mit der Peripherie des Einheitskreises den Winkel $\frac{\pi}{3}$ ein, da sich die entsprechenden Curvenstücke der z-Ebene in $a_\varkappa$ unter dem Winkel π schneiden, und für die sich in $a_\varkappa$ verzweigenden Zweige von ζ_1 in der Umgebung von $z = a_\varkappa$ die Entwickelung (13) gültig ist.

Durch Anwendung der Operationen

$$\omega_0,\ \omega_1,\ \cdots\ \omega_\sigma$$

auf z verwandelt sich der Bereich $\gamma_1^{(0)}$ in die den äusseren Halbblättern

$$0,\ 1,\ \cdots\ \sigma$$

von $\mathfrak{T}^1$ entsprechenden Bereiche der ζ_1-Ebene, die wir mit

$$\gamma_1^{(0,0)},\ \gamma_1^{(0,1)},\ \cdots\ \gamma_1^{(0,\sigma)}$$

bezeichnen und die mit $\gamma_1^{(0)}$ zusammengenommen das ganze Innere des Einheitskreises schlicht und lückenlos erfüllen. Die Spiegelbilder der $\sigma+2$ Bereiche

$$(14)\qquad \gamma_1^{(0)},\ \gamma_1^{(0,\varkappa)} \qquad (\varkappa=0,1,2,\cdots\sigma)$$

in Bezug auf den Einheitskreis der ζ_1-Ebene entsprechen dann dem äusseren und inneren Halbblatte $\sigma+1$ und den inneren Halbblättern $0, 1, \cdots \sigma$; diese bleiben für uns ausser Betracht.

Fassen wir die Gesammtheit der einem der Bereiche (14) angehörenden ζ_1-Werthe ins Auge, so können wir diese Gesammtheit einen **Halbzweig** der Function ζ_1 von z nennen; wir behalten für den dem Bereiche $\gamma_1^{(0)}$ entsprechenden Halbzweig die Bezeichnung $\zeta_1^{(0)}$ bei, während die den Bereichen $\gamma_1^{(0,\varkappa)}$ entsprechenden Halbzweige mit $\zeta_1^{(0,\varkappa)}$ bezeichnet werden sollen. Der Halbzweig $\zeta_1^{(0)}$ besitzt (Nr. 342, S. 307) die Eigenschaft, bei Anwendung einer Operation erster Art der Gruppe Ω^1 auf z ungeändert zu bleiben und bei Anwendung einer Operation zweiter Art dieser Gruppe in seinen harmonischen Werth überzugehen. Die analoge Eigenschaft kommt dann dem Halbzweige $\zeta_1^{(0,\varkappa)}$ in Bezug auf die Operationen der Gruppe

$$\Omega_\varkappa^{\ 1} = \omega_\varkappa \Omega^1 \omega_\varkappa$$

zu.

Wir bezeichnen die Gesammtheit der den Gruppen

$$\Omega^1,\ \Omega_0^{\ 1},\ \Omega_1^{\ 1},\ \cdots \Omega_\sigma^{\ 1}$$

gemeinsam angehörenden Operationen mit T^1, dann ist (vergl. Nr. 331, S. 266) T^1 eine ausgezeichnete Untergruppe mit endlichem Quotienten von Ω^1 und enthält offenbar die Gesammtheit aller Operationen, die den Gruppen

$$\mathfrak{O}^1,\ \omega_{\varkappa-1}\omega_\varkappa \mathfrak{O}^1 \omega_\varkappa \omega_{\varkappa-1} \qquad (\varkappa=1, 2, \cdots \sigma+1)$$

gleichzeitig angehören, als ausgezeichnete Untergruppe T^1 in sich.

Bilden wir eine zu der Gleichung (11) gehörige empfindliche Function V^1, so können wir diese Function so einrichten, dass sie bei den in T^1 enthaltenen Operationen zweiter Art in ihren harmonischen Werth übergeht, während sie bei den Operationen erster Art von T^1 ungeändert bleibt. Da dann jeder Zweig der algebraischen Function ζ_1 von z rational durch V^1 und z darstellbar ist, so haben wir, wenn z einen innerhalb des Einheitskreises gelegenen Werth bezeichnet,

$$\zeta_1^{(0)} = R_1^{(0)}(V^1, z)$$

$$\zeta_1^{(0,\varkappa)} = R_1^{(0,\varkappa)}('V^1, 'z) \qquad (\varkappa=0, 1, \cdots \sigma),$$

wo $R_1^{(0)}$, $R_1^{(0,\varkappa)}$ rationale Functionen andeuten.

344. Der Algorithmus algebraischer Functionen, und independente Definition dieser Functionen.

Da der Hauptzweig $\zeta_1^{(0)}$ der algebraischen Function ζ_1 durch die Operationen (9) der Nr. 342 (S. 307), die ja eine Basis der Gruppe Ω^1 bilden, in seinen harmonischen Werth verwandelt wird, so kommt diesen Operationen in Bezug auf die ζ_1-Ebene, die wir uns durch einen die Punkte

$$a_1^1,\ a_2^1,\ \cdots\ a_{\sigma_1+1}^1$$

verbindenden, längs der Peripherie des Einheitskreises gelegten Schnitt zerschnitten denken, eine ähnliche Bedeutung zu, wie den Operationen (6) der Nr. 342 (S. 306) in Bezug auf die z-Ebene. Wir können demnach aus den soeben für ζ_1 abgeleiteten Resultaten sofort die analogen für ζ_λ gültigen Ergebnisse erschliessen, wenn wir beachten, dass ζ_λ aus $\zeta_{\lambda-1}$ auf analoge Weise gebildet ist, wie ζ_1 aus z.

Als Function von $\zeta_{\lambda-1}$ genügt ζ_λ einer algebraischen Gleichung von der Form

$$(15)\qquad \overline{\Phi}_\lambda(\zeta_\lambda,\ \zeta_{\lambda-1}) = \sum_{\varkappa=0}^{\sigma_{\lambda-1}+2} (\bar{c}_\varkappa^{\,\lambda}\zeta_{\lambda-1} + \bar{\bar{c}}_\varkappa^{\,\lambda})\,\zeta_\lambda^\varkappa = 0,$$

woselbst

$$\bar{c}^{\,\lambda}_{\sigma_{\lambda-1}+2} = 0,\quad \bar{\bar{c}}^{\,\lambda}_{\sigma_{\lambda-1}+2} = 1,\quad \bar{\bar{c}}_0^{\,\lambda} = 0,\quad |\,\bar{c}_0^{\,\lambda}\,| = 1$$

ist, und deren Discriminante in Bezug auf ζ_λ, abgesehen von einem constanten Factor, durch das Quadrat des Ausdruckes

$$(\zeta_{\lambda-1} - a_1^{\lambda-1})(\zeta_{\lambda-1} - a_2^{\lambda-1})\cdots(\zeta_{\lambda-1} - a^{\lambda-1}_{\sigma_{\lambda-1}+1})$$

gegeben wird. Die

$$(16)\qquad a_1^{\lambda-1},\ a_2^{\lambda-1},\ \cdots\ a^{\lambda-1}_{\sigma_{\lambda-1}+1}$$

sind dabei nichts anderes wie die Werthe, welche $\zeta_{\lambda-1}$ in den Punkten

$$a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_{\sigma+1}$$

der z-Ebene annimmt; diese Werthe (16) liegen also auf der Peripherie des Einheitskreises der $\zeta_{\lambda-1}$-Ebene, und wir wollen uns dieselben stets so geordnet denken, dass dem

$$\zeta_{\lambda-1} = a_1^{\lambda-1}$$

der Werth $z = a_1$ entspricht, und dass die Punkte (16) auf der Peripherie des Einheitskreises so aufeinander folgen, wie die wachsenden

Zahlen auf dem Zifferblatte einer Uhr (vgl. Nr. 336, S. 286). Die Art der Verzweigung der Function ζ_λ von $\zeta_{\lambda-1}$ wird durch eine Riemann'sche Fläche $\mathfrak{T}^\lambda$ gegeben, die über der $\zeta_{\lambda-1}$-Ebene mit den Punkten (16) als Verzweigungsstellen in analoger Weise aufgebaut ist, wie $\mathfrak{T}^1$ über der z-Ebene mit den Verzweigungsstellen

$$a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}.$$

Die Gleichung, der ζ_λ als Function von z Genüge leistet, hat die Form

$$\Phi_\lambda(\zeta_\lambda, z) = \sum_{\varkappa=0}^{N_\lambda} (c_\varkappa^\lambda z + \partial_\varkappa^\lambda)\zeta_\lambda^\varkappa = 0, \tag{17}$$

wo (vergl. Nr. 338, S. 295)

$$N_\lambda = (\sigma + 2)\prod_{\varkappa=1}^{\lambda-1}(\sigma_\varkappa + 2)$$

ist. Die Verzweigungspunkte dieser Gleichung sind

$$z = a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1},$$

und zwar fallen in jedem dieser Punkte genau $2\delta_\lambda$ einfache Verzweigungspunkte zusammen, wenn

$$\delta_\lambda = \sum_{i=0}^{\lambda-1}\prod_{\varkappa=0}^{i}(\sigma_\varkappa^2 - 1) + 1 = \frac{N_\lambda - 1}{\sigma + 1}$$

gesetzt wird. Die Discriminante von (17) in Bezug auf ζ_λ ist eine ganze rationale Function vom Grade $2(N_\lambda - 1)$ in z, sie hat demnach die Form

$$\Delta_\lambda(z) = c_\lambda \prod_{\varkappa=1}^{\sigma+1}(z - a_\varkappa)^{2\delta_\lambda}, \tag{18}$$

wo c_λ eine von z unabhängige Grösse bedeutet. Die Verzweigung der algebraischen Function ζ_λ von z wird durch eine über der z-Ebene auszubreitende Riemann'sche Fläche $\mathfrak{S}^\lambda$ bestimmt, die durch Superposition der Flächen

$$\mathfrak{T}^1, \mathfrak{T}^2, \cdots \mathfrak{T}^\lambda$$

entstanden und ohne Mühe herzustellen ist.

Denken wir uns die Discriminante Δ_λ der Gleichung (17) gebildet und nach Potenzen von z geordnet, so sind die Coefficienten der einzelnen z-Potenzen ganze rationale homogene Functionen $(2N_\lambda - 2)^{\text{ten}}$ Grades der $2(N_\lambda + 1)$ Grössen

$$c_\varkappa^\lambda, \partial_\varkappa^\lambda \quad (\varkappa = 0, 1, \cdots N_\lambda). \tag{19}$$

Wenn wir dann in der Gleichung (18) auf beiden Seiten die Coefficienten gleich hoher Potenzen von z miteinander vergleichen, so erhalten wir $2N_\lambda - 1$ Gleichungen, aus denen wir die Grössen (19) als Functionen der $a_1, a_2, \ldots a_{\sigma+1}$ und noch dreier willkürlicher Parameter berechnen können. Unter den Lösungssystemen dieser Gleichungen giebt es dann eines und nur eines, für welches die Gleichung (17) eine algebraische Function von z definirt, die sich in der durch die Riemann'sche Fläche $\mathfrak{S}^\lambda$ bestimmten Weise verzweigt. Diese Function enthält also noch drei willkürliche Constanten. Bei der von uns zu benützenden Function ζ_λ ist über diese drei Constanten in geeigneter Weise verfügt (vergl. Nr. 337, S. 290, Nr. 340, S. 299).

Betrachten wir den Hauptzweig $\overset{0}{\zeta}_\lambda$ der Function ζ_λ von z (vergl. Nr. 339, S. 295), und seien

$$h_1^\lambda, h_2^\lambda, \cdots h_{\sigma+1}^\lambda$$

die Werthe, die dieser Zweig in den Punkten $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ der z-Ebene annimmt, dann gilt in der Umgebung des Punktes $z = a_\varkappa$ für $\overset{0}{\zeta}_\lambda$ eine Entwickelung von der Form

$$h_\varkappa^{(\lambda)} + \alpha_1^{(\varkappa)}(z - a_\varkappa)^{\frac{1}{3^\lambda}} + \alpha_2^{(\varkappa)}(z - a_\varkappa)^{\frac{2}{3^\lambda}} + \cdots, \tag{20}$$

wo $\alpha_1^{(\varkappa)}$ jedenfalls von Null verschieden ist. Denken wir uns nun die Riemann'sche Fläche $\mathfrak{S}^\lambda$, welche die Verzweigung der algebraischen Function ζ_λ versinnlicht, auf die ζ_λ-Ebene abgebildet, so erhalten wir, entsprechend den einzelnen Halbblättern dieser Fläche, einfach zusammenhängende Gebiete, die durch die der Peripherie des Einheitskreises der z-Ebene entsprechenden Curvenzüge von einander getrennt werden und die ζ_λ-Ebene schlicht und lückenlos erfüllen. Das Gebiet $\gamma_\lambda^{(0)}$, welches die Abbildung des innerhalb des Einheitskreises befindlichen Theiles des dem Zweige $\overset{0}{\zeta}_\lambda$ entsprechenden Blattes 0 der Fläche $\mathfrak{S}^\lambda$ liefert, ist zu Folge der für die Function ζ_λ getroffenen Festsetzungen (vergl. Nr. 339, S. 295) ganz innerhalb des Einheitskreises der ζ_λ-Ebene gelegen, nur seine Ecken $h_1^\lambda, h_2^\lambda, \cdots h_{\sigma+1}^\lambda$ befinden sich auf der Peripherie dieses Kreises, während seine Seiten krumme Linien sind, die sich zufolge der in der Umgebung des Punktes $z = a_\varkappa$ gültigen Entwickelung (20) in den Eckpunkten unter dem Winkel

$$\frac{\pi}{3^\lambda}$$

schneiden und in eben diesen Eckpunkten mit der Peripherie des Einheitskreises den Winkel

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3^2} + \cdots + \frac{\pi}{3^\lambda} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{3^\lambda}\right) \tag{21}$$

einschliessen.

345. Untersuchung der algebraischen Functionen mit Hülfe der Gruppen von ω-Operationen.

Die Beziehungen der Operationen unserer Gruppe Ω zu der Function ζ_λ gestalten sich nunmehr zu Folge des zwischen den Gruppen Ω und $\overline{\vartheta}$ bestehenden holoedrischen Isomorphismus und mit Rücksicht auf die Ergebnisse der Nr. 338 (S. 293) wie folgt.

Betrachten wir die Operationen

$$\omega_i^{\lambda-1}\omega_\varkappa^{\lambda-1}\omega_i^{\lambda-1} \qquad (i, \varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma_{\lambda-1};\ i \neq \varkappa),$$

wo die $\omega_i^{\lambda-1}$ aus den $\omega_i^{\lambda-2}$ in ähnlicher Weise gebildet sind, wie diese aus den $\omega_i^{\lambda-3}$ u. s. w., endlich die ω_i^2 aus den ω_i^1 in ähnlicher Weise, wie diese letzteren aus den ω_i (Nr. 342, S. 307) und setzen den Hauptzweig $\overset{0}{\zeta}_\lambda$ als Function von z aufgefasst gleich

$$\overset{0}{\zeta}_\lambda = f_\lambda(z),$$

so ist, wenn wir uns z. B. z als einen im Innern des Einheitskreises gelegenen Werth denken,

$$f_\lambda(\omega_i^{\lambda-1}\omega_\varkappa^{\lambda-1}\omega_i^{\lambda-1}z) = '(f_\lambda(z)),$$

und zwar geht $\overset{0}{\zeta}_\lambda$, wenn auf z die Operation

$$\omega_i^{\lambda-1}\omega_\varkappa^{\lambda-1}\omega_i^{\lambda-1}$$

angewandt wird, auf einem Wege, der die Peripherie des Einheitskreises zwischen zwei bestimmten der Punkte

$$a_1^\lambda,\ a_2^\lambda, \cdots a_{\sigma_\lambda+1}^\lambda,$$

etwa a_ϱ^λ und $a_{\varrho+1}^\lambda$ überschreitet, nach seinem harmonischen Werthe $'\overset{0}{\zeta}_\lambda$. Dem entsprechend setzen wir

$$\omega_i^{\lambda-1}\omega_\varkappa^{\lambda-1}\omega_i^{\lambda-1} = \omega_\varrho^\lambda$$

und bemerken, dass die Zahl ϱ durch das Zahlenpaar $i, \varkappa$ eindeutig bestimmt ist, und dass verschiedenen Zahlenpaaren $i, \varkappa$ auch stets verschiedene Zahlen ϱ entsprechen.

Bilden wir dann aus den Operationen

$$\omega_\varrho^\lambda \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \cdots \sigma_\lambda),$$

die offenbar der Gleichung

$$\omega_\varrho^\lambda \omega_\varrho^\lambda = 1$$

genügen, als Basis eine Gruppe Ω^λ, so ist diese mit der in der Nr. 338 (S. 294) definirten Gruppe $\overline{\vartheta}^\lambda$ holoedrisch isomorph, und die Gleichung

$$(22) \qquad \Omega = \Omega^\lambda \cdot P_\lambda$$

drückt demnach die Beziehung zwischen den Gruppen Ω und Ω^λ aus, wenn wir (vergl. a. a. O.) unter P_λ das symbolische Product

$$(23) \quad P_\lambda = \left(1, \omega_0^{\lambda-1}, \cdots \omega_{\sigma_{\lambda-1}}^{\lambda-1}\right)\left(1, \omega_0^{\lambda-2}, \cdots \omega_{\sigma_{\lambda-2}}^{\lambda-2}\right) \cdots (1, \omega_0, \omega_1, \cdots \omega_\sigma)$$

verstehen. Irgend eine Operation ω von Ω ist demnach in der Form

$$\omega = \omega^\lambda \cdot \tau$$

darstellbar, wo ω^λ eine Operation von Ω^λ und τ eine in P_λ enthaltene Operation bedeutet.

Uebertragen wir die in der Nr. 338 (S. 294) für die daselbst betrachteten Substitutionen Σ eingeführte Indexbezeichnung auf die Operationen ω, so haben wir (vergl. (35), a. a. O.), falls ω^λ nicht die identische Operation ist, die Ungleichung

$$\overline{\text{Ind}}_0\, \omega > \overline{\text{Ind}}_\lambda\, \omega^\lambda + \lambda - 1,$$

so dass also alle Operationen ω von Ω, für welche

$$\overline{\text{Ind}}_0\, \omega \leq \lambda - 1$$

ist, nothwendig in P_λ enthalten sein müssen.

Die Gruppe Ω^λ hat dann offenbar die Eigenschaft, dass die Function

$$\overset{0}{\zeta}_\lambda = f_\lambda(z)$$

durch die in Ω^λ enthaltenen Operationen erster Art ungeändert bleibt und durch die Operationen zweiter Art von Ω^λ in ihren harmonischen Werth übergeführt wird, dagegen verwandeln die Operationen von P_λ den Hauptzweig $\overset{0}{\zeta}_\lambda$ in andere Zweige der Function ζ_λ von z.

Bezeichnen wir wieder ähnlich wie für $\lambda = 1$ den durch die Gesammtheit der Punkte des Bereiches $\gamma_\lambda^{(0)}$ dargestellten Halbzweig der Function ζ_λ mit $\zeta_\lambda^{(0)}$ und setzen, wenn

$$u = \omega_{x_1}\omega_{x_2}\cdots\omega_{x_\mu}, \qquad \mu = \overline{\mathrm{Ind}}_0\, u,$$

;end eine Operation von P_λ bedeutet, den durch Anwendung dieser
›eration auf z aus $\zeta_\lambda^{(0)}$ entstehenden Halbzweig gleich

$$\zeta_\lambda^{(0,\, x_1,\, x_2,\, \cdots x_\mu)},$$

erfüllen die Werthe dieser N_λ Halbzweige die Bereiche

$$\gamma_\lambda^{(0,\, x_1,\, x_2,\, \cdots x_\mu)},$$

e das Innere des Einheitskreises der ζ_λ-Ebene schlicht und lückenlos
decken. Für $u = 1$ ist natürlich

$$\gamma_\lambda^{(0,\, x_1,\, x_2,\, \cdots x_\mu)} = \gamma_\lambda^{(0)}.$$

›r Halbzweig

$$\zeta_\lambda^{(0,\, x_1,\, x_2,\, \cdots x_\mu)}$$

hört dann ebenso zu der Gruppe

$$u^{-1}\Omega^\lambda u = \Omega^\lambda_{(x_1,\, x_2,\, \cdots x_\mu)},$$

.e $\zeta_\lambda^{(0)}$ zu Ω^λ gehört.

Wir heben noch hervor, dass aus einem innerhalb des Einheits-
eises gelegenen Werthe $\zeta_\lambda^{(0)}$ durch Anwendung der Operationen von
ı stets Werthe hervorgehen, die ebenfalls im Innern des Einheits-
eises gelegen sind. Der Uebergang vom Innern nach dem Aeussern
əses Kreises wird nur durch Operationen von Ω^λ vermittelt.

Es werde nun ähnlich wie für $\lambda = 1$ die Gesammtheit aller der-
nigen Operationen betrachtet, die den N_λ Gruppen

$$\Omega^\lambda,\ \Omega^\lambda_{(x_1,\, x_2\, \cdots\, x_\mu)}$$

ımeinsam angehören; diese Gesammtheit bildet eine ausgezeichnete
ntergruppe mit endlichem Quotienten von Ω, die wir mit T^λ bezeich-
ın, und in welcher offenbar die Gesammtheit derjenigen Operationen
ster Art, bei deren Anwendung die sämmtlichen Zweige der Func-
›n ζ_λ ungeändert bleiben, als ausgezeichnete Untergruppe T^λ enthalten
;. Bilden wir dann eine zu der Gleichung (17) gehörige empfindliche
ınction V^λ, so kann diese so eingerichtet werden, dass sie bei An-
əndung der Operationen zweiter Art von T^λ in ihren harmonischen
'erth übergeht, während sie bei Anwendung der in T^λ enthaltenen
perationen erster Art ungeändert bleibt. Jeder Zweig der algebrai-
hen Function ζ_λ von z ist dann rational durch V^λ und z darstellbar;
ir haben also, wenn z einen innerhalb des Einheitskreises gelegenen
'erth bedeutet:

$$\zeta_\lambda^{(0)} = R_\lambda^{(0)}(V^\lambda, z),$$

und

(24) $$\zeta_\lambda^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu)} = R_\lambda^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu)}(V^\lambda, z)$$

beziehungsweise

(24a) $$\zeta_\lambda^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu)} = R_\lambda^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu)}('V^\lambda, 'z),$$

jenachdem μ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, d. h. jenachdem der Halbzweig

$$\zeta_\lambda^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu)}$$

einem innerhalb beziehungsweise ausserhalb des Einheitskreises gelegenen Halbblatte der Riemann'schen Fläche $\mathfrak{S}^\lambda$ entspricht. Die R_λ bedeuten die Algorithmen rationaler Functionen.

Fünftes Kapitel.

346. Untersuchung der Eigenschaften der beiden Grenzfunctionen.

Wir sind nunmehr im Besitze der Hülfsmittel, deren wir bedürfen, um in die Natur der in der Nr. 341 (S. 303) für Werthe von z, die innerhalb des Einheitskreises liegen, definirten Grenzfunction

$$\overset{0}{\eta} = \lim_{\lambda} \zeta_{\lambda}^{(0)} = \lim_{\lambda} \overset{0}{\zeta}_{\lambda}$$

volle Einsicht zu gewinnen. Zunächst ist klar, dass diejenigen Eigenschaften der Function ζ_{λ}, die für jeden Werth des Index λ bestehen, auch für die Grenzfunction η, die aus $\overset{0}{\eta}$ durch analytische Fortsetzung hervorgeht, erhalten bleiben, so dass also diese Grenzfunction keine anderen Verzweigungsstellen besitzen kann, wie die Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$$

der z-Ebene. Wir haben für jeden z-Werth, der innerhalb des Einheitskreises gelegen ist, einen wohlbestimmten Werth $\overset{0}{\eta}$ der Grenzfunction definirt; die Gesammtheit dieser $\overset{0}{\eta}$-Werthe constituirt demnach einen Halbzweig der Grenzfunction, den wir mit $\eta^{(0)}$ bezeichnen und der sich durch Anwendung der Operation ω_{x} auf z in einen dem ausserhalb des Einheitskreises gelegenen Gebiete der z-Ebene entsprechenden Halbzweig $\eta^{(0,x)}$ verwandelt. Dadurch ist nun zunächst die Fortsetzung der Grenzfunction η nach dem Aeussern des Einheitskreises der z-Ebene vollzogen.

Ebenso wie $\zeta_{\lambda}^{(0)}$ zu der Gruppe Ω^{λ} gehört, wird der Halbzweig $\eta^{(0)}$ der Grenzfunction zu der Gruppe

$$\lim_{\lambda} \Omega^{\lambda} = \Omega^{\infty}$$

gehören. Ferner folgt aus der für $|z| < 1$ bestehenden Ungleichung (Nr. 339, S. 295)

$$|\zeta_{\lambda}^{(0)}| < |\zeta_{\lambda-1}^{(0)}| < \cdots < |z|,$$

dass für Werthe von z, die dem Innern des Einheitskreises angehören auch

$$|\eta^{(0)}| < 1$$

sein muss, und durch einfache Grenzbetrachtungen erhellt, dass $\eta^{(0)}$ durch Anwendung der Operationen von

$$P_\infty = \lim_\lambda P_\lambda$$

auf z in diejenigen Halbzweige der Grenzfunction η übergeführt wird, die innerhalb des Einheitskreises der η-Ebene gelegen sind und deren Werthevorrath das Innere dieses Einheitskreises schlicht und lückenlos erfüllt. Da nun (Nr. 345, S. 316) aber, wenn

$$\overline{\mathrm{Ind}}_0\, \omega \leqq \lambda - 1$$

ist, die Operation ω nothwendig in P_λ vorkömmt, so folgt, dass wie gross auch für eine Operation ω von Ω der Werth von

$$\overline{\mathrm{Ind}}_0\, \omega$$

sein mag, die ganze positive Zahl Λ stets so gross gewählt werden kann, dass ω in allen

$$P_{\lambda+\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots)$$

enthalten ist, wenn λ grösser ist wie Λ. Es enthält also P_∞ sämmtliche in Ω vorkommende Operationen und offenbar auch keine anderen, d. h. es ist

$$P_\infty = \Omega,$$

und folglich gemäss der Gleichung (22) der Nr. 345 (S. 316)

$$\lim_\lambda \Omega^\lambda = \Omega_\infty = 1\,.$$

Wir schliessen hieraus, dass $\eta^{(0)}$ durch Anwendung aller Operationen von Ω nur in solche Halbzweige verwandelt werden kann, deren Werthevorrath dem Innern des Einheitskreises der η-Ebene angehört, d. h.:

Die Grenzfunction η hat die Eigenschaft, dass sie keine analytische Fortsetzung nach dem ausserhalb des Einheitskreises gelegenen Gebiete der η-Ebene gestattet.

Es ist also für jeden von $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ verschiedenen Werth von z

$$|\eta| < 1,$$

dagegen ist für die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$

$$|\zeta_\lambda| = 1,$$

und folglich auch

$$|\eta| = 1\,.$$

Wir bezeichnen das Gebiet der η-Ebene, welches von der Gesammtheit der Werthe des Halbzweiges $\eta^{(0)}$ erfüllt wird, durch $\gamma^{(0)}$; dann ist $\gamma^{(0)}$ ganz im Innern des Einheitskreises gelegen, nur die den Punkten $z = a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ entsprechenden Werthe

$$\varepsilon_\varkappa = \lim_\lambda h_\varkappa^\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1)$$

(vergl. Nr. 344, S. 314) befinden sich auf der Peripherie dieses Kreises. Die Seiten von $\gamma^{(0)}$ sind Curvenbogen, die den Punkten der Peripherie des Einheitskreises der z-Ebene entsprechen; dieselben schneiden sich (vergl. a. a. O.) in den Eckpunkten $\varepsilon_\varkappa$ unter dem Winkel

$$\lim_\lambda \frac{\pi}{3^\lambda} = 0$$

und bilden in eben diesen Punkten mit der Peripherie des Einheitskreises der η-Ebene den Winkel

$$\lim_\lambda \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{3^\lambda}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Wir bezeichnen den aus $\eta^{(0)}$ durch Anwendung der Operation

$$\omega = \omega_{\varkappa_1} \omega_{\varkappa_2} \cdots \omega_{\varkappa_\mu}$$

von $\mathfrak{L}$ auf z hervorgehenden Halbzweig der Grenzfunction η mit

$$\eta^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu)}$$

und das von dem Werthevorrathe dieses Halbzweiges erfüllte Gebiet der η-Ebene durch

$$\gamma^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu)};$$

dann befinden sich alle diese Gebiete, wie bereits bemerkt, innerhalb des Einheitskreises der η-Ebene und erfüllen diesen Kreis schlicht und lückenlos.

Hieraus schliessen wir sofort, dass z eine allenthalben eindeutige Function von η ist, die nur für

$$|\eta| < 1$$

existirt, und wir erhalten auch eine Darstellung dieser eindeutigen Function, wenn wir in dem sich aus der Gleichung (17) der Nr. 344 (S. 313) ergebenden rationalen Ausdrucke von z durch ζ_λ

$$z = R_\lambda(\zeta_\lambda),$$

für welchen nach der Definition von ζ_λ die Gleichung

$$'z = R_\lambda('\zeta_\lambda)$$

besteht, mit λ zur Grenze übergehen. In der That ergiebt sich durch einfache Grenzbetrachtungen

$$z = \lim_{\lambda} R_{\lambda}(\zeta_{\lambda}) = \lim_{\lambda} R_{\lambda}(\eta) = F(\eta),$$

wo F den Algorithmus einer eindeutigen Function bedeutet.

Für die Grenzfunction $\tilde{\eta}$, die aus dem für Werthe von z, deren absoluter Betrag grösser als Eins ist, durch die Gleichung (2) der Nr. 341 (S. 303) definirten $\overset{\sigma+1}{\eta}$ durch analytische Fortsetzung entsteht, gelten die analogen Resultate wie für η selbst. Wenn dem Werthe H von η, wo also

$$|\mathsf{H}| < 1$$

ist, der Werth

$$Z = F(\mathsf{H})$$

entspricht, so entspricht dem zu H harmonischen Werthe $'\mathsf{H}$ von $\tilde{\eta}$ der zu Z harmonische Werth $'Z$ von z, und zwar ist

$$'Z = F('\mathsf{H}),$$

d. h. der Algorithmus F stellt für Werthe $\tilde{\eta}$ des Argumentes, deren absoluter Betrag grösser wie Eins ist, die ausserhalb des Einheitskreises existirende eindeutige Function z von $\tilde{\eta}$ dar, ebenso wie er für Werthe des Argumentes, deren absoluter Betrag kleiner wie Eins ist, die nur innerhalb des Einheitskreises definirte eindeutige Function z von η liefert.

347. Beziehungen zwischen den Halbzweigen und Zweigen der Grenzfunction.

Um nunmehr die Beziehung zwischen den verschiedenen Halbzweigen der Function η herstellen zu können, müssen wir diejenige Function V^{∞} heranziehen, die für η eine analoge Rolle spielt, wie die Function V^{λ} für ζ_{λ}.

Da die Gruppe Ω^{∞}, zu welcher $\eta^{(0)}$ gehört, nur aus der identischen Operation besteht, so gilt das Gleiche für die Gruppen

$$\omega^{-1}\Omega^{\infty}\omega,$$

zu denen die verschiedenen Halbzweige von η gehören. Also reducirt sich auch die Gesammtheit T^{∞} der allen diesen Gruppen gemeinsam angehörenden Operationen auf die identische Operation, und wir können demnach jeden Zweig der Function η selbst als Function V^{∞} ansehen. Bedeutet also

$$\eta^{(0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\nu)} = \eta^{(1)}$$

einen von

$$\eta^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu)} = \eta^{(2)}$$

rschiedenen Halbzweig der Function η, so folgt nach der Analogie r Gleichungen (24) und (24a) der Nr. 345 (S. 318), dass $\eta^{(1)}$ durch) und z beziehungsweise durch $'\eta^{(2)}$ und $'z$ eindeutig dargestellt werden nn, jenachdem

$$\nu \equiv \mu \,(\mathrm{mod}\ 2),$$

ziehungsweise

$$\nu \equiv \mu + 1 \,(\mathrm{mod}\ 2)$$

. Da nun z eine eindeutige Function von η ist, so stellt sich also) durch $\eta^{(2)}$ beziehungsweise $'\eta^{(2)}$, d. h. jeder Halbzweig von η durch len anderen oder dessen harmonischen Werth eindeutig dar. Hiers schliessen wir aber nach bekannten functionentheoretischen Sätzen, ss jeder Halbzweig eine lineare Function mit constanten Coefficienten n jedem anderen Halbzweige oder von dessen harmonischem Werthe n muss. In beiden Fällen müssen diese linearen Functionen die ripherie des Einheitskreises der η-Ebene in sich selbst transforren.

Insbesondere ist also jedes

$$\eta^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu)}$$

ıe lineare Function von $\eta^{(0)}$ oder von $'\eta^{(0)}$, jenachdem μ eine gerade er eine ungerade Zahl ist. Sei

$$\text{5)} \qquad \eta^{(0, \varkappa)} = \frac{\alpha_{\varkappa 1}\, '\eta^{(0)} + \alpha_{\varkappa 2}}{\alpha_{\varkappa 3}\, '\eta^{(0)} + \alpha_{\varkappa 4}},$$

nn ist für einen Punkt ζ der Seite $(\varepsilon_{\varkappa - 1}, \varepsilon_\varkappa)$, längs der die Gebiete) und $\gamma^{(0, \varkappa)}$ zusammenhängen,

$$\zeta = \frac{\alpha_{\varkappa 1}\, '\zeta + \alpha_{\varkappa 2}}{\alpha_{\varkappa 3}\, '\zeta + \alpha_{\varkappa 4}}.$$

eraus folgt nach einem wiederholt angewandten Schlussverfahren ergl. z. B. Nr. 268, S. 35 ff.) und mit Rücksicht auf die Eigenschaft r Substitution, die Peripherie des Einheitskreises ungeändert zu lassen, ss die Seite $(\varepsilon_{\varkappa-1}, \varepsilon_\varkappa)$ ein Kreisbogen ist, der den Einheitseis der η-Ebene in den Punkten $\varepsilon_{\varkappa-1}$, $\varepsilon_\varkappa$ unter rechtem inkel schneidet.

Damit ist also gezeigt, dass die Grenzfunction η die Abbildung s Kreisbogenpolygons mit verschwindenden Winkeln

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_{\sigma+1}),$$

dessen Seiten den Einheitskreis unter rechtem Winkel schneiden, auf das Innere des Einheitskreises der z-Ebene liefert, und aus dem Satze der Nr. 320 (S. 232) folgt nunmehr, dass wie in der Nr. 341 (S. 302) behauptet wurde, in der That die Function z von η eine Fuchs'sche ist, die nur innerhalb des Einheitskreises der η-Ebene existirt und die auf der Peripherie des Einheitskreises der z-Ebene beliebig vorgeschriebenen Werthe $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ auslässt.

Von einer Fuchs'schen Function, die beliebig vorgeschriebene, auf der Peripherie des Einheitskreises gelegene Werthe auslässt, kann man durch eine linear gebrochene Transformation leicht zu einer Fuchs'schen Function gelangen, die beliebig vorgeschriebene reale Werthe auslässt; wir haben also in der That das zu Beginn der Nr. 329 (S. 258) in Aussicht genommene Ziel erreicht, d. h. es ist gezeigt, dass sich in der Differentialgleichung (1) der Nr. 325 (S. 246), wenn die daselbst mit $a_1, a_2, \ldots a_{\sigma+1}$ bezeichneten singulären Punkte real und die $g_1, g_2, \cdots g_{\sigma+1}$ sämmtlich unendlich gross sind, die Coefficienten der ganzen Function $E_{\sigma-2}(z)$ als reale Grössen stets und (gemäss dem Satze der Nr. 327) nur auf eine Weise so bestimmen lassen, dass die unabhängige Variable z eine eindeutige Fuchs'sche Function des Integralquotienten η wird.

348. Betrachtung des allgemeinen Falles beliebiger nicht auf dem Einheitskreise gelegener singulärer Punkte.

Wir wenden uns nun zu der Untersuchung des allgemeinen Falles, wo in der normalen Differentialgleichung (1) der Nr. 325 (S. 246) die $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ beliebige, nicht sämmtlich reale (oder auf einer Kreisperipherie gelegene) Werthe, und die $g_1, g_2, \cdots g_{\sigma+1}$ nicht sämmtlich unendlich gross, sondern irgendwelche positive ganze Zahlen sind, die der Ungleichung (4) der Nr. 326 (S. 249) Genüge leisten. Es wird sich dann mit Hülfe der in den vorhergehenden Nummern erlangten Resultate zeigen lassen, dass (vergl. Nr. 326, S. 252) stets eine der Differentialgleichung (1) subordinirte normale Differentialgleichung gefunden werden kann, in der sich über die noch unbestimmt bleibenden Parameter so disponiren lässt, dass diese Differentialgleichung eine Fuchs'sche wird.

Mögen unter den gegebenen Grössen

$$(1) \qquad a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$$

gewisse, etwa $a_1, a_2, \cdots a_\lambda$ real sein; unter den übrigen

$$a_{\lambda+1}, \cdots a_{\sigma+1}$$

mögen sich gewisse Paare von conjugirten complexen Grössen befinden; sollten dann noch complexe Grössen unter den $a_\varkappa$ vorhanden sein, deren conjugirte in der Reihe der $a_\varkappa$ nicht mit enthalten ist, so fügen wir diese conjugirten dem Tableau (1) einfach hinzu. Die so erweiterte Reihe möge lauten

(2) $$a_1, a_2, \cdots a_\lambda, \quad a_{\lambda+1}, \cdots a_{\tau+1}, \quad \bar{a}_{\lambda+1}, \cdots \bar{a}_{\tau+1},$$

wo also für $\varkappa = \lambda + 1, \cdots \tau + 1$, $\bar{a}_\varkappa$ die zu $a_\varkappa$ conjugirte complexe Grösse bedeutet. Wenn die Zahl

$$1 + \tau - \lambda = q$$

gleich Null ist, d. h. wenn in der Reihe (2) nur reale Grössen vorkommen, so ist die Existenz einer Fuchs'schen Function, die die Werthe (2) auslässt, bewiesen. Wir zeigen nun, dass, wenn die Existenz einer Fuchs'schen Function als feststehend angesehen wird, die ein System von Werthen auslässt, welches $q - 1$ Paare conjugirter complexer Grössen enthält, auch eine Fuchs'sche Function construirt werden kann, die das Werthesystem (2) auslässt, in welchem die Anzahl der Paare conjugirter complexer Grössen gleich q ist.

Bilden wir zu diesem Ende die ganze rationale Function $2q$ten Grades

(3) $$\varphi(x) = (x - a_{\lambda+1})(x - \bar{a}_{\lambda+1}) \cdots (x - a_{\tau+1})(x - \bar{a}_{\tau+1}),$$

so sind die Coefficienten derselben, wenn wir uns nach Potenzen von x geordnet denken, reale Grössen. Die Ableitung $\varphi'(x)$ von $\varphi(x)$ ist von ungeradem $(2q - 1)$-ten Grade, die Gleichung

(4) $$\varphi'(x) = 0$$

besitzt demnach mindestens eine reale Wurzel. Bezeichnen wir also die Wurzeln der Gleichung (4) durch

$$c_1, c_2, \cdots c_{2q-1},$$

so befinden sich unter denselben höchstens $(q - 1)$ Paare conjugirter complexer Grössen. Demnach enthält auch das Tableau

(5) $$0, \varphi(a_1), \cdots \varphi(a_\lambda), \varphi(c_1), \varphi(c_2), \cdots \varphi(c_{2q-1})$$

höchstens $(q - 1)$ Paare conjugirter complexer Grössen, wir können folglich gemäss unserer Voraussetzung eine Fuchs'sche Function $F(\eta)$ bestimmen, die nur innerhalb des Einheitskreises der η-Ebene existirt, innerhalb des Fundamentalbereiches jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt und die Werthe (5) auslässt.

Setzen wir nun

$$\varphi(x) = F(\eta), \tag{6}$$

so ist zunächst leicht einzusehen, dass x eine eindeutige Function von η ist. Die Function x von η könnte nämlich nur für solche Werthe von η eine Verzweigung erfahren, für welche die Ableitung $\varphi'(x)$ von $\varphi(x)$ verschwindet; für einen solchen η-Werth müsste aber

$$F(\eta) = \varphi(c_i)$$

sein, wo i eine der Zahlen $1, 2, \cdots 2q-1$ bedeutet, und das ist [illegible]t nicht möglich, da $F(\eta)$ die Werthe (5) auslassen sollte. Ferner kann [illegible] die durch die Gleichung (6) definirte Function x von η keinen der [illegible] Werthe

$$a_i \qquad {\scriptstyle (i=1, 2, \cdots \lambda)}$$

annehmen, da sonst $F(\eta)$ gleich dem entsprechenden $\varphi(a_i)$ sein müsste [illegible]t und ebensowenig kann x einen der Werthe

$$a_i, \ \bar{a}_i \qquad {\scriptstyle (i=\lambda+1, \cdots \tau+1)}$$

erhalten, da sonst $F(\eta)$ verschwinden müsste.

Setzen wir

$$F(\eta) = z, \quad y_1 = \sqrt{\frac{dz}{d\eta}}, \quad y_2 = \eta\sqrt{\frac{dz}{d\eta}},$$

so bilden, da z eine Fuchs'sche Function von η sein sollte, die y_1, [illegible] y_2 ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dz^2} = p(z)\,y, \tag{7}$$

worin $p(z)$ eine rationale Function von z bedeutet. Die singulär[illegible]ren Punkte dieser Differentialgleichung sind die Stellen (5), und die dete[illegible]er-minirende Fundamentalgleichung eines jeden dieser Punkte besitzt ei[illegible]ine doppelte Wurzel. Nun ist aber

$$\frac{dx}{d\eta} = \frac{1}{\varphi'(x)}\frac{dz}{d\eta};$$

wenn wir also in der Differentialgleichung (7) die Substitution

$$y = \sqrt{\varphi'(x)}\,u,$$
$$z = \varphi(x)$$

machen, so verwandelt sich (vergl. die Gleichungen (10), (11) [illegible] der Nr. 181, Bd. II, 1, S. 189) diese Differentialgleichung in

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \left\{p(\varphi(x))\,\varphi'(x)^2 + \varDelta\binom{z}{x}\right\}u, \tag{8}$$

aus welcher sich x als Function von η durch Umkehrung des Quotienten der Elemente

$$u_1 = \sqrt{\frac{dx}{d\eta}}, \quad u_2 = \eta \sqrt{\frac{dx}{d\eta}}$$

eines Fundamentalsystems ergiebt. Offenbar ist der Coefficient von u in (8) eine rationale Function von x, wir schliessen also, dass x eine Fuchs'sche Function des Integralquotienten η sein muss, die innerhalb des Fundamentalbereiches jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt.

Die singulären Punkte der Differentialgleichung (8) sind offenbar diejenigen Werthe von x, für welche $z = \varphi(x)$ einen der Werthe (5) annimmt, d. h. also erstens die Punkte (2) und zweitens die von diesen Punkten verschiedenen Lösungen der Gleichungen

$$\varphi(x) = \varphi(a_i) \quad (i=1, 2, \cdots \lambda),$$
$$\varphi(x) = \varphi(c_i) \quad (i=1, 2, \cdots 2\varrho-1),$$

die wir durch

(9) $$b_1, b_2, \cdots b_\varkappa$$

bezeichnen wollen. Für jeden dieser singulären Punkte besitzt die determinirende Fundamentalgleichung von (8) eine doppelte Wurzel, die Function x von η lässt also die Werthe (2) und die Werthe (9) aus.

Offenbar ist die Differentialgleichung (8) der normalen Differentialgleichung (1) der Nr. 325 (S. 246), von der wir zu Beginn dieser Nummer ausgegangen waren, subordinirt, die Behauptung, die wir daselbst aufgestellt hatten, ist also bewiesen. Genauer ausgesprochen haben wir den Satz:

Wenn beliebige reale oder complexe Werthe

$$a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$$

gegeben sind, so lässt sich stets eine Fuchs'sche Function finden, die diese gegebenen Werthe und überdies noch gewisse andere nicht gegebene Werthe auslässt, nur innerhalb des Einheitskreises existirt und innerhalb des Fundamentalbereiches (dessen sämmtliche Ecken auf der Peripherie des Einheitskreises liegen) jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt.

349. Zusammenfassung der bisher erlangten Resultate.

Durch diesen Satz ist also das am Schlusse der Nr. 326 (S. 252) in Aussicht genommene Ziel erreicht, d. h. es kann, wenn eine beliebige Function

$$Y = F(z)$$

der complexen Variabeln z gegeben ist, die nur eine endliche Anzahl von Verzweigungspunkten besitzt und die in der durch einen die Verzweigungspunkte unter einander verbindenden Schnitt zerschnittenen z-Ebene eindeutig ist, ein Parameter η so gefunden werden, dass z als Fuchs'sche Function von η und Y als eindeutige Function von η erscheint (vergl. Nr. 326, S. 251).

Wir haben gesehen, dass sich auf Grund der in den Nummern 334, 335 (S. 275 ff.) behandelten Untergruppe einer aus lauter parabolischen Substitutionen erzeugten Fuchs'schen Gruppe mit symmetrischem Fundamentalbereiche eine Function η von z herstellen lässt, die als Grenzfunction gewisser algebraischer Functionen erscheint und deren Umkehrung eine Fuchs'sche Function liefert, die eine endliche Anzahl beliebig vorgeschriebener realer (oder auf der Peripherie eines Kreises gelegener) Werthe auslässt. In ähnlicher Weise kann die in den Nummern 332, 333 (S. 268 ff.) betrachtete Untergruppe einer aus lauter parabolischen Substitutionen erzeugten Fuchs'schen Gruppe mit nicht symmetrischem Fundamentalbereiche dazu benutzt werden, einen Algorithmus von algebraischen Functionen der Variabeln z aufzustellen, dessen Grenzfunction η so beschaffen ist, dass ihre Umkehrung eine Fuchs'sche Function liefert, die eine endliche Anzahl beliebig vorgeschriebener, willkürlich (d. h. nicht auf einer Kreisperipherie) in der z-Ebene gelegener Werthe auslässt. Wir gehen auf eine Ausführung dieses Verfahrens nicht ein, da uns die in der vorigen Nummer erlangten Ergebnisse einen für die Zwecke, die wir im Auge haben, ausreichenden Ersatz für dasselbe bieten, sondern wollen jetzt in eine genauere Betrachtung der Integrationsmethode für eine lineare homogene Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit rationalen Coefficienten eintreten, die aus der Anwendung des Poincaré'schen Princips entspringt.

Siebzehnter Abschnitt.

Theorie der Fuchs'schen Zetafunctionen.

Erstes Kapitel.

350. Integration einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten auf Grund des Poincaré'schen Princips.

Wenn es sich um eine lineare Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten handelt, deren Ordnungszahl keiner Beschränkung unterliegt, so kann man dieselbe mit Hülfe der in der Nr. 61 (Bd. I, S. 218) angegebenen Reductionsmethode auf eine lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten zurückführen; wir dürfen uns demnach für die allgemeinen Betrachtungen, denen wir uns jetzt zuwenden, auf die Behandlung von linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten beschränken.

Sei

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x)y = 0 \tag{1}$$

eine vorgelegte lineare Differentialgleichung, deren Coefficienten rationale Functionen von x sind, die nur in den Punkten

$$a_1, a_2, \cdots a_\varrho, \quad b_1, b_2, \cdots b_\tau$$

unendlich werden. Die Bezeichnung denken wir uns so gewählt, dass die Punkte

$$b_1, b_2, \cdots b_\tau$$

die ausserwesentlich singulären und diejenigen wesentlich singulären Stellen bedeuten, in deren Umgebung das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) nur wie eine rationale Function unendlich wird, dann sind also die Stellen

$$a_1, a_2, \cdots a_\varrho, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

die einzigen Verzweigungspunkte oder Unbestimmtheitsstellen der Integrale von (1).

Bilden wir nun eine normale Differentialgleichung zweiter Ordnung (Nr. 326, S. 249)

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \tilde{q}(x) v, \tag{2}$$

deren singuläre Punkte die

$$a_1, a_2, \cdots a_\varrho, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

sind und die so beschaffen ist, dass für $\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho, \sigma + 1$ die Differenz $\delta_\varkappa$ der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung, die zu $x = a_\varkappa$ gehört, im Allgemeinen gleich Null ist; nur wenn $a_\varkappa$ kein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale der Differentialgleichung (1) ist, wenn überdies die Entwickelungen dieser Integrale in der Umgebung von $x = a_\varkappa$ keine Logarithmen enthalten und die Wurzeln der zu $a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von (1) rationale Zahlen sind, kann $\delta_\varkappa$ gleich dem grössten aliquoten Theile der Einheit gewählt werden, als dessen ganzzahlige Multipla sich diese rationalen Zahlen darstellen lassen. Nach den Ergebnissen des vorhergehenden Abschnittes kann dann jedenfalls eine der Differentialgleichung (2) subordinirte Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = q(x) u \tag{2a}$$

gefunden werden, in welcher die unabhängige Variable x eine nur im Innern des Einheitskreises existirende Fuchs'sche Function $x = f(\eta)$ des Integralquotienten η ist, die die Werthe

$$a_1, a_2, \cdots a_\varrho, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

und eventuell noch gewisse andere Werthe

$$a_{\varrho+1}, \cdots a_\sigma$$

auslässt. Zufolge des Poincaré'schen Princips ist dann das allgemeine Integral y der Differentialgleichung (1) eine eindeutige Function von η.

Denken wir uns in die Differentialgleichung (1) die Grösse η als neue unabhängige Variable eingeführt, so nimmt diese Differentialgleichung die Gestalt an

$$\frac{d^n y}{d\eta^n} + \varphi_1(\eta) \frac{d^{n-1} y}{d\eta^{n-1}} + \cdots + \varphi_n(\eta) y = 0, \tag{1a}$$

wo die Coefficienten $\varphi_1(\eta), \varphi_2(\eta), \cdots \varphi_n(\eta)$ eindeutige Functionen von η sind, die nur für

$$\eta \mid < 1$$

existiren. Wenn wir die Differentialgleichung (1) durch Multipli-

cation mit einer geeignet gewählten ganzen rationalen Function auf die Form

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n y = 0$$

bringen, wo die $P_\varkappa$ ganze rationale Functionen von x bedeuten und P_0 nur für die singulären Stellen der Differentialgleichung verschwindet, so ist

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n y}{d\eta^n} \frac{1}{[f'(\eta)]^n} - n_2 \frac{d^{n-1} y}{d\eta^{n-1}} \frac{f''(\eta)}{[f'(\eta)]^{n+1}} - \cdots;$$

die Differentialgleichung mit der unabhängigen Variabeln η nimmt folglich nach Multiplication mit $[f'(\eta)]^{2n-1}$ die Gestalt an (vergl. Nr. 124, Bd. I, S. 458)

$$[f'(\eta)]^{n-1} P_0(f(\eta)) \frac{d^n y}{d\eta^n} + \cdots = 0.$$

Die Ableitung $f'(\eta)$ der Fuchs'schen Function $x = f(\eta)$ kann nur für Werthe von η, die auf dem Einheitskreise liegen, gleich Null oder Unendlich werden, ebenso liegen diejenigen η-Werthe, denen die x-Werthe

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \quad a_{\sigma+1}$$

entsprechen, auf der Peripherie des Einheitskreises. Die Differentialgleichung (1a) besitzt also innerhalb des Existenzbereiches ihrer Coefficienten nur diejenigen η-Werthe als singuläre Stellen, denen die x-Werthe

$$b_1, b_2, \cdots b_\tau$$

entsprechen. In der Umgebung dieser η-Werthe besitzt das allgemeine Integral von (1a) den Charakter einer rationalen Function; wenn wir insbesondere voraussetzen, dass die $b_\varkappa$ nur ausserwesentliche singuläre Punkte der Differentialgleichung (1) sind (ein Fall, auf den sich der allgemeine stets durch Multiplication von y mit einer ganzen rationalen Function von x zurückführen lässt), so sind die entsprechenden η-Werthe auch ausserwesentlich singuläre Punkte der Differentialgleichung (1a). Dann sind also die Integrale der letzteren Differentialgleichung für

$$|\eta| < 1$$

holomorph und folglich in ihrem ganzen Existenzbereiche nach positiven ganzen Potenzen von η entwickelbar; und zwar erhalten wir, wenn der Punkt $\eta = 0$ keine der ausserwesentlich singulären Stellen von (1a) ist, für das allgemeine Integral eine Entwickelung, deren n erste Coefficienten willkürliche Constanten sind. Die folgenden Coefficienten ergeben sich mittelst Recursionsformeln, wenn die Coefficienten der

Differentialgleichung (1a) bekannt sind; um diese herzustellen bedarf es nur der Kenntniss der Function $x = f(\eta)$ und diese kann, wenn die $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ gegeben sind, nach der in dem vorhergehenden Abschnitte behandelten Methode stets als Grenzfunction rationaler Functionen gefunden werden.

Wir haben also auf diese Weise eine Integrationsmethode für eine beliebige lineare Differentialgleichung (1) mit rationalen Coefficienten, die uns gestattet, abhängige und unabhängige Variable als beständig (d. h. für alle Werthe des Existenzbereiches) convergente, nach positiven ganzen Potenzen der Hülfsvariabeln η fortschreitende Reihen

$$y = c_0 + c_1 \eta + \cdots,$$
$$x = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \eta + \cdots$$

darzustellen, und dieses Reihenpaar liefert uns für Werthe von η, die innerhalb des Einheitskreises liegen, alle regulären Stellen des analytischen Gebildes (x, y).

351. Charakter der Integrale einer Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe als Functionen des Parameters η.

Wenn wir das Verhalten des allgemeinen Integrales der Differentialgleichung (1) bei Umläufen der unabhängigen Variabeln x untersuchen wollen, so haben wir auf η die Substitutionen der Gruppe der Fuchs'schen Function $x = f(\eta)$ anzuwenden.

Um die Untersuchung gleich in der vollen Allgemeinheit zu führen, denken wir uns, es sei die Differentialgleichung (2a) irgend eine der Differentialgleichung (2) subordinirte Fuchs'sche Differentialgleichung (Nr. 326, S. 249), so dass also nicht nothwendig die Differenzen $\delta_\varkappa$ der Wurzeln aller zu (2a) gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen gleich Null sind. Dann ist nach wie vor sowohl x als auch y eine nur für $|\eta| < 1$ existirende eindeutige Function von η; wenn wir uns also ein Fundamentalsystem

$$y_1, y_2, \cdots y_n$$

von (1) gegeben denken, so ist

$$y_i = \varphi_i(\eta) \qquad (i=1, 2, \cdots n),$$

wo $\varphi_i(\eta)$ eine nur für $|\eta| < 1$ definirte eindeutige Function von η bedeutet.

Sei ϑ die projective Monodromiegruppe der Fuchs'schen Differentialgleichung (2a), und denken wir uns auf η eine Substitution

$$S_\nu \eta = \frac{\alpha_\nu \eta + \beta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}$$

der Fuchs'schen Gruppe ϑ angewandt, d. h. lassen wir η auf einem innerhalb des Einheitskreises verlaufenden, sonst beliebigen Wege von dem Punkte η nach dem Punkte $S_\nu \eta$ gehen, so bleibt die Fuchs'sche Function $x = f(\eta)$ ungeändert, d. h. x vollzieht in seiner Ebene einen geschlossenen Weg. Die Integrale $[y_i]$ verwandeln sich demnach in lineare homogene Functionen ihrer selbst, d. h. sie erfahren eine lineare Substitution

$$[\bar{y}_i] = (\alpha_{i\varkappa}^{(\nu)})[y_i] = T_\nu [y_i] \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

der homogenen Monodromiegruppe Θ von (1). Offenbar wird zufolge der Art und Weise, wie wir die Differentialgleichung (2) eingerichtet haben, dadurch dass wir S_ν alle Substitutionen der Fuchs'schen Gruppe ϑ durchlaufen lassen, jede Substitution T_ν der Gruppe Θ zum Vorschein kommen; die Gruppen ϑ und Θ sind demnach isomorph, im Allgemeinen ist dieser Isomorphismus aber kein holoedrischer, sondern es entspricht der identischen Substitution von Θ eine gewisse ausgezeichnete Untergruppe E von ϑ.

Wir können also die analytische Beschaffenheit des Functionssystems $[y_i]$ von η in folgender Weise charakterisiren:

Die y_i sind eindeutige, nur für $|\eta| < 1$ existirende Functionen von η, die die Substitutionen einer gewissen linearen homogenen Gruppe Θ erfahren, wenn wir auf η die Substitutionen der Fuchs'schen Gruppe ϑ anwenden.

Diese Eigenschaften haben die $[y_i]$ offenbar mit jedem dem Fundamentalsysteme $[y_i]$ entsprechenden Fundamentalsysteme einer mit (1) zu derselben Art gehörigen Differentialgleichung gemein, und allgemeiner mit jedem System von Functionen, welches in der Form

$$A_0 y_i + A_1 \frac{dy_i}{dx} + \cdots + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y_i}{dx^{n-1}} \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

darstellbar ist, wo die $A_0, A_1, \cdots A_{n-1}$ eindeutige Functionen von x bedeuten. Um die y_i als Integrale einer linearen Differentialgleichung mit in x rationalen Coefficienten zu charakterisiren, müssen demnach noch weitere Eigenschaften dieser Grössen als Functionen von η angegeben werden, es sind dies Eigenschaften, die das Verhalten der y_i in der Nähe der Ecken des Fundamentalbereiches F_0 der Fuchs'schen Gruppe ϑ bestimmen.

Da sich der Behandlung des allgemeinen Falles, wo die Integrale von (1) an allen oder an einzelnen der Stellen

$$a_1, a_2, \cdots a_\varrho, \quad a_{\varrho+1}$$

unbestimmt werden, noch wesentliche Schwierigkeiten entgegenstellen, so wollen wir für das Folgende voraussetzen, dass die Differentialgleichung (1) der Fuchs'schen Classe angehört. Dann lässt sich das Verhalten der Integrale der Differentialgleichung (1a) in der Nähe der Eckpunkte des Fundamentalbereiches F_0 auf folgende Weise charakterisiren.

Betrachten wir zunächst den Fall einer im Innern des Einheitskreises gelegenen Ecke $\lambda_\varkappa$ von F_0 oder eines der mit F_0 congruenten Bereiche der Theilung des Einheitskreises (bei der allgemeinen Festsetzung, dass die Fuchs'sche Differentialgleichung (2a) irgend eine der Differentialgleichung (2) subordinirte sein soll, können solche Ecken in der That auftreten), dann gehört $\lambda_\varkappa$ einem gewissen Cyklus von Ecken an, in welchem die Winkelsumme gleich $2\pi\delta_\varkappa$ ist, wenn für $\eta = \lambda_\varkappa$ die Fuchs'sche Function x den Werth $a_\varkappa$ annimmt. Gemäss der Definition der normalen Differentialgleichung (2) besitzt dann die zum Punkte $a_\varkappa$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (1) lauter rationale Wurzeln

$$r_1, r_2, \cdots r_n,$$

die sämmtlich ganzzahlige Multipla

$$r_\nu = m_\nu \delta_\varkappa \qquad (\nu=1, 2, \cdots n)$$

von

$$\delta_\varkappa = \frac{1}{g_\varkappa}$$

sind, und die Entwickelungen der Elemente des zu $x = a_\varkappa$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ von (1) in der Umgebung von $x = a_\varkappa$ enthalten keine Logarithmen. Wir haben also

$$\mathfrak{y}_\nu = (x - a_\varkappa)^{\frac{m_\nu}{g_\varkappa}} \mathfrak{P}_\nu(x \mid a_\varkappa) \qquad (\nu=1, 2, \cdots n),$$

wo die $\mathfrak{P}_\nu$ nach positiven ganzen Potenzen von $x - a_\varkappa$ fortschreitende Reihen bedeuten.

Andererseits ist in der Umgebung von $x = a_\varkappa$

$$\frac{\eta - \lambda_\varkappa}{\eta - \lambda_\varkappa^0} = (x - a_\varkappa)^{\frac{1}{g_\varkappa}} \mathfrak{P}(x \mid a_\varkappa),$$

wo $\lambda_\varkappa^0$ den zu $\lambda_\varkappa$ harmonischen Werth, $\mathfrak{P}(x \mid a_\varkappa)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - a_\varkappa$ bedeutet, die für $x = a_\varkappa$ nicht verschwindet; wir haben also in der Umgebung von $\eta = \lambda_\varkappa$

$$x - a_\varkappa = (\eta - \lambda_\varkappa)^{\varrho_\varkappa}[\varepsilon_1 + \varepsilon_2(\eta - \lambda_\varkappa) + \cdots], \quad \varepsilon_1 \neq 0,$$

und folglich

$$(x - a_\varkappa)^{\frac{1}{\varrho_\varkappa}} = (\eta - \lambda_\varkappa)[\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2(\eta - \lambda_\varkappa) + \cdots].$$

Demnach ergiebt sich

$$\mathfrak{y}_\nu = (\eta - \lambda_\varkappa)^{m_\nu}\overline{\mathfrak{P}}_\nu(\eta \mid \lambda_\varkappa) \qquad (\nu=1, 2, \cdots n),$$

wo die $\mathfrak{P}_\nu$ gewöhnliche Potenzreihen von $\eta - \lambda_\varkappa$ bedeuten.

Da nun

$$y_i = c_{i1}\mathfrak{y}_1 + c_{i2}\mathfrak{y}_2 + \cdots + c_{in}\mathfrak{y}_n \qquad (i=1, 2, \cdots n)$$

ist, wo die $c_{i\nu}$ Constanten sind, für welche

$$|c_{i\nu}| \neq 0 \qquad (i, \nu=1, 2, \cdots n),$$

so erkennt man, dass die Functionen y_i in der Umgebung von $\eta = \lambda_\varkappa$ sich wie rationale Functionen verhalten.

Sei ferner $\eta = \lambda_\varkappa$ eine auf der Peripherie des Einheitskreises gelegene Ecke eines der mit F_0 congruenten Bereiche, dann lauten die Entwickelungen der Elemente des zu $x = a_\varkappa$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems der Differentialgleichung (1) allgemein wie folgt:

Bedeuten $r_1, r_2, \cdots r_q$ die von einander nicht um ganze Zahlen verschiedenen Wurzeln der zu $x = a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von (1), so lässt sich (Nr. 50, Bd. I, S. 174) bei geeigneter Wahl der $r_1, r_2, \cdots r_q$ die Gruppe der Integrale, die zu r_μ und den α_μ von r_μ um ganze Zahlen verschiedenen Wurzeln gehören, in der Form

$$\mathfrak{y}_{\mu l} = (x - a_\varkappa)^{r_\mu}\sum_{\lambda=0}^{l-1}\varphi_{l\lambda}(x \mid a_\varkappa)[\log(x - a_\varkappa)]^\lambda \qquad (l=1, 2 \cdots \alpha_\mu)$$

darstellen, wo die $\varphi_{l\lambda}$ gewöhnliche Potenzreihen von $x - a_\varkappa$ bedeuten und

$$\sum_{\mu=1}^{q}\alpha_\mu = n$$

ist. Für die Differentialgleichung (2a) ist $\lambda_\varkappa$ Doppelpunkt einer parabolischen Substitution der Gruppe ϑ, wir haben folglich in der Nähe von $\lambda_\varkappa$ für $x - a_\varkappa$ die Entwickelung

$$x - a_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty}\varepsilon_\lambda e^{\lambda t}, \qquad \varepsilon_1 \neq 0,$$

wo

$$t = \frac{\beta_x}{\eta - \lambda_x}$$

gesetzt wurde, und β_x eine wohlbestimmte Constante bedeutet.

Hiernach ist also

$$(x - a_x)^{r_\mu} = e^{r_\mu t}(\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 e^t + \cdots), \qquad \bar{\varepsilon}_1 \neq 0,$$

$$\log (x - a_x) = t(\delta_1 + \delta_2 e^t + \cdots), \qquad \delta_1 \neq 0,$$

und folglich

$$\mathfrak{y}_{\mu l} = e^{r_\mu t}\, \Phi_\mu(e^t) \sum_{\lambda=1}^{l-1} t^\lambda\, \Phi_{l\lambda}(e^t),$$

wo die Φ_μ, $\Phi_{l\mu}$ gewöhnliche Potenzreihen von e^t bedeuten.

Da nun jedes y_i als lineare homogene Function mit constanten Coefficienten der

$$\mathfrak{y}_{\mu l} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots q;\ l = 1, 2, \cdots \alpha_\mu)$$

darstellbar ist, ergeben sich für die y_i Entwickelungen von der Form

$$(\alpha) \qquad e^{r_1 t}\Phi_1 \cdot P_1 + e^{r_2 t}\Phi_2 \cdot P_2 + \cdots + e^{r_q t}\Phi_q \cdot P_q,$$

wo die $P_1, P_2, \cdots P_q$ ganze Functionen von t beziehungsweise von den Graden

$$\alpha_1 - 1, \quad \alpha_2 - 1, \cdots \alpha_q - 1$$

bedeuten, deren Coefficienten ebenso wie die $\Phi_1, \Phi_2, \cdots \Phi_q$ gewöhnliche Potenzreihen von e^t sind. Die Summe der Gradzahlen der P_l befriedigt die Gleichung

$$(\beta) \qquad \alpha_1 - 1 + \alpha_2 - 1 + \cdots + \alpha_q - 1 = n - q.$$

Wenn wir also in der linearen Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe (1) an Stelle von x den Integralquotienten η der Fuchs'schen Differentialgleichung zweiter Ordnung (2a) als neue unabhängige Variable einführen, so lässt sich ein Fundamentalsystem $[y_i]$ von Integralen der so entstehenden Differentialgleichung (1a) wie folgt charakterisiren:

Die $[y_i]$ sind eindeutige nur für $|\eta| < 1$ existirende Functionen von η, die die Substitutionen der Monodromiegruppe Θ von (1) erfahren, wenn auf η die Substitutionen der Fuchs'schen Gruppe ϑ ausgeübt werden. Diese eindeutigen Functionen zeigen in der Umgebung jeder im Innern des Einheitskreises der η-Ebene gelegenen Stelle das Verhalten rationaler Functionen und gestatten in der Nähe der auf der

Peripherie des Einheitskreises gelegenen Ecken der Bereiche der zu der Gruppe ϑ gehörigen Theilung Entwickelungen von der Form (α), wo die Grade der ganzen Function P_λ die Gleichung (β) befriedigen.

352. Analogie mit Problemen der Theorie der elliptischen Functionen. Fuchs'sche Zetafunctionen.

Der Process, durch welchen wir die Integrale der Differentialgleichung (1) als eindeutige Functionen eines eindeutig umkehrbaren Integralquotienten einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung dargestellt haben, hat in der Theorie der elliptischen Functionen sein Analogon.

Betrachtet man nämlich in dem elliptischen Integrale erster Gattung (vergl. Nr. 248, Bd. II, 1, S. 478)

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}}$$

die obere Grenze x als Function von u, so ist diese Function, d. h. also die Umkehrungsfunction von u, eine eindeutige

$$x = \sin \operatorname{am} u = \operatorname{sn} u$$

mit den Perioden $4K$ und $2K'i$, wo K, K' durch die Gleichungen (5) (a. a. O.) definirt werden. Wenn man die ebenfalls eindeutigen und doppeltperiodischen Functionen

$$\sqrt{1-x^2} = \operatorname{cn} u, \quad \sqrt{1-\varkappa^2 x^2} = \operatorname{dn} u$$

einführt, so ist

$$dx = \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u \cdot du,$$

und das Normalintegral zweiter Gattung (Nr. 250, Bd. II, 1, S. 485)

$$E(u) = \varkappa^2 \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}}$$

verwandelt sich durch Einführung von u als Integrationsvariable in

$$E(u) = \varkappa^2 \int_0^u \operatorname{sn}^2 u\,du.$$

Da für $x = 1$ das Integral u den Werth K erhält, lautet das complette Integral zweiter Gattung (a. a. O. S. 485)

$$E = \int_0^1 \frac{\varkappa^2 x^2\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} = \varkappa^2 \int_0^K \mathrm{sn}^2 u\, du;$$

durch Einführung von $\varkappa^2 x^2 = t$ verwandelt sich E in

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\varkappa^2} \frac{t\, dt}{\sqrt{t(t-1)(t-\varkappa^2)}}.$$

Wenn man nun mit Jacobi (Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, art. 47) die Function

$$(\gamma) \qquad Z(u) = \frac{E}{K} u - E(u)$$

in Betracht zieht, so ergiebt sich für das Integral zweiter Gattung die Darstellung

$$E(u) = \frac{E}{K} u - Z(u).$$

Setzt man dann in der Gleichung (γ) für $\mathrm{sn}^2 u$ die für diese Function von Jacobi (a. a. O. art. 41) gegebene Darstellung

$$\left(\frac{2\varkappa K}{\pi}\right)^2 \mathrm{sn}^2 u = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - \frac{2K}{\pi}\frac{2E}{\pi} - 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \cos\frac{n\pi u}{K},$$

wo q die in der Nr. 265 (S. 21) definirte Grösse bedeutet, so erhält man

$$Z(u) = \frac{4\pi}{2K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin\frac{n\pi u}{K}.$$

Die Function $Z(u)$ ist demnach eine eindeutige Function von u, das Gleiche gilt folglich gemäss der Gleichung (γ) für das Integral zweiter Gattung $E(u)$.

Vermehrt man u um $2K$, so bleibt $Z(u)$ ungeändert, und $E(u)$ verwandelt sich in

$$E(u+2K) = E(u) + 2E;$$

vermehrt man u um $2K'i$, so verwandelt sich $Z(u)$ in

$$Z(u+2K'i) = Z(u) - \frac{\pi i}{K},$$

und folglich $E(u)$ in

$$\begin{aligned} E(u+2K'i) &= \frac{E}{K}(u+2K'i) - Z(u) + \frac{\pi i}{K} \\ &= E(u) + \frac{1}{K}\{2EK'i + \pi i\}. \end{aligned}$$

Nun haben wir aber zufolge der Legendre'schen Relation (Nr. 250, Bd. II, 1, S. 485, Gleichung (23), vergl. Nr. 251, ebenda S. 491)

$$\frac{1}{K}\{2EK'i + \pi i\} = 2E'i,$$

wo

$$E'i = \varkappa^2 \int_1^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}},$$

oder, wenn wir wiederum $\varkappa^2 x^2 = t$ setzen,

$$E'i = \frac{1}{2}\int_{\varkappa^2}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-\varkappa^2)}},$$

der dem $K'i$ entsprechende aliquote Theil des zu $E(u)$ gehörigen Periodicitätsmoduls ist*). Es ergiebt sich demnach

$$E(u + 2K'i) = E(u) + 2E'i.$$

Wir sehen also, dass während das elliptische Integral zweiter Gattung $E(u)$ als Function von x keine eindeutige Umkehrung zulässt, durch Einführung des eindeutig inversiblen Integrales erster Gattung u als neuer unabhängiger Variabeln eine Function $E(u)$ von u resultirt, die eindeutig ist, und bei Vermehrung des Argumentes u um Perioden die entsprechenden Zuwüchse um Periodicitätsmoduln erfährt. Wir haben also in der That die analogen Verhältnisse, wie in dem Falle einer beliebigen linearen Differentialgleichung, deren Integrale sich durch Einführung des eindeutig umkehrbaren Integralquotienten η einer Differentialgleichung zweiter Ordnung in eindeutige Functionen von η verwandeln und die Substitutionen ihrer Monodromiegruppe erleiden, wenn auf η die Substitutionen der Fuchs'schen Gruppe angewandt werden, die die eindeutige Umkehrungsfunction von η ungeändert lassen.

Die Function $Z(u)$ ist selbst ein Integral zweiter Gattung, nämlich

$$Z(u) = \int_0^x \left(\frac{E}{K} - \varkappa^2 x^2\right) \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}};$$

da nun die Integrale der allgemeinen Differentialgleichung (1) zu der Fuchs'schen Function x von η in ähnlicher Beziehung stehen, wie die Function $Z(u)$ zu der Function $\operatorname{sn} u$, so nennt man nach Herrn Poincaré die Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ von (1) als Functionen von η Fuchs'sche Zetafunctionen (fonctions zétafuchsiennes).

*) Vergl. die Berichtigung zu Bd. II, 1, S. 487 ff. am Schlusse dieses Bandes.

353. Allgemeine Definition und Eigenschaften der Systeme Fuchs'scher Zetafunctionen.

Allgemein definiren wir ein System Fuchs'scher Zetafunctionen in folgender Weise:

Sei
$$\vartheta = (1,\ S_1,\ S_2,\ \cdots)$$
eine Fuchs'sche Gruppe von der in der Nr. 304 (S. 169 ff.) angegebenen Beschaffenheit, und nehmen wir wie gewöhnlich den Einheitskreis der η-Ebene als Orthogonalkreis; seien
$$Z_1,\ Z_2,\ \cdots\ Z_n$$
n innerhalb des Einheitskreises existirende eindeutige Functionen von η von der Beschaffenheit, dass sich jedes Z_i in eine lineare homogene Function der $Z_1,\ Z_2,\ \cdots\ Z_n$
$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{i\varkappa}^{(\nu)} Z_\varkappa$$
verwandelt, wenn η eine Substitution S_ν der Gruppe ϑ erfährt, dann bilden die Substitutionen
$$T_\nu = (\alpha_{i\varkappa}^{(\nu)}) \qquad (\nu = 0, 1, \cdots;\ S_0 = 1,\ T_0 = 1)$$
$$(i,\ \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$
eine mit ϑ isomorphe Gruppe Θ. Der analytische Charakter der Functionen Z_i werde dahin fixirt, dass sich diese Functionen innerhalb des Einheitskreises wie rationale Functionen verhalten und in der Nähe der auf der Peripherie des Einheitskreises gelegenen Ecken $\lambda_\varkappa$ der der Gruppe ϑ entsprechenden Theilung eine Darstellung von der Form (α) gestatten, wo die Gradzahlen der Polynome $P_1,\ \cdots\ P_q$ der Gleichung (β) Genüge leisten.

Ein so beschaffenes Functionssystem nennen wir ein System Fuchs'scher Zetafunctionen, welches zu der Fuchs'schen Gruppe ϑ und der Fuchs'schen Zetagruppe Θ, oder kurz zu den Gruppen ϑ und Θ gehört.

Ehe wir auf den Existenzbeweis für diese Functionen bei beliebiger Wahl der mit ϑ isomorphen Zetagruppe Θ eingehen, mögen noch einige Eigenschaften der Systeme Fuchs'scher Zetafunctionen hervorgehoben werden, die eine unmittelbare Folge ihrer Definition sind.

Zunächst ist evident, dass die in den Nummern 350, 351 betrachteten Fundamentalintegrale $y_1,\ \cdots\ y_n$ der linearen Differentialgleichung

der Fuchs'schen Classe (1), aufgefasst als Functionen des Integralquotienten η der Differentialgleichung (2a), ein System Fuchs'scher Zetafunctionen bilden, für welches die zugehörige Fuchs'sche Gruppe ϑ und die Zetagruppe Θ durch die projective beziehungsweise homogene Monodromiegruppe der Differentialgleichungen (2a) beziehungsweise (1) gegeben werden. Ebenso bilden aber auch die Elemente eines dem $[y_i]$ entsprechenden Fundamentalsystems einer beliebigen mit (1) zu derselben Art gehörigen linearen Differentialgleichung ein System zu den Gruppen ϑ, Θ gehöriger Fuchs'scher Zetafunctionen.

— Diese letztere Bemerkung gestattet eine Umkehrung, die wir gleich für ein beliebiges System Fuchs'scher Zetafunctionen beweisen wollen.

Sei $x = f(\eta)$ eine zu der vorgelegten Fuchs'schen Gruppe ϑ gehörige Fuchs'sche Function, die innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 von ϑ jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt, und sei

$$y_1, y_2, \cdots y_n$$

ein System Fuchs'scher Zetafunctionen, welches zu den Gruppen ϑ und Θ gehört. Betrachten wir die $[y_i]$ als Functionen von x, so haben wir uns zuvörderst die Abbildung des Fundamentalbereiches F_0 auf die x-Ebene zu construiren.

Wir denken uns der Einfachheit wegen den Fundamentalbereich F_0 von vornherein so gewählt, dass er in Bezug auf die Anordnung seiner Ecken und Seiten von derselben Beschaffenheit sei, wie der in der Nr. 211 (Bd. II, 1, S. 320) betrachtete Bereich F_0 (vergl. Nr. 304, S. 169 ff.) und behalten für die Ecken und Seiten von F_0 auch die gewohnten Bezeichnungen bei. Wenn dann

$$\lim_{\eta=\lambda_\varkappa} f(\eta) = a_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma),$$

$$\lim_{\eta=\lambda_{\sigma+1}} f(\eta) = \lim_{\eta=\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa)}} f(\eta) = a_{\sigma+1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma-1)$$

gesetzt wird, so sind die

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \quad a_{\sigma+1}$$

die singulären Punkte der linearen Differentialgleichung

$$\text{(II)} \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = q(x)\,u,$$

aus der die Fuchs'sche Function $x = f(\eta)$ durch Inversion des Integralquotienten entspringt.

Lassen wir η die Begrenzung von F_0 im positiven Sinne durchlaufen, so beschreibt x in seiner Ebene ein Liniensystem

$$l_1, l_2, \cdots l_\sigma,$$

welches den Punkt $a_{\sigma+1}$ mit den Punkten $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ verbindet (vergl. Nr. 215, Bd. II, 1, S. 340, insbesondere Fig. 9), und die durch dieses Liniensystem zerschnittene x-Ebene $\overline{T}$ ist die eindeutig conforme Abbildung des Fundamentalbereiches F_0.

Wenn x den Querschnitt $l_\varkappa$ so überschreitet, dass es vom positiven Ufer nach dem negativen Ufer übergeht, so erfährt η die Substitution $A_\varkappa \eta$ der Gruppe ϑ, die die Seite $s_\varkappa$ von F_0 in die Seite $s_\varkappa'$ verwandelt; die $[y_i]$ aufgefasst als Functionen von x erfahren also diejenige Substitution $\mathsf{A}_\varkappa$ der Gruppe Θ, die der Substitution $A_\varkappa$ von ϑ vermöge des zwischen ϑ und Θ bestehenden Isomorphismus entspricht. Allgemein erfahren die $[y_i]$, wenn x irgend einen geschlossenen Weg U in seiner Ebene beschreibt, diejenige Substitution T_ν der Gruppe Θ, die der Substitution $S_\nu \eta$ von ϑ entspricht, welche η durch den Umlauf U erleidet. Innerhalb $\overline{T}$ sind die $[y_i]$ eindeutige Functionen von x.

Da die $[y_i]$ eine lineare homogene Substitution erfahren, wenn η von F_0 nach einem anderen der mit F_0 vermöge der Substitutionen von ϑ congruenten Bereiche übergeht, so entspricht im Allgemeinen jeder innerhalb des Einheitskreises der η-Ebene gelegenen Unendlichkeitsstelle der $[y_i]$ eine Unendlichkeitsstelle von derselben Ordnung innerhalb F_0, und da ferner die $[y_i]$ als Functionen von η in der Umgebung jeder Stelle, die im Innern des Einheitskreises liegt, das Verhalten rationaler Functionen zeigen, so können dieselben im Innern des Fundamentalbereiches F_0 jedenfalls nur an einer endlichen Anzahl von Stellen von endlicher ganzzahliger Ordnung unendlich werden. Seien die diesen Unendlichkeitsstellen entsprechenden x-Werthe

$$b_1, b_2, \cdots b_\tau,$$

so befinden sich diese innerhalb der Fläche $\overline{T}$, und die $[y_i]$ verhalten sich an jeder von den $b_1, \cdots b_\tau$ verschiedenen und im Innern von $\overline{T}$ gelegenen Stelle regulär, während sie für

$$b_1, b_2, \cdots b_\tau$$

wie rationale Functionen unendlich werden, indem ja η in der Umgebung einer solchen Stelle $b_\varkappa$ nach positiven ganzen Potenzen von $x - b_\varkappa$ entwickelbar ist.

Das Verhalten der $[y_i]$ in der Umgebung der Stellen

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \quad a_{\sigma+1}$$

der x-Ebene ergiebt sich aus den in Bezug auf das Verhalten der

Fuchs'schen Zetafunctionen in der Nähe von Ecken des Fundamentalbereiches F_0 und der mit F_0 congruenten Bereiche getroffenen Festsetzungen durch Umkehrung der in der Nr. 351 (S. 334 ff.) angewandten Schlussweise. Man findet so ohne Weiteres, dass die Stellen $a_\varkappa$ für die $[y_i]$ keine Punkte der Unbestimmtheit sind. Wir haben also das Resultat:

Das System Fuchs'scher Zetafunctionen $[y_i]$ aufgefasst als Functionen von $x = f(\eta)$ hat die Eigenschaft, dass

1) die $[y_i]$ innerhalb der Fläche $\overline{T}$ eindeutig sind und nur an einer endlichen Anzahl von Stellen von endlicher ganzzahliger Ordnung unendlich werden,

2) die Verzweigungspunkte der $[y_i]$ unter den Punkten

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \quad a_{\sigma+1}$$

enthalten sind,

3) wenn x die Querschnitte $l_\varkappa$ der Fläche $\overline{T}$ überschreitet, die $[y_i]$ die linearen Substitutionen $\mathsf{A}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$ erleiden,

und umgekehrt ist jedes System von n Functionen der Variabeln x, welches diese drei Eigenschaften besitzt, ein System Fuchs'scher Zetafunctionen von η, das zu den Gruppen ϑ, Θ gehört.

Hieraus folgt sofort, dass die Ableitungen jeder Ordnung der $[y_i]$ nach x ebenfalls ein System Fuchs'scher Zetafunctionen bilden, das zu den Gruppen ϑ und Θ gehört, und dass das Gleiche von jedem Functionssysteme gilt, welches durch Gleichungen von der Form

$$\text{(A)} \qquad F_0 y_i + F_1 \frac{dy_i}{dx} + \cdots + F_p \frac{d^p y_i}{dx^p} \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

definirt wird, wo p eine beliebige ganze Zahl, $F_0, F_1, \cdots F_p$ Fuchs'sche Functionen von η, also rationale Functionen von x bedeuten.

354. Beziehungen zwischen Systemen Fuchs'scher Zetafunctionen, die zu denselben Gruppen gehören.

Betrachten wir allgemein $(n + 1)$ Systeme zu den Gruppen ϑ, Θ gehöriger Fuchs'scher Zetafunctionen

$$\begin{array}{llll} y_{11}, & y_{12}, & \cdots y_{1n}, \\ y_{21}, & y_{22}, & \cdots y_{2n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n+1,1}, & y_{n+1,2}, & \cdots y_{n+1,n} \end{array}$$

und definiren die n Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{n+1}$ durch das System linearer Gleichungen

$$\text{(III)} \qquad \varphi_1 y_{1i} + \varphi_2 y_{2i} + \cdots + \varphi_{n+1} y_{n+1,i} = 0 \qquad (i=1,2,\cdots n),$$

so sind die $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{n+1}$ proportional den aus dem rechteckigen Systeme

$$(\delta) \qquad (y_{\varkappa i}) \qquad (\varkappa=1,2,\cdots n+1;\ i=1,2,\cdots n)$$

gebildeten Determinanten n-ter Ordnung, falls das System (δ) vom Range n ist. — Wenn x den Querschnitt $l_\varkappa$ überschreitet, so erfährt jedes der Systeme

$$y_{\varkappa 1}, y_{\varkappa 2}, \cdots y_{\varkappa n}$$

die Substitution $\mathsf{A}_\varkappa$, jede der erwähnten $(n+1)$ Determinanten multiplicirt sich folglich mit der Determinante $|\mathsf{A}_\varkappa|$ dieser Substitution. Die n Quotienten dieser Determinanten sind also in der unzerschnittenen x-Ebene eindeutige Functionen von x, und da diese Functionen ebensowenig wie die $[y_{\varkappa i}]$ selbst Unbestimmtheitsstellen darbieten können, sind sie rationale Functionen von x und demnach Fuchs'sche Functionen von η. Die durch die Gleichungen (I) definirten Functionen

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{n+1}$$

sind also proportional gewissen wohlbestimmten rationalen Functionen von x, d. h. wir haben den Satz:

1) Je $(n+1)$ Systeme zu den Gruppen ϑ und Θ gehöriger Fuchs'scher Zetafunctionen von η befriedigen eine homogene lineare Beziehung von der Form (III), deren Coefficienten Fuchs'sche Functionen von η sind.

Falls das System (δ) von niedrigerem als dem n-ten Range ist, befriedigen die Functionssysteme nicht eine, sondern mehrere von einander unabhängige Beziehungen von der angegebenen Art.

Aus diesem Satze ziehen wir nun zwei wichtige Folgerungen (vergl. die ähnlichen Betrachtungen in den Nummern 163, 222, Bd. II, 1).

Zuvörderst betrachten wir das System $[y_i]$ Fuchs'scher Zetafunctionen und die Systeme der Ableitungen 1, 2, $\cdots$ n-ter Ordnung dieser Functionen nach x. Wenn dann, wie wir offenbar voraussetzen dürfen, zwischen den $[y_i]$ keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten besteht, so ist (Nr. 14, Bd. I, S. 38) die Determinante

$$(\varepsilon) \qquad \left|\frac{d^{\varkappa-1} y_i}{dx^{\varkappa-1}}\right| \neq 0 \qquad (i, \varkappa=1,2,\cdots n),$$

d. h. wir haben in den

$$\left(\frac{d^\varkappa y_i}{dx^\varkappa}\right) \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n; \quad i = 1, 2, \cdots n)$$

$+ 1)$ Systeme zu den Gruppen ϑ und Θ gehöriger Zetafunctionen, ɜ ein rechteckiges System vom Range n bilden. Diese Systeme be-edigen demnach eine homogene lineare Relation mit in x rationalen ›efficienten, und zwar ist der Coefficient der n-ten Ableitung zufolge r Ungleichung (ε) von Null verschieden. Hieraus folgt mit Rück-:ht auf die oben gefundenen Eigenschaften der $[y_i]$ der Satz:

2) Betrachtet man ein System Fuchs'scher Zetafunctionen, elches zu den Gruppen ϑ und Θ gehört, als Functionen einer . der Gruppe ϑ gehörigen Fuchs'schen Function, die inner-ılb des Fundamentalbereiches jeden Werth nur ein einziges al annimmt, so constituiren diese Functionen ein Funda-entalsystem einer linearen homogenen Differentialglei-ung n-ter Ordnung der Fuchs'schen Classe, die nebst den erthen

$$a_1, \; a_2, \cdots a_\sigma, \quad a_{\sigma+1},$$

e den Ecken des Fundamentalbereiches der Gruppe ϑ ent-rechen, nur noch ausserwesentlich singuläre Stellen oder lche wesentlich singuläre Stellen besitzen kann, wo die Inte-ale wie rationale Functionen unendlich werden. Die Mono-omiegruppe dieser Differentialgleichung ist die Gruppe Θ.

Bedeutet $[Z_i]$ ein beliebiges System zu den Gruppen ϑ und Θ höriger Zetafunctionen, so folgt durch Zusammenstellung dieses stems mit den n Systemen

$$\frac{d^\varkappa y_i}{dx^\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n-1; \quad i = 1, 2, \cdots n)$$

d mit Rücksicht auf den Satz 1) oder auch direct aus den Ergeb-ısen der Nummern 163, 165 (Bd. II, 1) und dem Satze 2) der Satz:

3) Systeme Fuchs'scher Zetafunctionen, die zu denselben ruppen ϑ, Θ gehören, befriedigen als Functionen von $x = f(\eta)$ ıfgefasst, Differentialgleichungen derselben Art,

oder mit anderen Worten:

Jedes System zu den Gruppen ϑ, Θ gehöriger Fuchs'-her Zetafunctionen ist durch ein solches System $[y_i]$ in der ›rm (A) darstellbar, wo die Zahl $p < n$ ist.

Zweites Kapitel.

355. Einführung der Reihen ξ und allgemeine Eigenschaften derselben.

Wir wenden uns nun zum Beweise der Existenz eines Systems Fuchs'scher Zetafunctionen, welches zu den gegebenen Gruppen ϑ und Θ gehört.

Es mögen durch

$$S_\nu \eta = \frac{\alpha_\nu \eta + \beta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}, \qquad \alpha_\nu \delta_\nu - \beta_\nu \gamma_\nu = 1, \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots; \; S_0 = 1)$$

die Substitutionen der Gruppe ϑ und durch

$$T_\nu = (a_{i\varkappa}^{(\nu)}) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots) \quad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

die entsprechenden Substitutionen der mit ϑ isomorphen Gruppe Θ bezeichnet werden. Es werde ferner vorausgesetzt, dass die Substitutionen der Gruppe Θ unimodulare seien, was offenbar keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit involvirt.

Die zu T_ν inverse Substitution von Θ lautet dann (vergl. Nr. 3 0, Bd. I, S. 94)

$$T_\nu^{-1} = (A_{i\varkappa}^{(\nu)}) \quad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ die zu dem Elemente $a_{\varkappa i}^{(\nu)}$ gehörige Subdeterminante der Determinante

$$| a_{i\varkappa}^{(\nu)} | = 1 \quad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

bedeutet.

Wenn wir die Substitution T_ν auf ein System von n Grössen

$$y_1, y_2, \cdots y_n$$

anwenden, so bezeichnen wir den Ausdruck, in den sich y_i verwandelt, durch

$$T_\nu y_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{i\varkappa}^{(\nu)} y_\varkappa \qquad (i=1,2,\cdots n)$$

und betrachten nun n rationale Functionen von η

$$H_1(\eta),\ H_2(\eta),\ \cdots\ H_n(\eta).$$

Mit Hülfe dieser Functionen bilden wir das System von n Reihen

$$(1) \qquad \xi_i(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu^{-1} H_i(S_\nu \eta) \left(\frac{dS_\nu \eta}{d\eta}\right)^m \qquad (i=1,2,\cdots n),$$

wo m eine positive ganze Zahl grösser als Eins bedeutet, dann besitzen diese Reihen, ihre unbedingte Convergenz vorausgesetzt, die folgenden Eigenschaften.

Untersuchen wir zunächst die Aenderungen, die die Reihen ξ_i erfahren, wenn auf η eine Substitution S_μ der Gruppe ϑ angewandt wird. Die Gesammtheit der Substitutionen

$$S_\nu S_\mu \qquad (\nu=0,1,2,\cdots)$$

ist mit der Gruppe ϑ, die Gesammtheit der Substitutionen

$$T_\nu T_\mu \qquad (\nu=0,1,2,\cdots)$$

mit der Gruppe Θ identisch; da ferner

$$(T_\nu T_\mu)^{-1} = T_\mu^{-1} T_\nu^{-1}$$

ist, so können wir die Reihe ξ_i in die Form

$$(2) \qquad \xi_i(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\mu^{-1} T_\nu^{-1} H_i(S_\nu S_\mu \eta) \left(\frac{dS_\nu S_\mu \eta}{d\eta}\right)^m$$

setzen.

Wenden wir in (1) auf η die Substitution S_μ an, so ergiebt sich

$$\xi_i(S_\mu \eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu^{-1} H_i(S_\nu S_\mu \eta) \left(\frac{dS_\nu S_\mu \eta}{dS_\mu \eta}\right)^m,$$

wir erhalten also durch Vergleichung mit (2)

$$\xi_i(\eta) = \left(\frac{dS_\mu \eta}{d\eta}\right)^m T_\mu^{-1} \xi_i(S_\mu \eta),$$

woraus sich

$$(3) \qquad \xi_i(S_\mu \eta) = \left(\frac{d\eta}{dS_\mu \eta}\right)^m T_\mu \xi_i(\eta)$$

ergiebt. Diese Gleichung lehrt also, dass sich die $\xi_i(\eta)$ bei Anwendung der Substitution S_μ von ϑ auf η mit dem Factor

$$\left(\frac{d\eta}{dS_\mu \eta}\right)^m = (\gamma_\mu \eta + \delta_\mu)^{2m}$$

multipliciren und überdies die der Substitution S_μ von ϑ entsprechende Substitution T_μ der Gruppe Θ erfahren.

Aehnlich wie bei den Thetareihen (Nr. 314, S. 210 ff.) kommen wir zu Ausdrücken, deren Verhalten gegenüber den Substitutionen der Gruppe ϑ ein übersichtlicheres ist, wenn wir von den Reihen $\xi_i(\eta)$ zu homogenen Ausdrücken des Grades $(-2m)$ zweier Grössen u_1, u_2 übergehen, als deren Quotient

$$\eta = \frac{u_2}{u_1}$$

die Variable η aufgefasst werden kann. Betrachten wir z. B. die zu der Gruppe ϑ gehörige Fuchs'sche Function $x = f(\eta)$, die innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 von ϑ jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt, so sind

$$u_1 = \sqrt{\frac{dx}{d\eta}}, \qquad u_2 = \eta\sqrt{\frac{dx}{d\eta}}$$

die Elemente eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (II) (Nr. 353, S. 341) die (vergl. Nr. 314, S. 210) sich in

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} S_\nu u_1 = \pm(\delta_\nu u_1 + \gamma_\nu u_2), \\ S_\nu u_2 = \pm(\beta_\nu u_1 + \alpha_\nu u_2) \end{cases}$$

verwandeln, wenn η die Substitution S_ν der Gruppe ϑ erfährt. Die homogenen Substitutionen (4) constituiren eine mit ϑ isomorphe Gruppe t, wir behalten für die Substitutionen von t die Bezeichnung S_ν bei, da es bei den folgenden Ueberlegungen auf das $\pm$, durch welches die homogene Substitution sich von der projectiven unterscheidet, nicht ankömmt.

Multipliciren wir die rationalen Functionen

$$H_1(\eta),\ H_2(\eta),\ \cdots\ H_n(\eta)$$

mit u_1^{-2m}, wodurch dieselben in homogene Functionen (Formen) des Grades $(-2m)$ in den u_1, u_2

$$u_1^{-2m} H_i(\eta) = \varphi_i(u_1,\ u_2) \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

übergehen, so ist offenbar

$$\varphi_i(S_\nu u_1,\ S_\nu u_2) = u_1^{-2m} H_i(S_\nu \eta)\left(\frac{dS_\nu \eta}{d\eta}\right)^m,$$

und folglich sind die Reihen

$$Z_i(u_1, u_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu^{-1} \varphi_i(S_\nu u_1, S_\nu u_2) = u_1^{-2m} \xi_i(\eta)$$
$$(i = 1, 2, \cdots n)$$

nfalls homogene Functionen oder Formen des Grades $(-2m)$ u_1, u_2.

Wenn nun die u_1, u_2 die Substitution S_μ der mit der projectiven uppe ϑ isomorphen homogenen Gruppe t erfahren, so verwandelt h $Z_i(u_1, u_2)$ in

$$Z_i(S_\mu u_1, S_\mu u_2) = T_\mu Z_i(u_1, u_2) \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

h. die $Z_i(u_1, u_2)$ werden durch die entsprechende Substitution der uppe Θ transformirt und bilden folglich, die unbedingte Convergenz Reihen (5) vorausgesetzt, ein Functionssystem von η, welches in zug auf die Gruppen ϑ und Θ ein ähnliches Verhalten zeigt, wie für die Systeme der zu diesen Gruppen gehörigen Fuchs'schen tafunctionen gefordert wurde. Dabei können die in den Reihen (5) ftretenden $\varphi_i(u_1, u_2)$ offenbar ganz beliebige rationale homogene nctionen $(-2m)$-ten Grades der u_1, u_2 bedeuten.

356. Ansatz zum Convergenzbeweise im Falle, wo keine parabolischen Substitutionen vorhanden sind.

Wir gehen nun an die Untersuchung der Convergenz der Reihen (5) ziehungsweise (1).

In mehr expliciter Form lauten die Reihen (1) wie folgt:

$$\text{a)} \quad \xi_i(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{i\varkappa}^{(\nu)} H_i\left(\frac{\alpha_\nu \eta + \beta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right) \frac{1}{(\gamma_\nu \eta + \delta_\nu)^{2m}} \qquad (i = 1, 2, \cdots n).$$

sich (vergl. Nr. 305, S. 176) für die Ausdrücke

$$H_i\left(\frac{\alpha_\nu \eta + \beta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right) \qquad (i = 1, 2, \cdots n; \; \nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

e obere Grenze angeben lässt, vorausgesetzt, dass (vergl. a. a. O. 175) die rationalen Functionen $H_i(\eta)$ an keiner auf der Peripherie Einheitskreises gelegenen Stelle unendlich werden, und dass η weder e Unendlichkeitsstelle dieser n rationalen Functionen ist, noch mit er solchen vermöge der Substitutionen der Gruppe ϑ correspondirt, hängt die unbedingte Convergenz der Reihen (1a) wesentlich von r Convergenz der n^2 Reihen

$$\lambda_{i\varkappa} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| A_{i\varkappa}^{(\nu)} \frac{1}{(\gamma_\nu \eta + \delta_\nu)^{2m}} \right| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n) \tag{7}$$

ab.

Wir setzen jetzt voraus, dass die Fuchs'sche Gruppe ϑ so beschaffen ist, dass ihr Fundamentalbereich F_0 keine parabolischen Ecken enthält, so dass also die Winkelsummen bei den Ecken, die einen Cyklus bilden, nicht gleich Null, sondern gleich

$$\frac{2\pi}{g_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1)$$

sind, wo die $g_\varkappa$ endliche positive ganze Zahlen bedeuten. Bezeichnen wir wie gewöhnlich mit $A_1, A_2, \cdots A_\sigma$ die Substitutionen, die die congruenten Seitenpaare $s_\varkappa, s_\varkappa'$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$ von F_0 in einander transformiren, dann sind diese σ Substitutionen elliptische und bilden mit ihren inversen eine Basis der Gruppe ϑ. Jede Substitution von ϑ ist in der Form

$$S_\nu = A_{i_1}^{\lambda_1} A_{i_2}^{\lambda_2} \cdots A_{i_\mu}^{\lambda_\mu} \tag{8}$$

darstellbar, wo die $i_1, i_2, \cdots i_\mu$ Zahlen der Reihe $1, 2, \cdots \sigma$, die

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\mu$$

positive oder negative ganze Zahlen bedeuten.

Zufolge der Relationen

$$A_\varkappa^{g_\varkappa} = 1 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma) \tag{9}$$

kann jede Substitution S_ν auf unendlich verschiedene Arten in der Form (8) dargestellt werden, es wird aber unter diesen Darstellungen eine (eventuell auch mehrere) geben, für welche die Summe der absoluten Beträge der Zahlen $\lambda_\varkappa$ den kleinsten möglichen Werth erhält, wir setzen dann diese Summe

$$\sum_{\varkappa=1}^{\mu} |\lambda_\varkappa| = \text{Ind } S_\nu \tag{10}$$

und nennen sie den Index der Substitution S_ν.

Sei η z. B. ein innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 gelegener Werth, und denken wir uns den Punkt $S_\nu \eta$, der aus η durch die Substitution S_ν von ϑ hervorgeht, mit dem Punkte $\eta = 0$, den wir als innerhalb von F_0 gelegen voraussetzen wollen, durch eine gerade Linie verbunden. — Dann entspricht dieser geraden Linie auf der Fläche vom constanten Krümmungsmaasse -1 eine geodätische Linie; die superficielle Länge der geradlinigen Strecke von 0 bis $S_\nu \eta$ ist demnach

:hts Anderes wie der geodätische Abstand der diesen beiden Punkten tsprechenden Punkte auf der Fläche vom constanten Krümmungs- ıasse -1, also übereinstimmend mit der in der Nr. 308 (S. 186) :t r' bezeichneten Grösse. Wir haben folglich nach Gleichung (26) r erwähnten Nummer

$$r' = \log \frac{1+|S_\nu \eta|}{1-|S_\nu \eta|}.$$

Die geradlinige Verbindungslinie der Punkte 0 und $S_\nu \eta$ wird eine wisse Anzahl der mit F_0 congruenten Bereiche $F_\varkappa$ der zu der Gruppe gehörigen Theilung durchqueren, und diese Anzahl N kann offenbar cht kleiner sein, wie der Index der Substitution S_ν. Zwischen der ıhl N und dem geodätischen Abstande r' des Punktes $S_\nu \eta$ vom Null- ınkte der η-Ebene besteht nun eine Beziehung, die sich am Einfach- ən herleiten lässt, wenn man sich des in der Nr. 287 (S. 108) beim scontinuitätsbeweise angewandten Verfahrens bedient.

Betrachten wir die N Theile, in welche die geradlinige Strecke , $S_\nu \eta$) durch die von ihr durchschnittenen Seiten der Bereiche $F_\varkappa$ rfällt wird, so sind zunächst die superficiellen Längen derjenigen ıeile, die keine Ecken umspannen (vergl. a. a. O.), endliche und von ıll verschiedene Grössen, die nicht unter eine angebbare Grenze K rabsinken können. Die Anzahl dieser Theile unserer Strecke ist also lenfalls kleiner wie

$$\frac{r'}{K}.$$

ılcher Theile der geradlinigen Strecke, die aufeinander folgen und eine ıd dieselbe Ecke umspannen, kann es, da alle Ecken Doppelpunkte .iptischer Substitutionen sind, höchstens h geben, wo h die grösste ıter den positiven ganzen Zahlen

$$g_1, g_2, \cdots g_{\sigma+1}$$

deutet. Der Uebergang von aufeinander folgenden Theilen, die eine ıstimmte Ecke umspannen, zu aufeinander folgenden Theilen, die eine .dere Ecke umspannen, erfolgt nothwendig durch ein Stück, welches lbst keine Ecke umspannt, aber durch die Vereinigung zweier ıfeinander folgender und verschiedene Ecken umspannender Theile ent- əht (vergl. die Fig. 24, S. 109). Die superficielle Länge eines sol- ıen Verbindungsstückes bleibt stets oberhalb einer gewissen angeb- ıren Grenze $\overline{K}$, die Anzahl solcher Stücke kann demnach nicht grösser in, wie

$$\frac{r'}{\overline{\overline{K}}}.$$

Folglich ist die Gesammtzahl aller Theile unserer Strecke

$$N < r'\left(\frac{1}{K} + \frac{h}{\overline{K}}\right).$$

Die Zahl, die den Factor von r' auf der rechten Seite dieser Ungleichung bildet, ist eine feste von ν unabhängige Grösse; wir bezeichnen dieselbe durch α. Dann ist also zufolge einer oben gemachten Bemerkung

(11) $$\text{Ind } S_\nu < r'\alpha.$$

357. Convergenzbeweis im Falle, wo keine parabolischen Substitutionen vorhanden sind. Divergenz der Reihen im allgemeinen Falle.

Seien $\mathsf{A}_\varkappa$ diejenigen Substitutionen der Gruppe Θ, die vermöge [illegible]e des zwischen den Gruppen ϑ und Θ bestehenden Isomorphismus den[illegible]n Substitutionen $A_\varkappa$ von ϑ entsprechen. Dann ist offenbar die der Sub[illegible]stitution S_ν von ϑ entsprechende Substitution T_ν von Θ in der de[illegible]r Gleichung (10) entsprechenden Form

(12) $$T_\nu = \mathsf{A}_{i_1}^{\lambda_1}\mathsf{A}_{i_2}^{\lambda_2}\cdots\mathsf{A}_{i_\mu}^{\lambda_\mu}$$

darstellbar; wenn der zwischen ϑ, Θ bestehende Isomorphismus kei[illegible]n holoedrischer ist, so gestattet die Darstellung (12) von T_ν eventue[illegible]ll noch eine Reduction auf eine Form, wo die Summe der absoluten Be[illegible]träge der Exponenten kleiner ist wie Ind S_ν. Aus (12) folgt für di[illegible]ie zu T_ν inverse Substitution

(12a) $$T_\nu^{-1} = \mathsf{A}_{i_\mu}^{-\lambda_\mu}\mathsf{A}_{i_{\mu-1}}^{-\lambda_{\mu-1}}\cdots\mathsf{A}_{i_1}^{-\lambda_1};$$

die Coefficienten $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ dieser Substitution treten in den Reihen (7) m[illegible]it Ausdrücken multiplicirt auf, die nur noch von der Substitution [illegible]S_ν abhängen. Wir wollen darum versuchen, für die absoluten Beträge d[illegible]er $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ eine obere Grenze aufzufinden.

Betrachten wir die Coefficienten der Substitutionen

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_\sigma$$

und ihrer inversen, so lässt sich jedenfalls eine positive Zahl M a[illegible]ngeben, die nicht kleiner ist, wie der absolute Betrag irgend eines die[illegible]er $2n^2\sigma$ Coefficienten. Die Coefficienten einer Substitution, die aus z[illegible]ei Substitutionen $\mathsf{A}_i^{\pm 1}$, $\mathsf{A}_\varkappa^{\pm 1}$ componirt ist, sind Summen von n Gliede[illegible]rn, deren jedes ein Product von einem Coefficienten der einen in ein[illegible]en Coefficienten der anderen Substitution ist; der absolute Betrag ei[illegible]nes

solchen Coefficienten ist demnach nicht grösser wie $n M^2$. Schliesst man so weiter, so erkennt man, dass für die in der Form (12a) dargestellte Substitution T_ν^{-1} der absolute Betrag jedes Coefficienten der Ungleichung

$$|A_{i\varkappa}^{(\nu)}| \leqq (n M)^{\mathrm{Ind}\, S_\nu}$$

Genüge leistet. Wir haben also mit Rücksicht auf (11)

$$(13) \qquad |A_{i\varkappa}^{(\nu)}| < e^{r'\alpha \cdot \log n M}.$$

Nun ist nach Gleichung (27) der Nr. 308 (S. 186)

$$\left|\frac{1}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right|^2 < \frac{K}{e^{r'} + e^{-r'} + 2} < K e^{-r'},$$

wo K eine von ν unabhängige, nur von $|\eta|$ abhängende Grösse bedeutet, und folglich

$$|A_{i\varkappa}^{(\nu)}| \left|\frac{1}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right|^{2m-4} < e^{r'[\alpha \cdot \log n M - m + 2]} K^{m-2}.$$

Wählen wir die ganze positive Zahl m so gross, dass

$$(14) \qquad m - 2 > \alpha \cdot \log n M,$$

so ergiebt sich

$$|A_{i\varkappa}^{(\nu)}| \left|\frac{1}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right|^{2m} < K^{m-2} \left|\frac{1}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right|^4;$$

die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\frac{1}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right|^4$$

ist aber, wie in der Theorie der Fuchs'schen Thetafunctionen bewiesen wurde (Nr. 306, S. 181, Nr. 308, S. 187) convergent, wir haben also die Convergenz der Reihen (7) für Werthe von m, die die Ungleichung (14) befriedigen, bewiesen, und hieraus folgt für ebensolche Werthe von m die unbedingte Convergenz der Reihen $\xi_i(\eta)$.

Wir bemerken, dass die für die Zahl m gefundene Beschränkung (14) im Allgemeinen keine nothwendige ist; da es uns aber im Wesentlichen nur auf einen Existenzbeweis ankömmt, so genügt es, die Convergenz der Reihen $\xi_i(\eta)$ für gewisse wohlcharakterisirte Werthe von m dargethan zu haben.

Wir wenden uns nun zu dem Falle, wo unter den Fundamentalsubstitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$$

der Fuchs'schen Gruppe ϑ parabolische Substitutionen enthalten sind.

Zuvörderst ist leicht einzusehen, dass in diesem Falle die Reihen $\xi_i(\eta)$, wenn die Gruppe Θ keinen weiteren Beschränkungen unterworfen wird, nicht unbedingt convergent sein können.

In der That sei etwa

$$\frac{1}{A\eta - \lambda} = \frac{1}{\eta - \lambda} + \gamma \tag{15}$$

eine der parabolischen Substitutionen unter den $A_\varkappa$ in der canonischen Form. Dann können wir uns die Gruppe Θ so transformirt denken, dass die der Substitution A von ϑ entsprechende Substitution A in der canonischen Form (vergl. Nr. 37, Bd. I, S. 127)

$$\mathsf{A} y_\varkappa = m_\varkappa y_\varkappa + n_{\varkappa-1} y_{\varkappa-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n;\ n_0 = 0)$$

erscheint; wir nehmen ferner der Einfachheit wegen an, dass die $n_{\varkappa-1}$ sämmtlich gleich Null sind, so dass also

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix}$$

ist.

Sondern wir aus der Reihe $\xi_i(\eta)$ diejenigen Glieder aus, die sich auf die positiven und negativen Potenzen der Substitution A beziehen, so lautet das Aggregat dieser Glieder

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} m_i^{-q} H_i(A^q \eta) \left(\frac{d A^q \eta}{d\eta}\right)^m,$$

oder da nach (15)

$$\frac{d A^q \eta}{d\eta} = \{1 + (\eta - \lambda) q \gamma\}^{-2}$$

ist,

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} m_i^{-q} \overline{H}_i\left(\frac{1}{\eta - \lambda} + q\gamma\right) [1 + q\gamma(\eta - \lambda)]^{-2m}, \tag{16}$$

wo

$$\overline{H}_i\left(\frac{1}{\eta - \lambda}\right) = H_i(\eta)$$

gesetzt wurde. Die Reihe (16) hat also die Form

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(q)}{m_i^q}, \tag{17}$$

wo $\varphi(q)$ den Algorithmus einer rationalen Function von q bedeutet.

Nun ist für $|m_i| > 1$ der Grenzwerth des Gliederquotienten der Reihe

$$\sum_{q=0}^{\infty} m_i^q \varphi(-q),$$

für $|m_i| < 1$ der Grenzwerth des Gliederquotienten der Reihe

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{m_i^q}$$

dem absoluten Betrage nach grösser wie Eins, die Reihe (17) ist folglich, wenn

$$|m_i| \neq 1$$

ist, jedenfalls divergent. Da die m_i nichts Anderes sind, wie die Wurzeln der zu der Substitution A gehörigen Fundamentalgleichung, so haben wir den Satz:

Wenn die Fuchs'sche Gruppe ϑ parabolische Substitutionen enthält, so sind die Reihen $\xi_i(\eta)$ jedenfalls nicht unbedingt convergent, sofern die Wurzeln der Fundamentalgleichungen, die zu den diesen parabolischen Substitutionen entsprechenden Substitutionen der Gruppe Θ gehören, von Eins verschiedene absolute Beträge besitzen.

358. Ansatz zum Convergenzbeweise im Falle wo parabolische Substitutionen vorhanden sind.

Wenn unter den Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$$

parabolische enthalten sind, so werden wir mit Rücksicht auf den eben bewiesenen Satz nur dann in eine Untersuchung der unbedingten Convergenz der Reihen $\xi_i(\eta)$ einzutreten haben, wenn die den parabolischen Substitutionen der Gruppe ϑ entsprechenden Substitutionen der Gruppe Θ so beschaffen sind, dass die absoluten Beträge der Wurzeln der zu ihnen gehörigen Fundamentalgleichungen den Werth Eins besitzen. In diesem Falle lässt sich aber auch zeigen, dass die Reihen $\xi_i(\eta)$ für hinreichend grosse Werthe von m allemal unbedingt convergent sind.

Die Voraussetzung, dass alle Substitutionen von Θ, die parabolischen Substitutionen von ϑ entsprechen, Fundamentalgleichungen besitzen, deren Wurzeln dem absoluten Betrage nach gleich Eins sind, lässt sich durch die einfachere ersetzen, dass diese Bedingung für diejenigen Substitutionen von Θ erfüllt sei, die den parabolischen unter den Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$$

von ϑ entsprechen. Denn jede parabolische Substitution von ϑ geht, wie wir wissen, aus einer Potenz der unter den $A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$ enthaltenen parabolischen Substitutionen durch Transformation mittelst einer Substitution von ϑ hervor; eine Substitution von Θ, die einer parabolischen Substitution von ϑ entspricht, entsteht also aus einer Potenz einer derjenigen Substitutionen, die den parabolischen unter den

$$A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$$

entsprechen, durch Transformation mittelst einer Substitution von Θ; Substitutionen, die durch Transformation aus einander hervorgehen, haben aber dieselbe Fundamentalgleichung, und die Wurzeln der Fundamentalgleichung einer Substitution T^p sind die p-ten Potenzen der Wurzeln der Fundamentalgleichung der Substitution T.

Ohne dadurch die Allgemeinheit zu beschränken können wir voraussetzen, dass die zu dem σ-gliedrigen Eckencyklus des Fundamentalbereiches F_0 gehörige Fundamentalsubstitution $A_{\sigma+1}$ von ϑ keine parabolische sei; es lässt sich das nämlich, wenn unter den Zahlen

$$g_1, g_2, \cdots g_{\sigma+1}$$

wenigstens eine endliche vorhanden ist, durch einfache Vertauschung der Reihenfolge und damit verbundene erlaubte Abänderung von F_0 erreichen; falls jedoch alle $g_\varkappa$ unendlich gross sein sollten, hat man nur einen scheinbaren $(\sigma + 1)$-gliedrigen Eckencyklus mit der Winkelsumme 2π einzuschalten, demselben die identische Substitution 1 zuzuordnen, um dann F_0 durch erlaubte Abänderung so umgestalten zu können, dass die den $\sigma + 1$ parabolischen Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$$

entsprechenden Ecken eingliedrige Cykeln bilden.

Wir betrachten wieder wie im Falle, wo keine parabolische Substitution vorhanden war, einen innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 gelegenen η-Werth, und die geradlinige Verbindungslinie des ebenfalls innerhalb F_0 gelegenen Nullpunktes der η-Ebene mit dem Punkte $S_\nu\eta$. Die superficielle Länge der geradlinigen zwischen 0 und $S_\nu\eta$ gelegenen Strecke bezeichnen wir wie oben mit r'. Die gerade Linie $(0, S_\nu\eta)$ möge den Bereich F_0 in einem Punkte der Seite $s_{\varkappa_1}$ verlassen, dann in einen der mit F_0 congruenten Bereiche eintreten, diesen in einem Punkte der der Seite $s_{\varkappa_2}$ von F_0 entsprechenden Seite verlassen u. s. w.; endlich möge die von dieser Geraden durchschnittene Seite des letzten Bereiches, welchen dieselbe noch verlässt, der Seite $s_{\varkappa_\mu}$ von F_0 entsprechen. Dabei bedeuten

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu$$

Zahlen der Reihe $\pm 1, \pm 2, \cdots \pm \sigma$, und für ein positives λ wurde $s_{-\lambda}$ an Stelle von s_λ' geschrieben.

Die Substitution $S_\nu \eta$ ist dann offenbar in der Form

$$S_\nu = A_{\varkappa_1} A_{\varkappa_2} \cdots A_{\varkappa_\mu}$$

darstellbar, wo wieder für ein positives λ

$$A_{-\lambda} = A_\lambda^{-1}$$

zu nehmen ist. Indem wir gleiche und aufeinander folgende unter den $A_{\varkappa_1}, A_{\varkappa_2}, \cdots A_{\varkappa_\mu}$ zusammenfassen, erhalten wir für S_ν die Darstellung

(18) $$S_\nu = A_{i_1}^{\lambda_1} A_{i_2}^{\lambda_2} \cdots A_{i_\tau}^{\lambda_\tau},$$

wo die $i_1, i_2, \cdots i_\tau$ Zahlen der Reihe $\pm 1, \pm 2, \cdots \pm \sigma$, die

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\tau$$

positive ganze Zahlen bedeuten.

Wir denken uns nun um jede Ecke von F_0 einen kleinen Kreis von folgender Beschaffenheit beschrieben. Für eine Ecke λ, die Doppelpunkt einer elliptischen Substitution ist, sei der betreffende Kreis der geometrische Ort aller Punkte, die von λ einen gewissen constanten (auf der Fläche vom constanten Krümmungsmaasse -1 gemessenen) geodätischen Abstand haben, für eine Ecke, die Doppelpunkt einer parabolischen Substitution ist, möge der betreffende Kreis den Einheitskreis in dieser Ecke berühren. Die so construirten Kreise, die offenbar nichts anderes sind wie Bahncurven (vgl. Nr. 200, Bd. II, 1, S. 271) derjenigen Substitution, um deren Doppelpunkt dieselben beschrieben sind, bilden wir nun durch alle Substitutionen der Fuchs'schen Gruppe $\mathfrak{G}$ ab, dann erscheint jede Ecke der dieser Gruppe entsprechenden Theilung mit einem solchen Kreise umgeben, und zwar sind die um correspondirende Ecken beschriebenen Kreise im Sinne der in der Nr. 285 (S. 101) eingeführten Terminologie einander congruent. Wir können die gedachten Kreise so klein wählen, dass dieselben sich gegenseitig ausschliessen; die superficielle Länge einer Linie, die zwei auf den Peripherien zweier verschiedener dieser Kreise gelegene Punkte mit einander verbindet, kann dann nicht unter eine gewisse angebbare Grenze l herabsinken.

Die gerade Linie $(0, S_\nu \eta)$ wird im Allgemeinen eine gewisse Anzahl dieser kleinen Kreise durchqueren; diese Anzahl ist aber keinesfalls grösser wie

$$\frac{r'}{l}.$$

Wir sondern nun die Substitutionen, die in dem Ausdrucke (18) auftreten, in zwei Kategorien. In die erste Kategorie gehören diejenigen, die Durchquerungen von Seiten der Bereiche unserer Theilung durch die gerade Linie $(0, S_\nu \eta)$ entsprechen, die entweder ausserhalb der kleinen Kreise oder innerhalb von solchen dieser Kreise erfolgen, die um Doppelpunkte elliptischer Substitutionen beschrieben sind. Der zweiten Kategorie werden jene Substitutionen zugezählt, die Durchquerungen entsprechen, die innerhalb von kleinen Kreisen erfolgen, die um Doppelpunkte parabolischer Substitutionen beschrieben wurden.

Betrachten wir einen dieser letzteren kleinen Kreise $\mathfrak{C}$, und sei λ der auf demselben befindliche parabolische Doppelpunkt. Dann münden offenbar alle Seiten der Theilung, die von $\mathfrak{C}$ getroffen werden, in dem Punkte λ und gehen demnach (da die parabolischen Eckencykeln als eingliedrige vorausgesetzt wurden) aus einer dieser Seiten durch Anwendung von Potenzen einer parabolischen Substitution der Gruppe ϑ mit dem Doppelpunkte λ hervor. Wenn also die Gerade $(0, S_\nu \eta)$ etwa $\pi_\varkappa$ solcher Seiten innerhalb $\mathfrak{C}$ durchquert, so entspricht diesen Durchquerungen eine in dem Ausdrucke (18) auftretende Substitution

$$B_\varkappa^{\pi_\varkappa},$$

wo $B_\varkappa$ eine der parabolischen unter den Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\sigma$ oder deren inversen bedeutet.

Die Substitutionen der zweiten Kategorie, die in (18) auftreten, können also durch

$$B_1^{\pi_1}, B_2^{\pi_2}, \cdots B_q^{\pi_q}$$

bezeichnet werden, wo die $B_1, B_2, \cdots B_q$ parabolische unter den Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma$$

oder deren inversen, die $\pi_1, \pi_2, \cdots \pi_q$ positive ganze Zahlen bedeuten. Die Anzahl q dieser Substitutionen ist offenbar kleiner wie die Anzahl aller kleinen Kreise, die die Gerade $(0, S_\nu \eta)$ durchqueren kann, wir haben also

$$q < \frac{r'}{l}.$$

359. **Bestimmung oberer Grenzen für die Summen beziehungsweise Producte der Exponenten der Substitutionen erster und zweiter Kategorie.**

Seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_p$ die Exponenten, zu denen erhoben die Substitutionen der ersten Kategorie in dem Ausdrucke (18) auftreten. Dann lässt sich für die Summe dieser $\varepsilon_\varkappa$ sofort eine obere Grenze angeben.

Die superficielle Länge einer Curve, die zwei auf verschiedenen Seiten von F_0 gelegene Punkte mit einander verbindet, ohne in einen der kleinen Kreise einzudringen, bleibt offenbar stets oberhalb einer gewissen angebbaren Grenze K. Die Anzahl der Seiten von Bereichen unserer Theilung, die von der geraden Linie $(0, S_\nu\eta)$ in Punkten überschritten werden, die ausserhalb der kleinen Kreise gelegen sind, ist demnach nicht grösser wie

$$\frac{r'}{K}.$$

Die Anzahl der Seiten, die die Gerade $(0, S_\nu\eta)$ im Innern eines der kleinen eine elliptische Ecke umgebenden Kreises durchqueren kann, ist jedenfalls nicht grösser wie die grösste unter den Zahlen $g_\varkappa$, die die Periodicität der elliptischen unter den Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$$

angeben; sei diese grösste Zahl gleich h. Dann ist also die Anzahl der von unserer Geraden im Innern von kleinen elliptische Ecken umgebenden Kreisen überschrittenen Seiten nicht grösser wie

$$\frac{hr'}{l}.$$

Nach der Definition der Substitutionen erster Kategorie haben wir also

$$(19) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{p} \varepsilon_\varkappa < r'\left(\frac{1}{K} + \frac{h}{l}\right).$$

Die Maximalzahl der Durchquerungen, die innerhalb eines Kreises $\mathfrak{C}$ erfolgen können, der um eine parabolische Ecke λ beschrieben ist, d. h. also der den Einheitskreis in λ berührt, ergiebt sich in folgender Weise.

Möge die gerade Linie $(0, S_\nu\eta)$ etwa in einem Punkte A in $\mathfrak{C}$ eintreten und bei B aus $\mathfrak{C}$ austreten (der Fall, dass der Punkt $S_\nu\eta$ sich im Innern von $\mathfrak{C}$, also zwischen A und B befindet, ist nicht ausgeschlossen). Betrachten wir dann die in der Ecke λ einmündenden Seiten, so berühren dieselben einander im Punkte λ und schneiden in

diesem Punkte den Einheitskreis unter rechtem Winkel. Irgend zwei aufeinanderfolgende dieser Seiten gehen aus einander durch Anwendung einer parabolischen Substitution S der Gruppe ϑ hervor, die den Punkt λ zum Doppelpunkte hat. Die zwischen je zwei aufeinander folgenden solchen Seiten gelegenen Bogenstücke des Kreises $\mathfrak{C}$ sind demnach congruent und haben somit eine constante superficielle Länge τ. Bedeutet also N die superficielle Länge des von A bis B reichenden Bogens des Kreises $\mathfrak{C}$, so ist die Anzahl der von der Geraden $(0, S_\nu \eta)$ innerhalb $\mathfrak{C}$ durchquerten Seiten jedenfalls kleiner wie

$$\frac{N}{\tau}.$$

Für die Grösse N lässt sich aber eine obere Grenze angeben, die nur von dem geodätischen Abstande $\mathfrak{L}_1$ der Punkte A, B, d. h. von der superficiellen Länge der zwischen diesen beiden Punkten gelegenen Strecke der geraden Linie $(0, S_\nu \eta)$ abhängt.

Bezeichne μ den einen der beiden Punkte des Einheitskreises, der von der gedachten Geraden ausgeschnitten wird und setzen wir

$$(20) \qquad t = u + vi = \frac{i}{2} \frac{(1-\eta)(1-\mu)}{\eta - \mu},$$

wo also $|\mu| = 1$, u, v real sind, so entspricht der Peripherie des Einheitskreises der η-Ebene die reale t-Axe, dem Innern des Einheitskreises der η-Ebene die obere t-Halbebene, dem Kreise $\mathfrak{C}$ ein die reale t-Axe berührender Kreis

$$(21) \qquad (u-\alpha)^2 + (v-\beta)^2 = \beta^2,$$

wo α real, β real positiv ist, und endlich der Geraden $(0, S_\nu \eta)$ der η-Ebene eine gerade Linie (weil für $\eta = \mu$, $t = \infty$ ist), die zur realen t-Axe senkrecht steht und den Kreis (21) in den den beiden Punkten A, B der η-Ebene entsprechenden vertical übereinander liegenden Punkten mit den Coordinaten

$$(u_1, v_1), \qquad (u_1, v_2)$$

schneiden möge. Es ist dann offenbar

$$(\alpha - u_1)^2 = v_1 v_2.$$

Das Bogenelement

$$ds = 2\sqrt{\frac{dp^2 + dq^2}{(1-p^2-q^2)^2}} \qquad (\eta = p + qi)$$

der Fläche vom constanten Krümmungsmaasse -1 nimmt in den Coordinaten u, v die Gestalt an

$$ds = 2\sqrt{\frac{du^2 + dv^2}{v^2}}.$$

Wir finden demnach für die superficielle Länge der geradlinigen Strecke von (u_1, v_1) bis (u_1, v_2) der t-Ebene, oder was dasselbe heisst, für die superficielle Länge $\mathfrak{L}_1$ des zwischen den Punkten A, B gelegenen geradlinigen Stückes der η-Ebene den Ausdruck

$$\mathfrak{L}_1 = 2\int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = 2\log\frac{v_2}{v_1},$$

und für die superficielle Länge N des zwischen denselben Punkten gelegenen Bogens des Kreises (21)

$$N = 2\beta\int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v\sqrt{2v\beta - v^2}} = -2\beta\left[\frac{\sqrt{2v\beta - v^2}}{\beta v}\right]_{v_1}^{v_2}$$

$$= 2\left[\frac{u_1 - \alpha}{v_1} - \frac{u_1 - \alpha}{v_2}\right] = \frac{2(v_2 - v_1)}{\sqrt{v_1 v_2}}.$$

Da nun

$$e^{\mathfrak{L}_1} - e^{-\mathfrak{L}_1} = \frac{v_2}{v_1} - \frac{v_1}{v_2} = 2\frac{v_2 - v_1}{\sqrt{v_1 v_2}} \cdot \frac{\frac{v_2 + v_1}{2}}{\sqrt{v_1 v_2}}$$

und

$$\frac{v_2 + v_1}{2} > \sqrt{v_1 v_2}$$

ist, so folgt

(22) $$N < e^{\mathfrak{L}_1} - e^{-\mathfrak{L}_1} < e^{\mathfrak{L}_1}.$$

Die Anzahl der Durchquerungen, die innerhalb des kleinen Kreises $\mathfrak{C}$ stattfinden, ist also kleiner wie

$$\frac{e^{\mathfrak{L}_1}}{\tau},$$

und da diese Anzahl nichts anderes ist, wie der Exponent $\pi_\varkappa$ in der zu diesem Kreise $\mathfrak{C}$ gehörigen Substitution der zweiten Kategorie $B_\varkappa^{\pi_\varkappa}$, so ist

$$\pi_\varkappa < \frac{e^{\mathfrak{L}_1}}{\tau}.$$

Wir werden für die Summe der Logarithmen der $\pi_\varkappa$ einer oberen Grenze bedürfen; bilden wir darum

$$\log\pi_\varkappa < \mathfrak{L}_1 - \log\tau.$$

Offenbar kann eine Grösse k so angegeben werden, dass für alle Kreise $\mathfrak{C}$ die Ungleichung

$$k > -\log \tau$$

erfüllt ist, dann haben wir also

$$\log \pi_\varkappa < \mathfrak{L}_1 + k,$$

und da die Summe aller $\mathfrak{L}_l$ keinesfalls grösser sein kann als die superficielle Länge r' der Geraden $(0,\ S_\nu \eta)$, ergiebt sich

$$\sum_{\varkappa=1}^{q} \log \pi_\varkappa < r' + qk,$$

oder da, wie oben gefunden wurde, q kleiner ist als $\frac{r'}{l}$,

(24) $$\sum_{\varkappa=1}^{q} \log \pi_\varkappa < r'\left(1 + \frac{k}{l}\right) \cdot$$

360. Letzter Theil des Convergenzbeweises.

Betrachten wir nun die der Substitution S_ν von ϑ entsprechende Substitution T_ν von Θ, so ist dieselbe in der Form

(25) $$T_\nu = \mathsf{A}_{i_1}^{\lambda_1} \mathsf{A}_{i_2}^{\lambda_2} \cdots \mathsf{A}_{i_\tau}^{\lambda_\tau}$$

darstellbar, wo die $\mathsf{A}_\varkappa$ wieder die den $A_\varkappa$ $(\varkappa = \pm 1, \pm 2, \cdots \pm \sigma)$ entsprechenden Substitutionen von Θ bedeuten. Seien

$$\mathsf{B}_1^{\pi_1},\ \mathsf{B}_2^{\pi_2},\ \cdots \mathsf{B}_q^{\pi_q}$$

die den in (18) auftretenden Substitutionen zweiter Kategorie entsprechenden Substitutionen von Θ, dann können wir diese Substitutionen in folgender Weise umformen.

Möge allgemein T_p eine beliebige derjenigen Substitutionen von Θ bedeuten, die den parabolischen unter den Substitutionen

$$A_1,\ A_2,\ \cdots A_\sigma$$

oder deren inversen entsprechen, dann sind die $\mathsf{B}_1, \cdots \mathsf{B}_q$ jedenfalls solche Substitutionen T_p. Denken wir uns T_p durch Transformation mittelst einer gewissen Substitution U in die canonische Form gesetzt

$$T_p = U^{-1} V U,$$

wo also

$$V y_i = m_i y_i + n_{i-1} y_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \cdots n;\ n_0 = 0),$$

und für $m_i \neq m_{i-1}$ stets $n_{i-1} = 0$ ist. Wenn wir diese Ausdrücke der $\mathsf{B}_\varkappa$ in (25) einführen und beachten, dass

$$T_p^{\lambda} = U^{-1} V^{\lambda} U$$

ıt, so haben wir in (25) erstens Substitutionen A_x, die den Substitu-ionen erster Kategorie in (18) entsprechen, mit der Exponentensumme

$$\sum_{x=1}^{p} \varepsilon_x,$$

weitens die den q Substitutionen zweiter Kategorie entsprechenden $\!T$ und U^{-1}, endlich die den $B_1, B_2, \cdots B_q$ entsprechenden canonischen ubstitutionen V beziehungsweise zu den Exponenten

$$\pi_1, \pi_2, \cdots \pi_q.$$

Zufolge unserer Voraussetzung haben die zu den Substitutionen T_p eziehungsweise V gehörigen Fundamentalgleichungen die Eigenschaft, ass ihre sämmtlichen Wurzeln den absoluten Betrag Eins besitzen, es ıt demnach für alle diese Substitutionen

$$|m_i| = 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots n).$$

Wenn nun z. B. alle n_{i-1} für ein gewisses V den Werth Null haben, › sind die Coefficienten von V^{λ} dem absoluten Betrage nach entweder leich Eins oder gleich Null, jenachdem dieselben der Diagonale von $^{r\lambda}$ angehören oder nicht. Allgemein, d. h. wenn für eine Substitution ´ nicht alle n_{i-1} verschwinden, bezeichnen wir für einen Augenblick e Substitution V durch

$$V = (a_{ix}) \qquad (i, x = 1, 2, \cdots n);$$

ınn ist also

$$a_{ix} = 0 \quad \text{für} \quad x > i,\ x < i - 1.$$

Diejenigen unter den Coefficienten $a_{ix}^{(\lambda)}$ der Substitution V^{λ}, die ›n Null verschiedene Werthe haben können, sind für ein positives λ der Form

$$a_{ix}^{(\lambda)} = \sum_{(i_1, i_2, \cdots i_{\lambda-1})} a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{\lambda-1} x}$$

$$\begin{pmatrix} i_1 = i, i-1;\ i_2 = i, i-1, i-2; \cdots i_{\lambda-1} = i, i-1, \cdots i-\lambda+1; \\ i > i_1 > i_2 > \cdots > i_{\lambda-1} > x \end{pmatrix}$$

ırstellbar. Die Anzahl der durch das Summenzeichen angedeuteten lieder ist für $x = i$ gleich Eins, für $x = i - 1$ gleich λ, für $x = i - 2$ eich

$$\frac{\lambda(\lambda - 1)}{1 \cdot 2},$$

s. w. Da x höchstens gleich n sein kann, ist demnach ein möglicher-eise von Null verschiedenes Element von V^{λ} eine Summe von höchstens

$$\frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}$$

Producten von je λ Elementen der Substitution V, wobei in jedem Producte höchstens $n-1$ Elemente mit verschiedenen Indices $(a_{i,i-1})$ auftreten. Es lässt sich folglich eine nur von den absoluten Beträgen der in den verschiedenen Substitutionen V auftretenden Elemente n_{i-1} abhängende, von λ unabhängige positive Grösse M so angeben, dass alle Elemente der Substitution V^{λ} dem absoluten Betrage nach kleiner sind als

$$M\lambda^n.$$

Wählen wir die Grösse M zugleich so gross, dass sie die Elemente aller Substitutionen

$$\mathsf{A}_1,\ \mathsf{A}_2,\ \cdots \mathsf{A}_\sigma$$

und deren inversen übertrifft und beachten, dass (vergl. Nr. 357, S. 352) die absoluten Beträge der Elemente einer aus zwei Substitutionen T, T_1 componirten Substitution kleiner sind wie $nM\cdot M_1$, wenn M, M_1 positive Zahlen bedeuten, die die absoluten Beträge der Elemente von T beziehungsweise T_1 übertreffen, so erkennen wir, dass die Elemente der Substitution T_ν und ebenso die der inversen Substitution T_ν^{-1} dem absoluten Betrage nach kleiner sind als

$$(nM)^{\sum\limits_{i=1}^{p}\varepsilon_i+2q}\cdot n^q M^q \pi_1^{\,n}\pi_2^{\,n}\cdots\pi_q^{\,n}$$
$$=(n\cdot M)^{\sum\limits_{i=1}^{p}\varepsilon_i+3q}\, e^{n\sum\limits_{i=1}^{q}\log \pi_i}.$$

Nun ist aber nach (19) und zufolge der für q gefundenen oberen Grenze $\frac{r'}{l}$

$$\sum_{i=1}^{q}\varepsilon_i+3q<r'\left(\frac{1}{K}+\frac{h+3}{l}\right),$$

mit Rücksicht auf (24) können wir also stets eine constante Grösse a so angeben, dass die Coefficienten der Substitutionen T_ν und T_ν^{-1} dem absoluten Betrage nach kleiner sind als

$$e^{r'a}.$$

Hieraus folgt aber genau ebenso wie im Falle wo ϑ keine parabolische Substitution enthält (Nr. 357, S. 352), mit Rücksicht auf die Ungleichung (13) die unbedingte Convergenz der Reihen $\mathfrak{z}_i(\eta)$ für hinreichend grosse Werthe von m.

Fassen wir die Resultate der Untersuchung dieses Kapitels zusammen, so können wir den folgenden Satz aussprechen:

Sei eine Fuchs'sche Gruppe ϑ von der in der Nr. 304 (S. 169 ff.) charakterisirten Beschaffenheit gegeben, für welche die Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma$$

und deren inverse eine Basis bilden, sei ferner Θ eine Gruppe unimodularer linearer homogener Substitutionen in den n Grössen

$$y_1, y_2, \cdots y_n,$$

die so beschaffen ist, dass jeder Substitution von ϑ eine wohlbestimmte Substitution von Θ entspricht, so convergiren die Reihen (1) beziehungsweise (5) bei hinreichend grossen Werthen der ganzen positiven Zahl m unbedingt für alle Werthe von η, die innerhalb des Orthogonalkreises liegen, sofern unter den Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1} = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_\sigma^{-1}$$

keine parabolische enthalten ist, bei beliebiger Wahl der Gruppe Θ, sofern jedoch die Gruppe ϑ auch parabolische Substitutionen enthält, dann und nur dann, wenn diejenigen Substitutionen von Θ, die parabolischen Substitutionen von ϑ entsprechen, Fundamentalgleichungen besitzen, deren sämmtliche Wurzeln dem absoluten Betrage nach gleich Eins sind.

Wenn die Gruppe Θ den angegebenen Bedingungen genügt, so sagen wir kurz, Θ erfülle die Convergenzbedingungen.

Drittes Kapitel.

361. Existenz der Systeme Fuchs'scher Zetafunctionen. Differentialgleichungen für die Reihen ξ und Z.

Sehen wir nun zu, was durch die Aufstellung der Reihen (1) beziehungsweise (5) (Nr. 355, S. 346) für den Existenzbeweis der Fuchs'schen Zetafunctionen gewonnen ist. Die Reihen (5), die wir in der Nr. 355 (S. 348) als homogene Functionen (Formen) der u_1, u_2 vom Grade $-2m$ charakterisirt haben, erfahren, wenn auf η eine Substitution der Fuchs'schen Gruppe ϑ, also auf die u_1, u_2 die entsprechende Substitution der mit ϑ isomorphen homogenen Gruppe t ausgeübt wird, die zugehörige Substitution der Gruppe Θ. Das Gleiche gilt also auch von den Ausdrücken, die wir erhalten, indem wir die Reihen

$$Z_1(u_1, u_2), \cdots Z_n(u_1, u_2)$$

mit einer beliebigen Fuchs'schen Function oder, was dasselbe heisst, mit einer invarianten eindeutigen Form nullten Grades der u_1, u_2 multipliciren.

Auf die Reihen $\xi_i(\eta)$ übertragen besagt dies, da nach dem Satze der Nr. 316 (S. 219) jede Fuchs'sche Function als Quotient von Thetafunctionen darstellbar ist, dass die Reihen $\xi_i(\eta)$, durch beliebige Thetafunctionen, die im Sinne der Nr. 313 (S. 209) zu der Zahl m gehören, dividirt, Ausdrücke liefern, die, wenn auf η eine Substitution von ϑ ausgeübt wird, die entsprechende Substitution von Θ erleiden. Die Bildungsweise der Reihen $\xi_i(\eta)$ lehrt aber sofort, dass diese Quotienten im Innern des Orthogonalkreises das Verhalten rationaler Functionen zeigen und in der Nähe der Ecken der der Gruppe ϑ entsprechenden Theilung eine Darstellung von der Form (α) (Nr. 351, S. 336) gestatten. Man erkennt dies durch Anwendung derselben Methode, mit Hülfe deren wir in der Nr. 310 (S. 193) die analoge Frage für die Fuchs'schen Thetareihen erledigt haben. Die gedachten Quotienten und folglich auch die Reihen $Z_i(u_1, u_2)$ beziehungsweise deren Producte in beliebige Fuchs'sche Functionen von η, sind demnach Fuchs'sche Zetafunctionen, die zu den Gruppen ϑ und Θ gehören.

Damit ist also der Existenzbeweis für die Fuchs'schen Zetafunctionen geliefert, sofern die Gruppe Θ die Convergenzbedingungen erfüllt.

Herr Poincaré hat gezeigt, dass auch umgekehrt jedes zu den Gruppen ϑ, Θ gehörige System Fuchs'scher Zetafunctionen, sofern Θ die Convergenzbedingungen erfüllt, dargestellt werden kann als Quotient eines Systems von Reihen $\xi_i(\eta)$ in eine Fuchs'sche Thetafunction mit der Gruppe ϑ. Wir gehen auf eine Darlegung dieses Nachweises nicht ein, sondern bemerken nur, dass derselbe durch ähnliche Betrachtungen erbracht wird, wie der analoge in der Nr. 316 (S. 216) gelieferte Beweis für die Darstellbarkeit einer beliebigen Fuchs'schen Function als Quotienten von Thetafunctionen. Für die Zwecke, die wir im Auge haben, genügt es darauf hinzuweisen, dass uns die Sätze 1), 2), 3) der Nr. 353 (S. 343) volle Einsicht gewähren in die Art und Weise, wie sich beliebige Systeme Fuchs'scher Zetafunctionen, die zu den Gruppen ϑ, Θ gehören, durch ein System der zu diesen Gruppen gehörigen Reihen $\xi_i(\eta)$ beziehungsweise $Z_i(u_1, u_2)$ und der zu ϑ gehörigen Fuchs'schen Function $x = f(\eta)$ darstellen lassen. Wir haben nämlich die Sätze:

1) Die Reihen

$$Z_1(u_1, u_2), \cdots Z_n(u_1, u_2)$$

genügen, als Function von $x = f(\eta)$ aufgefasst, einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung der Fuchs'schen Classe

$$\frac{d^n Z}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} Z}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n Z = 0, \tag{1}$$

für welche Θ die Monodromiegruppe darstellt, und in der demgemäss, da Θ nur unimodulare Substitutionen enthält, der Coefficient p_1 die logarithmische Ableitung einer rationalen Function von x ist. Diejenigen singulären Punkte der Differentialgleichung (1), wo sich die Integrale verzweigen, sind die den Ecken $\lambda_\varkappa$ des Fundamentalbereiches F_0 entsprechenden Werthe

$$a_\varkappa = f(\lambda_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1);$$

die zu $x = a_\varkappa$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung besitzt, wenn $\lambda_\varkappa$ im Innern des Einheitskreises liegt, rationale Wurzeln, die ganzzahlige Vielfache der zu $\lambda_\varkappa$ gehörigen Zahl $\frac{1}{g_\varkappa}$ sind; wenn $\lambda_\varkappa$ auf der Peripherie des Einheitskreises liegt, sind diese Wurzeln zu Folge der für Θ bestehenden Convergenzbedingungen real. Ueberdies kann

die Differentialgleichung (1) noch diejenigen x-Werthe zu singulären Punkten haben, die η-Werthen entsprechen, für welche eine der rationalen Functionen H_i beziehungsweise φ_i unendlich wird; in diesen Punkten verhalten sich die Integrale von (1) wie rationale Functionen von x.

2) Jedes System Fuchs'scher Zetafunctionen, welches zu den Gruppen ϑ und Θ gehört, befriedigt als Function von x aufgefasst eine lineare Differentialgleichung, die mit (1) zu derselben Art gehört und ist folglich in der Form

$$F_0 Z_i + F_1 \frac{dZ_i}{dx} + \cdots + F_{n-1} \frac{d^{n-1} Z_i}{dx^{n-1}} \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

darstellbar, wo die $F_0, F_1, \cdots F_{n-1}$ rationale Functionen von x bedeuten.

Die Differentialgleichung (1), der die $Z_i(u_1, u_2)$ als Functionen von x genügen, verwandelt sich durch die auf abhängige und unabhängige Variable auszuübende Transformation

$$(2) \qquad Z = u_1^{-2m} \xi, \quad x = f(\eta),$$

die wir, da

$$u_1^{-2m} = \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^m$$

ist, auch in die Form

$$(2a) \qquad Z = \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^m \xi, \quad x = f(\eta)$$

setzen können, in eine Differentialgleichung für ξ als Function von η mit in η eindeutigen Coefficienten, der die n Reihen

$$\xi_1(\eta), \ \xi_2(\eta), \cdots \xi_n(\eta)$$

Genüge leisten:

$$(3) \qquad \frac{d^n \xi}{d\eta^n} + q_1(\eta) \frac{d^{n-1} \xi}{d\eta^{n-1}} + \cdots + q_n(\eta) \xi = 0.$$

Setzen wir ferner

$$Z = e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx} \mathfrak{z}, \qquad \xi = e^{-\frac{1}{n}\int q_1 d\eta} \mathfrak{x},$$

so genügen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}$ den Differentialgleichungen

$$(1a) \qquad \frac{d^n \mathfrak{z}}{dx^n} + \mathfrak{p}_2 \frac{d^{n-2} \mathfrak{z}}{dx^{n-2}} + \cdots + \mathfrak{p}_n \mathfrak{z} = 0,$$

$$(3a) \qquad \frac{d^n \mathfrak{x}}{d\eta^n} + \mathfrak{q}_2 \frac{d^{n-2} \mathfrak{x}}{d\eta^{n-2}} + \cdots + \mathfrak{q}_n \mathfrak{x} = 0,$$

wo (vergl. Nr. 181, Bd. II, 1, S. 189, Gleichung (10))

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^{-\frac{n-1}{2}}$$

ist und die Coefficienten $\mathfrak{p}_\varkappa$ rationale Functionen von x, die Coefficienten $\mathfrak{q}_\varkappa$ eindeutige Functionen von η sind.

Wenn $p_1 = 0$ und $-2m = n - 1$ ist, wird Z mit $\mathfrak{z}$ und ξ mit $\mathfrak{x}$ identisch.

362. Die Invarianten der Differentialgleichung. Zetaformen. Simultane Covarianten. Combinanten.

Wir können nun auf Grund der Ergebnisse des fünften Kapitels des zehnten Abschnittes (Bd. II, 1, S. 185—199) sofort Ausdrücke bilden, die sich aus den $\mathfrak{q}_\varkappa$ und ihren Ableitungen beziehungsweise den $q_\varkappa$ und ihren Ableitungen nach η rational zusammensetzen und die, abgesehen von einer Potenz von

$$\frac{dx}{d\eta}$$

als Factor, rationale Functionen von x, also Fuchs'sche Functionen von η sind.

Solche Ausdrücke sind z. B. die $n - 2$ Invarianten

$$\vartheta_3,\ \vartheta_4,\ \cdots\ \vartheta_n$$

von den Gewichten $3, 4, \cdots n$. Bezeichnen wir wie a. a. O. durch $\vartheta_\nu(\eta)$ die Invariante ϑ_ν, gebildet aus den Coefficienten $\mathfrak{q}_\varkappa$, durch $\vartheta_\nu(x)$ dieselbe Invariante, gebildet aus den Coefficienten $p_\varkappa$, so ist

$$\vartheta_\nu(\eta) = \left(\frac{dx}{d\eta}\right)^\nu \vartheta_\nu(x) \qquad (\nu = 3, 4, \cdots n);$$

d. h. es sind die Ausdrücke

$$u_1^{-2\nu}\vartheta_\nu(\eta)$$

Fuchs'sche Functionen von η.

Die Invarianten ϑ_ν haben die Eigenschaft, bei einer beliebigen Transformation

$$\eta = \varphi(\xi)$$

der unabhängigen Variabeln der Differentialgleichung (3), abgesehen von dem Factor

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^\nu,$$

ungeändert zu bleiben. Damit aber rationale Combinationen der $q_\varkappa$ und ihrer Ableitungen, oder allgemeiner gesprochen der

$$\xi_1(\eta), \cdots \xi_n(\eta)$$

und ihrer Ableitungen nach η mit einer geeigneten Potenz von u_1 multiplicirt Fuchs'sche Functionen von η seien, ist nur erforderlich, dass sie 1), wenn η eine projective Substitution

$$S\eta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

erfährt, sich nur mit einer bestimmten Potenz von $(\gamma\eta + \delta)$ multipliciren, und dass sie 2) ungeändert bleiben, wenn auf die

$$\xi_1(\eta), \cdots \xi_n(\eta)$$

eine lineare homogene unimodulare Substitution ausgeübt wird.

Die zweite Eigenschaft bedingt nach dem Appell'schen beziehungsweise dem Picard-Vessiot'schen Satze, dass die betreffenden Ausdrücke rational in den $q_\varkappa$ und deren Ableitungen nach η darstellbar seien, in Bezug auf die erste Eigenschaft hingegen leisten die Invarianten ϑ_ν offenbar zuviel, da sie nicht nur bei projectiven, sondern bei beliebigen Transformationen der unabhängigen Variabeln η invariant sind. Um die vorliegende Frage mit gewissen Problemen der Algebra linearer Transformationen in Zusammenhang zu bringen, ist es zweckmässig, wieder an Stelle der Functionen von η die homogenen Formen in den u_1, u_2 zu betrachten.

Nehmen wir also das System der n Reihen

$$(4) \qquad Z_1(u_1, u_2), \cdots Z_n(u_1, u_2),$$

die wir kurz als Zetaformen vom Grade

$$-2m = r$$

bezeichnen wollen, dann hat eine simultane Covariante H dieses Formensystems vom Gewichte μ bekanntlich die Eigenschaft, sich abgesehen von der μ-ten Potenz der Substitutions-Determinante als Factor zu reproduciren, wenn die u_1, u_2 durch homogene lineare Functionen ihrer selbst ersetzt werden. D. h. wenn

$$(5) \qquad \begin{cases} v_1 = \delta u_1 + \gamma u_2 \\ v_2 = \beta u_1 + \alpha u_2 \end{cases}$$

und

$$Z_i(v_1, v_2) = \overline{Z}_i(u_1, u_2)$$

gesetzt wird, ist

$$(6) \qquad H(\overline{Z}_1(u_1, u_2), \cdots \overline{Z}_n(u_1, u_2);\ \ u_1, u_2)$$
$$= (\alpha\delta - \beta\gamma)^\mu H(Z_1(v_1, v_2), \cdots Z_n(v_1, v_2);\ \ v_1, v_2).$$

Unter den simultanen Covarianten eines Systems von Formen desselben Grades*), wie es uns hier in den $Z_i(u_1, u_2)$ vorliegt, giebt es, wie zuerst Sylvester bemerkt hat, stets solche, die abgesehen von einem Factor ungeändert bleiben, wenn die Elemente des Formensystems selbst einer linearen homogenen Substitution unterworfen werden; dieser Factor kann dann nur eine Potenz der Substitutions-Determinante sein. Solche Covarianten nennt man Combinanten des Formensystems.

Wenn also H eine Combinante ist, so befriedigt sie die Gleichung

$$H(SZ_1, \cdots SZ_n) = |\alpha_{i\varkappa}|^p H(Z_1, \cdots Z_n) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo

$$SZ_i = \alpha_{i1} Z_1 + \cdots + \alpha_{in} Z_n \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

eine beliebige lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante in den $Z_1, \cdots Z_n$ bedeutet.

Betrachten wir nun eine solche Combinante

$$H(Z_1, \cdots Z_n; u_1, u_2)$$

unseres Formensystems; dann ist, wenn (5) eine Substitution S_ν der Gruppe t bedeutet, zu Folge der Covarianteneigenschaft, und da S_ν unimodular ist,

$$(7) \qquad \begin{aligned} & H(\bar{Z}_1(u_1, u_2), \cdots \bar{Z}_n(u_1, u_2); u_1, u_2) \\ & = H(Z_1(v_1, v_2), \cdots Z_n(v_1, v_2); v_1, v_2). \end{aligned}$$

Da ferner

$$\bar{Z}_\varkappa(u_1, u_2) = Z_\varkappa(S_\nu u_1, S_\nu u_2) = T_\nu Z_\varkappa(u_1, u_2) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

ist, wo T_ν die dem S_ν entsprechende Substitution von Θ bedeutet, so haben wir

$$\begin{aligned} & H(\bar{Z}_1(u_1, u_2), \cdots \bar{Z}_n(u_1, u_2); u_1, u_2) \\ & = H(T_\nu Z_1(u_1, u_2), \cdots T_\nu Z_n(u_1, u_2); u_1, u_2), \end{aligned}$$

und dies ist zufolge der Combinanteneigenschaft, und da T_ν unimodular sein sollte, weiter gleich

$$H(Z_1(u_1, u_2), \cdots Z_n(u_1, u_2); u_1, u_2);$$

es besteht also nach (7) die Gleichung

*) In der Invariantentheorie der ganzen rationalen Formen bezeichnet man die Dimension in Bezug auf die Variabeln als Ordnung, die Dimension in Bezug auf die Coefficienten als Grad; da wir es hier mit transcendenten Formen zu thun haben, können wir die Bezeichnung Grad für die Dimension in den Variabeln im gewohnten Sinne beibehalten.

$$H(Z_1(u_1, u_2), \cdots Z_n(u_1, u_2); u_1, u_2)$$
$$= H(Z_1(S_\nu u_1, S_\nu u_2), \cdots Z_n(S_\nu u_1, S_\nu u_2); S_\nu u_1, S_\nu u_2),$$

d. h. H bleibt als Function der u_1, u_2 ungeändert, wenn auf diese beiden Grössen eine Substitution S_ν der Gruppe t ausgeübt wird.

Wenn sich also H aus den $Z_i(u_1, u_2)$ und deren Ableitungen rational zusammensetzt, so ist es eine zu der Gruppe ϑ beziehungsweise t gehörige eindeutige invariante Form der u_1, u_2 und zwar eine Fuchs'sche Function von η.

Gehen wir wieder auf die inhomogene Gestalt unserer Ausdrücke zurück.

Wenn $H(u_1, u_2)$ eine Combinante des Formensystems $[Z_i(u_1, u_2)]$ und in den u_1, u_2 homogen vom Grade ϱ ist, so wollen wir auch

$$u_1^{-\varrho} H(u_1, u_2) = \mathsf{H}(\eta)$$

als eine Combinante ϱ-ten Grades des Functionssystems

$$\xi_1(\eta), \cdots \xi_n(\eta)$$

bezeichnen, dessen Elemente $\xi_i(\eta)$ selbst als Functionen vom Grade $-2m = r$ der Variabeln η aufzufassen sind. Eine solche Combinante verwandelt sich also nach Multiplication mit u_1^ϱ in eine Fuchs'sche Function von η.

363. Invarianz der Differentialgleichung für die Reihen ξ. Systeme von Formen, ihre Jacobi'sche Combinante und Differentialgleichung.

Die Differentialgleichung (3) hat die Eigenschaft, sich durch die Transformation

$$(8) \qquad S_\nu \zeta = \eta, \qquad \bar{\xi} = \left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^m \xi$$

in die Differentialgleichung

$$(3\nu) \qquad \frac{d^n \bar{\xi}}{d\zeta^n} + \overset{\nu}{q}_1(\zeta) \frac{d^{n-1}\bar{\xi}}{d\zeta^{n-1}} + \cdots + \overset{\nu}{q}_n(\zeta)\bar{\xi} = 0$$

zu verwandeln, für welche, da

$$\xi_i(\eta) = \xi_i(S_\nu \zeta) = \left(\frac{d\zeta}{dS_\nu \zeta}\right)^m T_\nu \xi_i(\zeta)$$

und folglich

$$\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^m \xi_i(\eta) = T_\nu \xi_i(\zeta)$$

ist, die Ausdrücke

$$T_\nu \xi_1(\zeta), \cdots T_\nu \xi_n(\zeta),$$

also auch die

$$\xi_1(\zeta), \cdots \xi_n(\zeta)$$

selbst ein Fundamentalsystem von Integralen darstellen. Die Differentialgleichung (3ν) geht demnach aus (3) hervor, indem man in (3) ζ an die Stelle von η und $\bar{\xi}$ an die Stelle von ξ schreibt; d. h. mit anderen Worten, die Differentialgleichung (3) verhält sich gegenüber den Transformationen (8) invariant.

Man kann nun der Differentialgleichung (3) eine solche Form zuertheilen, dass ihre Invarianz bei den Transformationen (8) unmittelbar in Evidenz tritt, indem nämlich nur solche Ausdrücke in dieser Form auftreten, die Combinanten des Functionssystems

$$\xi_1(\eta), \cdots \xi_n(\eta)$$

sind.

Betrachten wir zu diesem Ende allgemein ein System von n linearunabhängigen Functionen der Variabeln η

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n,$$

denen eine gewisse Gradzahl g beigelegt werden möge in dem Sinne, dass sie aus homogenen Functionen g-ten Grades der u_1, u_2

$$z_1(u_1, u_2), \quad z_2(u_1, u_2), \cdots z_n(u_1, u_2)$$

durch die Gleichungen

$$u_1^g \zeta_\varkappa = z_\varkappa(u_1, u_2) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

entstanden zu denken sind. Dann befriedigen die ζ_i als Functionen von η die homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$(9) \quad (-1)^n \begin{vmatrix} \zeta & \zeta' & \cdots & \zeta^{(n)} \\ \zeta_1 & \zeta_1' & \cdots & \zeta_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \zeta_n & \zeta_n' & \cdots & \zeta_n^{(n)} \end{vmatrix} = D\zeta^{(n)} - D'\zeta^{(n-1)} + D_2\zeta^{(n-2)} + \cdots + D_n\zeta = 0,$$

wo die Accente Ableitungen nach η bedeuten und

$$D = D(\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n) = \begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_1' & \cdots & \zeta_1^{(n-1)} \\ \zeta_2 & \zeta_2' & \cdots & \zeta_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \zeta_n & \zeta_n' & \cdots & \zeta_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

gesetzt wurde.

Wenn man die $(n-1)$-ten partiellen Ableitungen der homogenen Functionen $z_\varkappa(u_1, u_2)$ nach u_1, u_2 durch die Ableitungen der $\zeta_\varkappa$ nach η ausdrückt, so ergiebt sich

$$\frac{\partial^{n-1} z_\varkappa}{\partial u_1^{n-1}} = a_{11}^{(n-1)} \zeta_\varkappa + a_{12}^{(n-1)} \zeta_\varkappa' + \cdots + a_{1n}^{(n-1)} \zeta_\varkappa^{(n-1)},$$

$$\frac{\partial^{n-1} z_\varkappa}{\partial u_1^{n-2} \partial u_2} = \qquad a_{22}^{(n-1)} \zeta_\varkappa' + \cdots + a_{2n}^{(n-1)} \zeta_\varkappa^{(n-1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^{n-1} z_\varkappa}{\partial u_2^{n-1}} = \qquad a_{nn}^{(n-1)} \zeta_\varkappa^{(n-1)},$$

wo, wie man durch Induction leicht verificirt,

$$a_{11}^{(n-1)} = g(g-1)\cdots(g-n+2)\, u_1^{g-n+1},$$

$$a_{22}^{(n-1)} = (g-1)\cdots(g-n+2)\, u_1^{g-n+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{nn}^{(n-1)} = \qquad u_1^{g-n+1}$$

ist. Hiernach erhält man

$$\left| \frac{\partial^{n-1} z_\varkappa}{\partial u_1^{n-i-1} \partial u_2^i} \right| = g(g-1)^2 \cdots (g-n+2)^{n-1} u_1^{n(g-n+1)} D(\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n),$$
$$\binom{\varkappa = 1, 2, \cdots n}{i = 0, 1, \cdots n-1}$$

d. h. der Function D ist der Grad

$$\gamma = n(g-n+1)$$

beizulegen. Die linke Seite dieser Gleichung ist bekanntlich eine simultane Covariante, und zwar eine Combinante (die sogenannte Jacobi'sche Combinante) des Formensystems $z_1, z_2, \cdots z_n$, wir haben also im Sinne der eingeführten Terminologie in

$$D(\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n)$$

eine Combinante des Functionssystems $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$.

Bilden wir nun die n-te Ueberschiebung der Combinante

$$u_1^{n(g-n+1)} D = \Delta(u_1, u_2)$$

über die Form g-ten Grades

$$z(u_1, u_2) = u_1^g \zeta,$$

so ist dieselbe (vergl. Nr. 298, S. 146) vom Grade

$$g + \gamma - 2n = (n+1)(g-n),$$

also vom selben Grade wie die durch Multiplication mit der geeigneten Potenz von u_1 homogen gemachte linke Seite der Differentialglei-

chung (9), die wir nach Analogie der für $D(\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n)$ gefundenen Formel in der Form

$$\left|\frac{\partial^n z_\varkappa}{\partial u_1^{n-i}\partial u_2^{i}}\right| = g(g-1)^2\cdots(g-n+1)^n u_1^{(n+1)(g-n)} D(\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n)$$
$$\begin{pmatrix} i, \varkappa = 0, 1, \cdots n \\ z_0 = z \end{pmatrix}$$

darstellen können. Drückt man die partiellen Ableitungen der Formen

$$z(u_1, u_2), \quad \varDelta(u_1, u_2)$$

nach u_1, u_2 durch die nach η genommenen (sogenannten **einseitigen**) Differentialquotienten der Functionen ζ und D aus und setzt mit Herrn **Hilbert** allgemein für eine beliebige Function f von η, der die Gradzahl h beigelegt werden kann,

$$(f)_\lambda = \frac{1}{h(h-1)\cdots(h-\lambda+1)}\frac{d^\lambda f}{d\eta^\lambda} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots),$$

so erhält man für die n-te Ueberschiebung der Form $\varDelta(u_1, u_2)$ über $z(u_1, u_2)$ den Ausdruck

$$(\varDelta, z)^{(n)} = u_1^{(n+1)(g-n)}(D, \zeta)^{(n)},$$

woselbst

$$(D, \zeta)^{(n)} = \sum_{\varkappa=0}^{n}(-1)^\varkappa \frac{n(n-1)\cdots(n-\varkappa+1)}{1\cdot 2\cdots \varkappa}(D)_\varkappa(\zeta)_{n-\varkappa}$$

gesetzt wurde. Wir bezeichnen diesen letzteren Ausdruck, der also nichts Anderes ist, wie die inhomogene Gestalt von

$$(\varDelta, z)^{(n)},$$

als die n-te **Ueberschiebung der Functionen** D, ζ übereinander.

Die $\varkappa = 0$ und $\varkappa = 1$ entsprechenden Glieder in $(D, \zeta)^{(n)}$ stimmen offenbar mit den beiden ersten Gliedern der mit dem Factor

$$\frac{1}{g(g-1)\cdots(g-n+1)}$$

multiplicirten linken Seite der Differentialgleichung (9) überein; die Differenz

(10) $$\frac{(-1)^n}{g(g-1)\cdots(g-n+1)} D(\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n) - (D, \zeta)^{(n)}$$

ist demnach ein Differentialausdruck von nur $(n-2)$-ter Ordnung in ζ.

Die linke Seite der Differentialgleichung (9) ist als Determinante des Functionssystems ζ, $\zeta_1, \cdots \zeta_n$ eine simultane Covariante und Combinante dieses Functionssystems vom Grade $(n+1)(g-n)$; da auch

$$(D, \zeta)^{(n)}$$

eine simultane Covariante desselben Grades ist, und Covarianten desselben Grades auch vom selben Gewichte sind, so ist auch die Differenz (10) eine Covariante vom Grade $(n+1)(g-n)$ desselben Functionssystems.

Wir setzen nun

$$(-1)^n D(\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n) = g(g-1)\cdots(g-n+1)[(D, \zeta)^{(n)} + \bar{D}_2 \cdot (\zeta)_{n-2} + \cdots + \bar{D}_n \cdot \zeta]$$

und bilden die $(n-2)$-te Ueberschiebung von $\bar{D}_2$ über ζ

$$(\bar{D}_2, \zeta)^{(n-2)},$$

dann stimmt das erste $(\zeta)_{n-2}$ enthaltende Glied dieser Ueberschiebung mit

$$\bar{D}_2 \cdot (\zeta)_{n-2}$$

überein, und wir haben folglich

$$(-1)^n D(\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n) = g(g-1)\cdots(g-n+1)[(D, \zeta)^{(n)} + (\bar{D}_2, \zeta)^{(n-2)} + \bar{D}_3 \cdot (\zeta)_{n-3} + \cdots + \bar{D}_n \cdot \zeta].$$

Fahren wir so fort, so erhalten wir schliesslich die linke Seite der Differentialgleichung (9) als Aggregat von Ueberschiebungen

$$(D, \zeta)^{(n)} + (P_2, \zeta)^{(n-2)} + (P_3, \zeta)^{(n-3)} + \cdots + (P_n, \zeta)^{(0)} \tag{11}$$

dargestellt, wo

$$P_2 = \bar{D}_2, \cdots$$

gesetzt wurde.

Wir behaupten nun zuvörderst, dass diese Ueberschiebungen sämmtlich vom Grade $(n+1)(g-n)$ und dass die Coefficienten

$$D, P_2, P_3, \cdots P_n$$

dieser Darstellung Combinanten des Functionssystems $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$ sind.

364. Invariante Gestalt einer linearen Differentialgleichung, insbesondere der für die Zetaformen. Allgemeine Bemerkungen.

Zum Beweise bedienen wir uns nach dem Vorgange des Herrn A. Hirsch des folgenden Satzes von Herrn Hilbert.

Sei

$$f_\varkappa(u_1, u_2) = u_1^{\varrho_\varkappa} \varphi_\varkappa(\eta) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots)$$

ein System von Formen, $g_\varkappa$ der Grad der Form $f_\varkappa$ oder der Function $\varphi_\varkappa$, dann ist jede isobare Function $F(\eta)$ vom Gewichte p der Ausdrücke

$$(\varphi_\varkappa)_0,\ (\varphi_\varkappa)_1, \cdots (\varphi_\varkappa)_{\lambda_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots),$$

die in den (einseitigen) Differentialquotienten jeder einzelnen der Functionen $\varphi_\varkappa$ homogen von dem Grade $\gamma_\varkappa$ ist und die der Differentialgleichung

$$\sum_{\varkappa=1,2,\cdots}\left\{(\varphi_\varkappa)_0 \frac{\partial F}{\partial(\varphi_\varkappa)_1} + 2(\varphi_\varkappa)_1 \frac{\partial F}{\partial(\varphi_\varkappa)_2} + 3(\varphi_\varkappa)_2 \frac{\partial F}{\partial(\varphi_\varkappa)_3} + \cdots\right\} = 0$$

Genüge leistet, eine simultane Covariante des Functionssystems $\varphi_\varkappa$ vom Grade

$$\sum_{\varkappa=1,2,\cdots} g_\varkappa \gamma_\varkappa - 2p.$$

Wie bereits oben bemerkt wurde, ist der Ausdruck (10) oder

$$\bar{D} = \bar{D}_2 \cdot (\zeta)_{n-2} + \bar{D}_3 \cdot (\zeta)_{n-3} + \cdots + \bar{D}_n \cdot \zeta$$

eine simultane Covariante vom Grade $(n+1)(g-n)$ des Functionssystems

$$\zeta,\ \zeta_1,\ \zeta_2, \cdots \zeta_n$$

und genügt demnach der partiellen Differentialgleichung

$$(\zeta)_0 \frac{\partial \bar{D}}{\partial(\zeta)_1} + 2(\zeta)_1 \frac{\partial \bar{D}}{\partial(\zeta)_2} + \cdots$$
$$+ \sum_{\varkappa=1}^{n}\left\{(\zeta_\varkappa)_0 \frac{\partial \bar{D}}{\partial(\zeta_\varkappa)_1} + 2(\zeta_\varkappa)_1 \frac{\partial \bar{D}}{\partial(\zeta_\varkappa)_2} + \cdots\right\} = 0.$$

Da diese Differentialgleichung eine Identität darstellt, so müssen, wenn wir nach den Grössen

$$(\zeta)_{n-2},\ (\zeta)_{n-3}, \cdots \zeta$$

ordnen, die Coefficienten jeder einzelnen dieser Grössen verschwinden. Der Coefficient von $(\zeta)_{n-2}$ gleich Null gesetzt giebt

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}\left\{(\zeta_\varkappa)_0 \frac{\partial \bar{D}_2}{\partial(\zeta_\varkappa)_1} + 2(\zeta_\varkappa)_1 \frac{\partial \bar{D}_2}{\partial(\zeta_\varkappa)_2} + \cdots\right\} = 0,$$

und hieraus folgt nach dem Hilbert'schen Satze, dass $\bar{D}_2$ eine simultane Covariante der $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$ vom Grade

$$n(g-n+1) - 4$$

ist. Da aber D_2 eine rationale Differentialfunction der Coefficienten der Differentialgleichung (9) ist, so haben wir in $\bar{D}_2$ oder P_2 nicht nur eine Covariante sondern eine Combinante des Functionssystems

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n.$$

Bilden wir also

$$(P_2, \zeta)^{(n-2)},$$

so ist dieser Ausdruck ebenso wie $\bar{D}$ eine simultane Covariante der

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$$

vom Grade $(n+1)(g-n)$, das Gleiche gilt folglich auch von der Differenz

$$\bar{D} - (P_2, \zeta)^{(n-2)} = \bar{\bar{D}}_3 \cdot (\zeta)_{n-3} + \cdots + \bar{\bar{D}}_n \cdot \zeta,$$

und durch ähnliche Schlüsse wie oben findet man nunmehr, dass auch

$$\bar{D}_3 = P_3$$

eine Combinante des Functionssystems $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$ und zwar eine solche vom Grade

$$n(g-n+1)-6$$

ist, u. s. w.

Wir haben also in der That in (11) eine Form der linken Seite unserer Differentialgleichung (9), in welcher die einzelnen Terme simultane Covarianten des Grades $(n+1)(g-n)$ des Functionssystems

$$\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$$

und die Coefficienten

$$D, P_2, P_3, \cdots P_n$$

Combinanten des Functionssystems $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$ von den Graden

$$\gamma, \gamma-4, \gamma-6, \cdots \gamma-2n$$

sind. Multipliciren wir nun noch den Ausdruck (11) mit

$$u_1^{(n+1)(g-n)}$$

und setzen dieses Product gleich Null, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$(12) \quad (\Delta, z)^{(n)} + (\Pi_2, z)^{(n-2)} + (\Pi_3, z)^{(n-3)} + \cdots + \Pi_n \cdot z = 0$$

für die homogene Function z vom g-ten Grade in den beiden Variabeln u_1, u_2, die durch das Formensystem

(13) $$z_1(u_1, u_2), \quad z_2(u_1, u_2), \cdots z_n(u_1, u_2)$$

befriedigt wird und deren Coefficienten

(14) $$\Delta(u_1, u_2), \quad \Pi_\varkappa(u_1, u_2) = u_1^{n(g-n+1)-2\varkappa} P_\varkappa \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n)$$

Combinanten des Formensystems (13) von den angegebenen Graden sind.

Wir bezeichnen (12) als die invariante Gestalt der Differentialgleichung (9).

Identificiren wir also die Differentialgleichung (9) mit der durch die Reihen

$$\xi_1(\eta), \; \xi_2(\eta), \cdots \xi_n(\eta)$$

befriedigten Differentialgleichung (3) der Nr. 361 (S. 368), nachdem wir die letztere Gleichung noch mit dem Factor

$$e^{-\int q_1 d\eta}$$

multiplicirt haben, so ist

$$g = -2m$$

zu setzen, und die Gleichung (12) wird durch die Fuchs'schen Zetaformen

$$Z_1(u_1, u_2), \; Z_2(u_1, u_2), \cdots Z_n(u_1, u_2)$$

befriedigt, während die Coefficienten (14) invariante eindeutige Formen der u_1, u_2 von ganzen und geradzahligen Graden, also Fuchs'sche Functionen von η sind.

Die Differentialgleichung (1) (Nr. 316, S. 367), der die $Z_\varkappa(u_1, u_2)$ als Functionen der Fuchs'schen Function $x = f(\eta)$ Genüge leisten, hat vor der Differentialgleichung (3), der die $\xi_\varkappa(\eta)$ als Functionen von η genügen, den Vorzug, dass die Coefficienten von (1) einen leicht zu übersehenden analytischen Charakter besitzen, indem sie nämlich rationale Functionen von x sind. Dagegen hat (3) vor (1) die Eigenschaft voraus, von

$$x = f(\eta)$$

völlig unabhängig zu sein, also kein Element zu enthalten, welches in der Definition der Fuchs'schen Zetafunctionen nicht unmittelbar vorkömmt.

Die invariante Gestalt (12) der Differentialgleichung (3), die durch das System der Zetaformen

$$Z_1(u_1, u_2), \cdots Z_n(u_1, u_2)$$

befriedigt wird, vereinigt die Vorzüge der Differentialgleichungen (1) und (3), indem sie erstens x nicht enthält und

zweitens der analytische Charakter ihrer Coefficienten (14) als Fuchs'scher Functionen von η in übersichtlicher Weise gegeben ist.

Wenn man in der Differentialgleichung (9) den Coefficienten der höchsten Ableitung nicht gleich der Determinante eines Fundamentalsystems wählt, so kann man die invariante Gestalt gleichwohl auf dieselbe Weise herstellen, nur folgt dann nicht gleich eine $(n-2)$-te Ueberschiebung auf die n-te, sondern es tritt noch eine $(n-1)$-te Ueberschiebung auf; wir können aber die gewählte Form der Differentialgleichung (9) um so eher beibehalten, als wir von einer unimodularen Gruppe Θ ausgegangen waren, so dass also die Determinante des Fundamentalsystems absolut invariant bei den Substitutionen der Monodromiegruppe ist.

Die invariante Gestalt einer linearen Differentialgleichung ist in der neueren Zeit besonders von den Herren Klein, Waelsch, Pick, Hurwitz, Hirsch u. A. vielfach angewandt und insbesondere auch in den Fällen mit Vortheil benutzt worden, wo die Coefficienten der Differentialgleichung rationale oder algebraische Functionen der unabhängigen Variabeln sind. Will man jedoch eine beliebige lineare Differentialgleichung, deren Coefficienten etwa rationale Functionen der unabhängigen Variabeln x sind, in die invariante Gestalt überführen, so muss man der abhängigen Variabeln y einen bestimmten Grad g beilegen, d. h. man hat, nachdem x gleich dem Quotienten

$$x = \frac{x_2}{x_1}$$

zweier homogener Variabeln gesetzt worden ist, $x_1^g y$ als Form g-te Grades der x_1, x_2 aufzufassen, wobei aber in den meisten Fällen d Grad g ganz willkürlich, d. h. nicht durch den analytischen Charakt der Integralfunction y von x bestimmt ist. Eine derartige Schwieri keit tritt auch schon auf, wenn man die Darstellung eines beliebig Systems zu den Gruppen ϑ, Θ gehöriger Fuchs'scher Zetafunction von η durch die Formen

$$Z_1, Z_2, \cdots Z_n,$$

die nach dem Satze 2) der Nr. 361 (S. 368) stets in der Form

$$F_0(x) Z_\varkappa + F_1(x) \frac{dZ_\varkappa}{dx} + \cdots + F_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} Z_\varkappa}{dx^{n-1}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

erfolgen kann, in eine der Form (12) der linken Seite der Differentialgleichung (9) analoge invariante Gestalt setzen will.

In diesem Falle liefert jedoch der in der Nr. 361 (S. 367) erwähnte Poincaré'sche Satz ein Hülfsmittel für die Gradbestimmung, die dem analytischen Charakter des betreffenden Systems Fuchs'scher Zetafunctionen gemäss, also wenigstens bis zu einer gewissen Grenze, nicht vollständig der Willkür anheimgegeben ist. Wir versagen es uns hier auf eine Erörterung der Frage einzugehen, wie auf Grund der angedeuteten von Herrn Poincaré für ein System Fuchs'scher Zetafunctionen gegebenen Gradbestimmung auch für die allgemeine Lösung einer beliebigen linearen Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe, eine der Natur der Integralfunction angemessene Gradbestimmung vorgenommen werden könnte, und bemerken nur, dass z. B. im Falle einer normalen Differentialgleichung zweiter Ordnung die durch die Gleichung (4) der Nr. 326 (S. 249) definirte Zahl ν in gewissem Sinne als der Grad der allgemeinen Lösung aufgefasst werden kann.

Viertes Kapitel.

365. Discussion eines Riemann'schen Problems.

Wir wollen nunmehr aus der bisher entwickelten Theorie der Zetafunctionen nach zwei Seiten hin Folgerungen zu ziehen suchen, die geeignet sein werden, die principielle Bedeutung dieser Theorie hervortreten zu lassen.

Erwägen wir zunächst, was sich aus dem für die Fuchs'schen Zetafunctionen gelieferten Existenzbeweise ergiebt.

In der Nr. 162 (Bd. II, 1, S. 109) hatten wir die Aufgabe geschildert, von welcher ausgehend Riemann in seinen nachgelassenen Aufzeichnungen die allgemeine Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen, deren Integrale — in unserer modernen Terminologie gesprochen — sich überall bestimmt verhalten, aufzubauen unternommen hat. Diese Aufgabe war die folgende:

Seien σ lineare homogene Substitutionen in n Variabeln

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_\sigma$$

willkürlich gegeben; dann mögen n Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ der Variabeln x bestimmt werden, die in der ganzen Ebene mit Ausnahme gewisser willkürlich vorgeschriebener Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

endlich und stetig sind, die, wenn x einfache Umläufe um die Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma$$

vollzieht, d. h. genauer gesprochen, die von diesen Punkten aus nach $a_{\sigma+1} = \infty$ hin gelegten Querschnitte im positiven Sinne überschreitet, beziehungsweise die Substitutionen $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_\sigma$ erfahren, und die überdies an keiner dieser Stellen und auch nicht für $x = \infty$ unbestimmt werden.

Wir behaupten, dass unter gewissen über die Substitutionen

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_\sigma$$

zu machenden speciellen Annahmen die Existenz eines Functionssystems $[y_i]$ von der geforderten Beschaffenheit durch die Theorie der Zetafunctionen erwiesen werden kann. Diese speciellen Annahmen sind die folgenden:

Betrachten wir die zu den Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\sigma$ und

$$A_{\sigma+1} = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_\sigma^{-1}$$

gehörigen Fundamentalgleichungen, so wollen wir voraussetzen, **dass die sämmtlichen Wurzeln dieser Fundamentalgleichungen den absoluten Betrag Eins besitzen.**

Wenn für eine der Substitutionen $A_\varkappa (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma+1)$ die sämmtlichen Wurzeln der zugehörigen Fundamentalgleichung ganzzahlige Einheitswurzeln sind, und die canonische Form der Substitution $A_\varkappa$ nur Diagonalglieder enthält (d. h. also, dass entweder alle diese Wurzeln von einander verschieden oder doch so beschaffen sind, dass die zu einer λ-fachen Wurzel ω_α gehörige, in dem Theorem der Nr. 37 (Bd. I, S. 127) definirte Zahl $\varrho_{\alpha 1}$ den Werth λ besitzt), so bezeichnen wir mit $g_\varkappa$ die kleinste positive ganze Zahl, für welche diese sämmtlichen Wurzeln der Gleichung

$$\omega^{g_\varkappa} = 1$$

Genüge leisten. Wenn für eine der Substitutionen $A_\varkappa$ die beiden angegebenen Bedingungen nicht gleichzeitig erfüllt sind, so nehmen wir das entsprechende $g_\varkappa$ gleich Unendlich. Für ein $A_\varkappa$, wo das zugehörige $g_\varkappa$ einen endlichen Werth besitzt, ist dann offenbar

$$A_\varkappa^{g_\varkappa} = 1.$$

Die so definirten Zahlen $g_1, g_2, \cdots g_{\sigma+1}$ bestimmen in Verbindung mit den gegebenen singulären Stellen

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \quad a_{\sigma+1} = \infty,$$

von denen wir, ohne dadurch die Allgemeinheit zu beschränken, zwei, etwa a_1, a_2, in die Punkte 0, 1 verlegen können, eine **normale Differentialgleichung**

$$(\alpha) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} = q(x)\, u$$

im Sinne der Nr. 326 (S. 249). Wollten wir uns auf den in der erwähnten Nummer (S. 251) angeführten Poincaré'schen Satz in seiner allgemeinen Fassung stützen, so könnten wir sagen: Die in dem Coefficienten $q(x)$ auftretenden noch unbestimmten Parameter (vergl. a. a. O.) lassen sich stets und nur auf eine Weise so bestimmen, dass x eine eindeutige, und zwar wenn

$$-\frac{1}{\nu}=\sum_{i=1}^{\sigma+1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_i}\right)-1>0$$

ist, eine Fuchs'sche, wenn $-\frac{1}{\nu}<0$ eine rationale, wenn $-\frac{1}{\nu}=0$ ist, eine doppeltperiodische Function des Integralquotienten η wird.

Wenn wir uns dagegen des Poincaré'schen Satzes nur in der beschränkten Fassung bedienen, wir wir ihn in den Nummern 341—348 bewiesen haben, so können wir doch auf Grund des Satzes der Nr. 348 (S. 327) behaupten:

Es lässt sich stets eine der Differentialgleichung (α) subordinirte Fuchs'sche Differentialgleichung

$$(\beta) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2}=\bar{q}(x)\,u$$

angeben, die nebst den singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$ eventuell noch gewisse andere singuläre Stellen

$$a_{\sigma+2}, \cdots a_{\sigma+\tau+1}$$

besitzt. Man kann z. B. (β) allemal so einrichten, dass die Umkehrungsfunction des Integralquotienten die gegebenen Stellen

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$$

und überdies noch gewisse andere nicht gegebene Stellen auslässt.

Sei u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von (β),

$$\frac{u_2}{u_1}=\eta,$$

und sei ϑ die zu η gehörige projective, t die zu u_1, u_2 gehörige homogene Monodromiegruppe dieser Differentialgleichung. Mögen ferner

$$A_1, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+2}, \cdots A_{\sigma+\tau+1}$$

die Substitutionen bedeuten, die η beziehungsweise (u_1, u_2) erfahren, wenn x die von den Punkten

$$a_1, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+2}, \cdots a_{\sigma+\tau+1}$$

aus nach $a_{\sigma+1}=\infty$ hin gelegten Querschnitte im positiven Sinne überschreitet, während

$$A_{\sigma+1}=A_1^{-1}A_2^{-1}\cdots A_\sigma^{-1}A_{\sigma+2}^{-1}\cdots A_{\sigma+\tau+1}^{-1}$$

gesetzt wird, so ist die Fuchs'sche Gruppe ϑ mit der aus den Substitutionen

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_\sigma, \mathsf{A}_{\sigma+1}$$

als Basis gebildeten Gruppe Θ in dem Sinne isomorph, dass jeder Substitution von ϑ eine bestimmte Substitution von Θ entspricht; insbesondere entsprechen den Substitutionen $A_\varkappa$ die Substitutionen $\mathsf{A}_\varkappa$ für $\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1$, und den Substitutionen $A_\varkappa$ für $\varkappa = \sigma + 2, \cdots \sigma + \tau + 1$ entspricht die identische Substitution von Θ.

366. **Lösung des Riemann'schen Problems unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen.**

Wir wollen nun von den Substitutionen $\mathsf{A}_1, \cdots \mathsf{A}_\sigma$ dadurch zu unimodularen Substitutionen $\bar{\mathsf{A}}_1, \cdots \bar{\mathsf{A}}_\sigma$ übergehen, dass wir jedes Element von $\mathsf{A}_\varkappa$ durch die n-te Wurzel aus der Determinante dieser Substitution dividiren, dann bleibt die in Bezug auf die Fundamentalgleichungen der $\mathsf{A}_\varkappa$ gemachte Voraussetzung auch für die $\bar{\mathsf{A}}_\varkappa$ bestehen, und die aus den Substitutionen

$$\bar{\mathsf{A}}_1, \bar{\mathsf{A}}_2, \cdots \bar{\mathsf{A}}_\sigma$$

und deren inversen als Basis gebildete Gruppe $\bar{\Theta}$ ist in demselben Sinne wie Θ selbst mit der Fuchs'schen Gruppe ϑ isomorph.

Bilden wir mit Hülfe der Gruppen ϑ und $\bar{\Theta}$ die Fuchs'schen Zetaformen

$$Z_\varkappa(u_1, u_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{T}_\nu^{-1} \varphi_\varkappa(S_\nu u_1, S_\nu u_2) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo S_ν die Substitutionen der Gruppen ϑ beziehungsweise t, $\bar{T}_\nu$ die entsprechenden Substitutionen von $\bar{\Theta}$ durchläuft und die $\varphi_\varkappa(u_1, u_2)$ rationale homogene Functionen vom Grade $-2m$ der u_1, u_2 bedeuten, so convergiren diese Reihen für hinreichend grosse Werthe der positiven ganzen Zahl m, da die Fundamentalgleichungen derjenigen Substitutionen von $\bar{\Theta}$, die parabolischen Substitutionen von ϑ entsprechen, zufolge der für die Substitutionen $\mathsf{A}_\varkappa$ getroffenen Festsetzung nur Wurzeln vom absoluten Betrage Eins besitzen. Die $Z_\varkappa(u_1, u_2)$ befriedigen dann als Functionen von x aufgefasst eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit in x rationalen Coefficienten

$$(\gamma) \qquad \frac{d^n Z}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} Z}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x) Z = 0,$$

die der Fuchs'schen Classe angehört und nebst den singulären Punkten

$$a_1, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1},$$

in denen sich die Integrale verzweigen, noch gewisse andere singuläre Stellen

$$b_1, b_2, \cdots b_\varrho$$

besitzt, in deren Umgebung die Integrale das Verhalten rationaler Functionen zeigen, und die einerseits unter den Punkten $a_{\sigma+1}, \cdots a_{\sigma+\tau+1}$, andererseits unter denjenigen x-Werthen zu suchen sind, die den innerhalb des Einheitskreises der η-Ebene gelegenen Unendlichkeitsstellen der rationalen Functionen

$$u_1^{2m}\varphi_\varkappa(u_1, u_2) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

von η entsprechen.

Die Functionen $Z_1, Z_2, \cdots Z_n$ von x erfahren, wenn x den von dem Punkte $a_\varkappa$ aus nach $x = \infty$ hin gelegten Querschnitt im positiven Sinne überschreitet, die unimodulare Substitution $\bar{\mathsf{A}}_\varkappa$; wir können aber, indem wir diese Functionen mit einem Ausdrucke von der Form

$$A = (x - a_1)^{\lambda_1} \cdots (x - a_\sigma)^{\lambda_\sigma} (x - b_1)^{\mu_1} \cdots (x - b_\varrho)^{\mu_\varrho}$$

multipliciren, zu Ausdrücken $y_1, y_2, \cdots y_n$ übergehen, die beim Ueberschreiten der gedachten Querschnitte die Substitutionen

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_\sigma$$

erleiden und überdies an den Stellen $b_1, \cdots b_\varrho$ nicht mehr unendlich werden. Dabei sind die $\lambda_1, \cdots \lambda_\sigma$ durch die Determinanten der Substitutionen $\mathsf{A}_\varkappa$ und zwar nur abgesehen von ganzen Zahlen bestimmt, während die $\mu_1, \cdots \mu_\varrho$ als positive ganze Zahlen so zu wählen sind, dass μ_i grösser ist als die höchste Ordnungszahl, von welcher ein Integral der Differentialgleichung (γ) für $x = b_i$ unendlich wird.

Die so bestimmten $y_1, y_2, \cdots y_n$ erfüllen die Anforderungen des Riemann'schen Problems, sie befriedigen eine lineare Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe

$$(\delta) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + q_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + q_n(x)\,y = 0,$$

die die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$, $a_{\sigma+1} = \infty$ zu wesentlichen singulären Stellen besitzt, die aber im Allgemeinen, d. h. wenn die $\sigma \cdot n^2$ Coefficienten der gegebenen Substitutionen

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_\sigma$$

von einander unabhängige Grössen sind, noch ausserwesentlich singuläre Stellen (mindestens deren $\sigma - 2$, vergl. Nr. 227, Bd. II, 1, S. 388) aufweist. Das allgemeinste Functionssystem, das den Anforderungen des Riemann'schen Problems genügt, bildet das dem Fundamental-

systeme $[y_\varkappa]$ von (δ) entsprechende Fundamentalsystem einer mit (δ) zu derselben Classe gehörigen linearen Differentialgleichung, und man hat nunmehr nur noch die Ergebnisse des achten Kapitels des elften Abschnittes (Bd. II, 1, S. 365 ff.) heranzuziehen, um ein solches Functionssystem durch Angabe der Anzahl der ausserwesentlich singulären Stellen, beziehungsweise der genauen Werthe der stets realen Wurzeln der zu den wesentlich singulären Stellen gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen eindeutig zu bestimmen.

Wir haben also das Resultat:

Auf Grund der Ergebnisse des sechzehnten Abschnittes und der Theorie der Fuchs'schen Zetafunctionen lässt sich die Existenz der durch das Riemann'sche Problem geforderten Functionen in dem Falle beweisen, wo die Fundamentalgleichungen der gegebenen Substitutionen $A_1, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1}$ nur Wurzeln vom absoluten Betrage Eins besitzen, und es ist zugleich eine Methode gefunden, mittelst der man im Stande ist, das allgemeinste Functionssystem von der gewünschten Beschaffenheit wirklich herzustellen.

Auf den Unterschied, der zwischen dem Riemann'schen Probleme und der Aufgabe, eine lineare Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe zu bestimmen, deren Monodromiegruppe vorgeschrieben ist, besteht, wurde bereits in der Nr. 227 (Bd. II, 1, S. 227 ff.) hingewiesen; wir bemerken nur noch, dass der Lösung der letzteren Aufgabe, die wir für den Fall $n = 2$ im sechsten Kapitel des elften Abschnittes (Bd. II, 1, S. 323 ff.) nach dem Vorgange des Herrn Klein gegeben haben, auch die Voraussetzung zu Grunde liegt, dass die Fundamentalgleichungen der gegebenen Substitutionen $A_1, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1}$ Wurzeln mit dem absoluten Betrage Eins besitzen.

Wenn wir von einer linearen Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe, die durch ihre Coefficienten gegeben ist, ausgehen, so hängen die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen im Allgemeinen, d. h. wenn wir die in den Coefficienten der Differentialgleichung enthaltenen Parameter willkürlich also als unbestimmte Constanten wählen, von diesen Parametern, insbesondere von den Werthen der singulären Punkte ab. Gehen wir dagegen von dem Riemann'schen Probleme aus, so können wir die Substitutionen $A_1, \cdots A_\sigma$ auf die mannigfaltigste Weise so einrichten, dass für sie die in Bezug auf die Wurzeln der Fundamentalgleichungen erforderlichen Bedingungen erfüllt sind und dass ihre Coefficienten von den ebenfalls willkürlich vorzuschreibenden Werthen der singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ unabhängig sind. Dann gehört die Differentialgleichung, der die Functionen

$[y_x]$ genügen, in die Kategorie derjenigen, deren Monodromiegruppe von den in den Coefficienten auftretenden Parametern $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ unabhängig ist, und es bestehen für dieselbe folglich die im neunten Kapitel des elften Abschnittes (Bd. II, 1, S. 398 ff.) entwickelten Fuchs'schen Sätze. Dies ist also insbesondere der Fall, wenn wir die singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ sowohl wie die Coefficienten der Substitutionen $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_\sigma$ (die letzteren allerdings gemäss den für die Wurzeln der Fundamentalgleichungen festzuhaltenden Beschränkungen) willkürlich, d. h. als unbestimmte Constanten wählen, wir kommen also, wenn wir von dem Riemann'schen Probleme ausgehen, gewissermassen „im Allgemeinen" zu Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe, deren Monodromiegruppe von den Werthen der wesentlichen singulären Stellen unabhängig sind.

367. Endliche Gruppen. Uebersicht über die Resultate von C. Jordan und Fuchs.

Wir betrachten nun noch den Fall, wo die gegebenen Substitutionen

$$\mathsf{A}_1, \cdots \mathsf{A}_\sigma$$

so beschaffen sind, dass die aus denselben und ihren inversen als Basis gebildete Gruppe Θ eine endliche ist, d. h. nur eine endliche Anzahl von Substitutionen enthält.

Wenn T_x eine beliebige Substitution von Θ bedeutet, so muss, da Θ eine endliche Gruppe sein sollte, jedenfalls eine positive ganze Zahl ν_x existiren, für welche

$$T_x^{\nu_x} = 1$$

ist; sei z. B. ν_x die kleinste Zahl von dieser Beschaffenheit. Dann folgt durch ähnliche Schlüsse wie die, die in der Nr. 33 (Bd. I, S. 107 ff.) dazu geführt haben, die Fundamentalgleichung einer Substitution in die Form (3) jener Nummer (a. a. O. S. 108) zu setzen, dass alle Wurzeln der zu T_x gehörigen Fundamentalgleichung die Gleichung

$$\omega^{\nu_x} = 1$$

befriedigen müssen, also ganzzahlige Einheitswurzeln sind. Die Substitutionen einer endlichen Gruppe Θ haben demnach stets die Eigenschaft, dass die sämmtlichen Wurzeln der zu ihnen gehörigen Fundamentalgleichungen dem absoluten Betrage nach gleich Eins sind, d. h. in dem jetzt zu betrachtenden Falle befriedigen die $\mathsf{A}_1, \cdots \mathsf{A}_\sigma$ jeden-

falls die bei unserem Existenzbeweise für die Functionen des Riemann'schen Problems erforderlichen Bedingungen.

Seien nun $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ die gegebenen singulären Punkte (wir bemerken, dass hier ebensowohl wie beim allgemeinen Riemann'schen Problem die Substitutionen

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_\sigma$$

nicht sämmtlich von einander verschieden zu sein brauchen) und bedeute ϑ eine Fuchs'sche Gruppe, die mit der endlichen Gruppe Θ in dem Sinne isomorph ist, dass jeder Substitution von ϑ eine bestimmte Substitution von Θ entspricht. ϑ kann z. B. als die Gruppe einer Fuchs'schen Function $x = f(\eta)$ genommen werden, die die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ auslässt. Bilden wir die zu den Gruppen ϑ, $\overline{\Theta}$ (wo $\overline{\Theta}$ die mit Θ isomorphe unimodulare Gruppe bedeutet) gehörigen Zetaformen

$$Z_i(u_1, u_2) = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \overline{T}_\varkappa^{-1} \varphi_i(S_\varkappa u_1, S_\varkappa u_2) \qquad (i=1, 2, \cdots n)$$

und bedeute $\vartheta^{(1)}$ diejenige ausgezeichnete Untergruppe von ϑ, deren Substitutionen die identische Substitution von Θ entspricht, so bleiben die $Z_i(u_1, u_2)$ als Functionen von η aufgefasst offenbar ungeändert, wenn η eine Substitution von $\vartheta^{(1)}$ erfährt. Die Gruppe $\vartheta^{(1)}$ ist aber, wie man sofort übersieht, eine Untergruppe von ϑ mit endlichem Quotienten, und folglich eine Fuchs'sche Gruppe im Sinne der allgemeinen in der Nr. 322 (S. 236) aufgestellten Definition. Seien $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ zwei zu der Gruppe $\vartheta^{(1)}$ gehörige Fuchs'sche Functionen, durch die sich jede zu $\vartheta^{(1)}$ gehörige Fuchs'sche Function rational darstellen lässt (vergl. Nr. 323, S. 241), so besteht zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ eine algebraische Beziehung und sowohl die $Z_i(u_1, u_2)$ als auch $x = f(\eta)$ sind rational durch $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ darstellbar. Daraus folgt, dass die $Z_i(u_1, u_2)$ und ebenso die $y_1, y_2, \cdots y_n$ algebraische Functionen von x sind, was ja übrigens auch schon aus dem Satze der Nr. 158 (Bd. II, 1, S. 99) unmittelbar hervorgeht.

Man kann also algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit in x rationalen Coefficienten und beliebig vorgeschriebenen wesentlichen singulären Stellen bilden, wenn man die endlichen Gruppen linearer Substitutionen in n Variabeln kennt.

Im Falle $n = 2$ haben wir in der Nr. 301 (S. 159) die sämmtlichen endlichen Gruppen linearer Substitutionen aufgestellt, aber auch für $n > 2$ haben sich mehrere Mathematiker mit der Aufgabe, alle endlichen Gruppen linearer Substitutionen in n Variabeln zu bestimmen,

mit Erfolg beschäftigt. Namentlich hat Herr C. Jordan im 84. Bande des Crelle'schen Journals eine Methode entwickelt, die für jeden gegebenen Werth von n die Auffindung aller endlichen Gruppen linearer Substitutionen gestattet und hat mit Hülfe dieser Methode für $n = 3$ die Aufgabe auch wirklich gelöst. Mit dem Falle $n = 3$ haben sich dann noch die Herren Klein, Valentiner u. A. beschäftigt und die Resultate des Herrn Jordan theils vervollständigt theils bestätigt. Die Frage nach den algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung wurde von Herrn Jordan in der genannten Arbeit ebenfalls discutirt und dann von Herrn Fuchs auf einem anderen Wege (Acta Mathematica, Bd. I) untersucht.

Herr Fuchs geht dabei von den homogenen nicht linearen Relationen mit constanten Coefficienten aus, die (vergl. Nr. 186, Bd. II, 1, S. 208) zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems einer algebraischen integrirbaren linearen Differentialgleichung von höherer als der zweiten Ordnung bestehen. Betrachtet man das allgemeine Integral y einer algebraisch integrirbaren Differentialgleichung n-ter Ordnung, so lässt sich für dasselbe der Begriff des reducirten Werthesystems in ähnlicher Weise aufstellen, wie für $n = 2$ (vergl. Nr. 295, S. 136). Das reducirte Werthesystem umfasst nämlich diejenigen Zweige der Function y, die so beschaffen sind, dass nicht der Quotient zweier dieser Zweige constant ist. Aus den Untersuchungen des Herrn Jordan kann man schliessen, dass allgemein für ein gegebenes n die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthesystems des allgemeinen Integrals eine angebbare obere Grenze besitzt. Herr Fuchs hat für $n = 3$ diese obere Grenze durch die ihm eigenthümlichen Methoden ermittelt, sein Resultat spricht sich in dem folgenden Satze aus:

Sei

$$(\alpha) \qquad f(y_1, y_2, y_3) = 0$$

die homogene Relation m-ten Grades $(m > 1)$ mit constanten Coefficienten, die die Integralcurve $\mathfrak{C}$ (vergl. Nr. 191, Bd. II, 1. S. 227) einer algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichung dritter Ordnung mit rationalen Coefficienten darstellt. Wenn das Geschlecht p der durch (α) definirten algebraischen ebenen Curve grösser ist als Eins, so ist die Anzahl der Elemente des reducirten Werthesystems des allgemeinen Integrals y nicht grösser als vier. Ist $p = 1$, so ist die Anzahl dieser Elemente gleich zwei, drei, vier oder sechs. Endlich lassen sich für $p = 0$ die Integrale der Differentialgleichung dritter Ordnung, abgesehen von der Wurzel aus einer rationalen Function als Factor, als ganze homogene Functionen m-ten Grades der Integrale

einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten darstellen.

Wir erinnern daran, dass nach dem von Herrn Fuchs in eben dieser Abhandlung bewiesenen Satze, dessen Verallgemeinerung wir in der Nr. 191 (Bd. II, 1, S. 226) kennen gelernt haben, das Bestehen der Relation (α), wenn $m > 2$ ist, schon allein die algebraische Integrabilität der Differentialgleichung bedingt.

368. Rückblick auf die Untersuchungen der Abschnitte XIII—XVI. Satz von Fuchs.

In neuerer Zeit ist Herr Fuchs von anderweitigen allgemeineren Gesichtspunkten ausgehend zu einem auf die algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichungen oder, was auf dasselbe hinauskommt, die endlichen Gruppen linearer Substitutionen bezüglichen Theoreme gelangt. Wir wollen diese Entwickelungen von Herrn Fuchs hier darlegen, weil dieselben geeignet sind, die auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung bezüglichen Untersuchungen, mit denen wir uns in den Abschnitten XIII—XVI beschäftigt haben, im Lichte einer allgemeineren Auffassung erscheinen zu lassen und auf diese Weise der Forschung den Weg zur Verallgemeinerung dieser Untersuchungen auf Differentialgleichungen von höherer als zweiter Ordnung zu ebnen.

Wir haben uns, abgesehen von den auf allgemeinere Fragen hinweisenden Nummern 321—324, in den genannten Abschnitten ausschliesslich mit solchen Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Fuchs'schen Classe von der Form

$$(\alpha) \qquad \frac{d^2 u}{d z^2} = q(z) u$$

beschäftigt, deren projective Monodromiegruppe die Eigenschaft besass, dass ihre Substitutionen Verschiebungen in Bezug auf einen gewissen (realen, imaginären oder auf einen Punkt reducirten) Orthogonalkreis sind. In der That besitzt die Legendre'sche Differentialgleichung (L) (S. 1), allgemeiner jede Gauss'sche Differentialgleichung, für welche die

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3$$

reciproke ganze Zahlen oder Null sind und auch jede Differentialgleichung, deren unabhängige Variable eine Fuchs'sche Function des Integralquotienten ist, diese Eigenschaft, und das Gleiche gilt offenbar von jeder algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichung zwei-

nung von der Form (α), da, wie in den Nummern
wurde, die projective Monodromiegruppe einer solchen Differen-
ichung mit der Gruppe einer rational umkehrbaren Dreiecksfunc-
dentisch sein muss.

Wenn wir wie gewöhnlich den Mittelpunkt des Orthogonalkreises
en Punkt $\eta = 0$ verlegen, so lautet die Gleichung dieses Kreises

$$\eta\bar{\eta} - c = 0,$$

, c positiv, negativ oder Null sein kann, und die projectiven Sub-
itutionen

$$\eta' = S\eta = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta} \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma=1)$$

die Verschiebungen in Bezug auf den Orthogonalkreis (β) darstellen,
sind durch die Gleichung (VIII) der Nr. 282 (S. 89), d. h. in unserem
Falle durch die Gleichung

(γ) $$\eta\bar{\eta} - c = |\gamma\eta+\delta|^2(\eta'\bar{\eta}' - c),$$

charakterisirt.

Führen wir in gewohnter Weise durch die Gleichungen

$$u_1 = \sqrt{\frac{dz}{d\eta}}, \quad u_2 = \eta\sqrt{\frac{dz}{d\eta}}$$

dasjenige Fundamentalsystem von (α) ein, als dessen Quotient η er-
scheint, und betrachten an Stelle der projectiven Substitutionen $S\eta$
die entsprechenden homogenen unimodularen Substitutionen

$$u_1' = Su_1 = \pm(\delta u_1 + \gamma u_2),$$
$$u_2' = Su_2 = \pm(\beta u_1 + \alpha u_2),$$

so lautet nach Multiplication mit $u_1 \cdot \bar{u}_1$ die Gleichung des Orthogonal-
kreises

$$u_2\bar{u}_2 - cu_1\bar{u}_1 = 0,$$

und die Bedingung (γ) nimmt die Form an

$$u_2'\bar{u}_2' - cu_1'\bar{u}_1' = u_2\bar{u}_2 - cu_1\bar{u}_1,$$

d. h. man kann die Eigenschaft der homogenen unimodularen Substit
S einfach dahin aussprechen, dass diese Substitution d
den u_1, u_2 und ihren conjugirten Werthen $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ bilineare
mit realen Coefficienten

$$u_2\bar{u}_2 - cu_1\bar{u}_1$$

Wir können also die zu Beginn dieser
vorangegangenen Unter

Wenn die Differentialgleichung (α) eine Gauss'sche Differentialgleichung mit eindeutig umkehrbarem Integralquotienten oder allgemein eine Fuchs'sche Differentialgleichung ist oder aus einer solchen Differentialgleichung durch eine Transformation von der Form

$$z = \varphi(x), \quad u = \sqrt{\frac{1}{\varphi'(x)}}\, v,$$

wo $\varphi(x)$ eine rationale Function bedeutet, hervorgeht, also insbesondere wenn die Differentialgleichung (α) algebraisch integrirbar ist, so giebt es stets eine aus den Elementen u_1, u_2 eines Fundamentalsystems und den conjugirten Werthen $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ gebildete bilineare Form mit realen Coefficienten

$$u_2\bar{u}_2 - c u_1 \bar{u}_1,$$

die ungeändert bleibt, wenn die u_1, u_2 eine Substitution der homogenen Monodromiegruppe der Differentialgleichung (α) erfahren, oder mit anderen Worten, wenn z einen beliebigen geschlossenen Umlauf in seiner Ebene vollzieht.

Eine analoge Eigenschaft besteht nun, wie Herr Fuchs gezeigt hat, für eine algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichung beliebiger Ordnung; Herr Fuchs erschliesst dies aus einem allgemeinen Theorem, welches folgendermassen lautet.

Sei

$$(1) \qquad \frac{d^n u}{dz^n} + p_2(z)\frac{d^{n-2}u}{dz^{n-2}} + \cdots + p_n(z) u = 0$$

eine von dem Gliede mit $\frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}}$ befreite lineare Differentialgleichung, deren Coefficienten eindeutige Functionen der unabhängigen Variabeln z sind, und möge die unimodulare Monodromiegruppe Θ dieser Differentialgleichung die Eigenschaft haben, dass die zu einer beliebigen Substitution von Θ gehörige Fundamentalgleichung durch die reciproken Werthe der Wurzeln derjenigen Gleichung befriedigt wird, die aus dieser Fundamentalgleichung dadurch hervorgeht, dass ihre sämmtlichen Coefficienten durch ihre conjugirten Werthe ersetzt werden; dass ferner unter den Substitutionen von Θ wenigstens eine enthalten ist, deren Fundamentalgleichung lauter von einander verschiedene Wurzeln vom absoluten Betrage Eins besitzt, so giebt es eine aus den Elementen eines Fundamentalsystems

$$u_1, u_2, \cdots u_n$$

und den conjugirten Werthen

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots \bar{u}_n$$

gebildete bilineare Form mit realen, constanten Coefficientenverhältnissen von der Gestalt

$$a_1 u_1 \bar{u}_1 + a_2 u_2 \bar{u}_2 + \cdots + a_n u_n \bar{u}_n,$$

die durch alle Substitutionen von Θ in sich selbst transformirt wird.

369. Eigenschaften der Substitutionen, die den Anforderungen des Fuchs'schen Satzes genügen.

Bezeichnen wir mit

$$\left.\begin{array}{l} S = (a_{i\varkappa}), \\ |a_{i\varkappa}| = 1 \end{array}\right\} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

eine beliebige Substitution von Θ und denken uns die zu S gehörige Fundamentalgleichung

(1) $$|a_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}\omega| = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

nach Potenzen von ω geordnet

(2) $$(-1)^n \omega^n + \alpha_1 \omega^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\omega + 1 = 0,$$

so sind die Coefficienten

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n-1}, \alpha_n = 1$$

offenbar in der Form

(3) $$\alpha_l = (-1)^{n-l} \Sigma R_l \qquad (l = 1, 2, \cdots n)$$

darstellbar, wo R_l eine Hauptsubdeterminante (Subdeterminante, deren Diagonalglieder unter den Diagonalgliedern $a_{\varkappa\varkappa}$ der ursprünglichen Determinante enthalten sind) l-ter Ordnung der Determinante

$$|a_{i\varkappa}| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

bedeutet und die Summation über alle Hauptsubdeterminanten l-ter Ordnung zu erstrecken ist.

Zufolge der Voraussetzung hat die Gleichung (2) mit der Gleichung

$$\omega^n + \bar{\alpha}_{n-1}\omega^{n-1} + \cdots + \bar{\alpha}_1 \omega + (-1)^n = 0$$

sämmtliche Wurzeln gemein, es ist also

$$\alpha_\varkappa = (-1)^n \bar{\alpha}_{n-\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

d. h. mit Rücksicht auf die Gleichungen (3)

$$\Sigma R_\varkappa = \Sigma \bar{R}_{n-\varkappa}. \tag{4}$$

Möge wie gewöhnlich $A_{i\varkappa}$ die zu dem Elemente $a_{\varkappa i}$ gehörige Subdeterminante $(n-1)$-ter Ordnung von

$$|a_{i\varkappa}| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

bedeuten, so dass also

$$S^{-1} = (A_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

ist, dann lautet die Gleichung (4) insbesondere für $\varkappa = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \bar{A}_{ii}. \tag{5}$$

Sei Ω eine Substitution von Θ, die so beschaffen ist, dass die sämmtlichen Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$ der zu Ω gehörigen Fundamentalgleichung von einander verschieden und dem absoluten Betrage nach gleich Eins sind (die Existenz mindestens einer solchen Substitution wurde ja vorausgesetzt), dann können wir uns das der Gruppe Θ zu Grunde liegende Fundamentalsystem

$$u_1, u_2, \cdots u_n$$

als das zu Ω gehörige canonische Fundamentalsystem gewählt denken, so dass also

$$\Omega u_\varkappa = \omega_\varkappa u_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

ist.

Bedeute ferner

$$T = (b_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

irgend eine andere Substitution von Θ, so müssen zufolge der über die Gruppe Θ gemachten Annahme die den Gleichungen (5) analogen Gleichungen auch für die Substitution

$$(c_{i\varkappa}) = (a_{i\varkappa}) \Omega^r (b_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

erfüllt sein, wo r eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Nun ist aber

$$(c_{i\varkappa})^{-1} = (b_{i\varkappa})^{-1} \Omega^{-r} (a_{i\varkappa})^{-1},$$

wir haben folglich (vergl. Nr. 30, Bd. I, S. 92)

$$c_{i\varkappa} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{l\varkappa} \omega_l^r,$$

$$C_{i\varkappa} = \sum_{l=1}^{n} B_{il} A_{l\varkappa} \omega_l^{-r},$$

wo $C_{i\varkappa}$, $B_{i\varkappa}$ beziehungsweise die zu den Elementen $c_{\varkappa i}$, $b_{\varkappa i}$ der Determinanten

$$|c_{i\varkappa}|,\ |b_{i\varkappa}| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

gehörigen Subdeterminanten bedeuten. Die der Gleichung (5) analoge Gleichung lautet daher für die Substitution $(c_{i\varkappa})$

$$\text{(5a)} \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\bar{B}_{il}\bar{A}_{li} - a_{il}b_{li})\,\omega_l^{\,r} = 0,$$

da ja

$$\omega_l^{-1} = \bar{\omega}_l \qquad (l = 1, 2, \cdots n)$$

sein sollte.

Setzen wir in (5a) für r die Werthe $0, 1, \cdots n-1$ ein und beachten, dass die $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$ von einander verschieden, also die Determinante

$$|\omega_\varkappa^{i-1}| \neq 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

ist, so schliessen wir, dass

$$\text{(6)} \qquad \sum_{i=1}^{n}(\bar{B}_{il}\bar{A}_{li} - a_{il}b_{li}) = 0 \qquad (l = 1, 2, \cdots n)$$

sein muss.

Nehmen wir insbesondere

$$T = (b_{i\varkappa}) = \Omega,$$

so ergiebt sich aus (6) die Gleichung

$$\text{(7)} \qquad \bar{A}_{ii} = a_{ii} \qquad (i = 1, 2, \cdots n).$$

Diese Gleichung besteht für jede Substitution von Θ, also auch für die Substitution $(c_{i\varkappa})$; mit Rücksicht auf die Ausdrücke der $c_{i\varkappa}$, $C_{i\varkappa}$ haben wir demnach

$$\sum_{l=1}^{n}(\bar{B}_{il}\bar{A}_{li} - a_{il}b_{li})\,\omega_l^{\,r} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

und wenn wir hierin dem r wieder die Werthe $0, 1, \cdots n-1$ beilegen, so folgt wie oben, da die $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$ von einander verschieden sind,

$$\text{(8)} \qquad \bar{B}_{il}\bar{A}_{li} = a_{il}b_{li} \qquad (i, l = 1, 2, \cdots n).$$

Nehmen wir nunmehr

$$T = (b_{i\varkappa}) = (a_{i\varkappa})^{-1} = (A_{i\varkappa}) = S^{-1},$$

so ergeben die Gleichungen (8)

(9) $$\bar{a}_{il}\bar{A}_{li} = a_{il}A_{li} \qquad (i, l = 1, 2, \cdots n),$$

und wenn wir andererseits

$$(b_{i\varkappa}) = (a_{i\varkappa})$$

setzen, so folgt aus (8)

(10) $$\bar{A}_{il}\bar{A}_{li} = a_{il}a_{li} \qquad (i, l = 1, 2, \cdots n).$$

Endlich ergiebt das Gleichungssystem (8) für

$$(b_{i\varkappa}) = (a_{i\varkappa})\,\Omega^r\,(a_{i\varkappa})$$

die Gleichungen

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \bar{A}_{i\varkappa}\bar{A}_{\varkappa l}\omega_\varkappa^{\ r} \cdot \bar{A}_{li} = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{i\varkappa}a_{\varkappa l}\omega_\varkappa^{\ r} \cdot a_{il},$$

und wenn wir hierin abermals $r = 0, 1, \cdots n-1$ nehmen, so schliessen wir aus der Verschiedenheit der $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$, dass

(11) $$\bar{A}_{i\varkappa}\bar{A}_{\varkappa l}\bar{A}_{li} = a_{l\varkappa}a_{\varkappa i}a_{il} \qquad (i, \varkappa, l = 1, 2, \cdots n)$$

sein muss.

370. Beweis des Fuchs'schen Satzes und Anwendung desselben auf endliche Gruppen.

Wenn die Integrale $u_1, u_2, \cdots u_n$ der Differentialgleichung (1) die Substitution

$$S = (a_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

der Monodromiegruppe Θ erfahren, so erleiden die conjugirten Werthe

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots \bar{u}_n$$

dieser Integrale die conjugirte Substitution

$$\bar{S} = (\bar{a}_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n).$$

Betrachten wir also die bilineare Form

$$\varphi(u_1, \cdots u_n, \bar{u}_1, \cdots \bar{u}_n) = \sum_{\varkappa=1}^{n} A_\varkappa u_\varkappa \bar{u}_\varkappa,$$

deren Coefficienten $A_\varkappa$ von z unabhängige Grössen sind, so verwandelt sich dieselbe durch Anwendung der Substitution S in

$$\tilde{\varphi}(u_1, \cdots u_n, \bar{u}_1, \cdots \bar{u}_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\varkappa=1}^{n} P_{i\varkappa} u_i \bar{u}_\varkappa,$$

wo

$$P_{i\varkappa} = \varphi(a_{1i}, \cdots a_{ni}, \bar{a}_{1\varkappa}, \cdots \bar{a}_{n\varkappa}) = \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha a_{\alpha i} \bar{a}_{\alpha\varkappa}$$

gesetzt wurde. Bestimmen wir die $A_1, \cdots A_n$ aus den Gleichungen

$$P_{12} = 0, \; P_{13} = 0, \cdots P_{1n} = 0,$$

so ergiebt sich

$$A_1 a_{11} : A_2 a_{21} : \cdots : A_n a_{n1} = \bar{A}_{11} : \bar{A}_{12} : \cdots : \bar{A}_{1n},$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen (7)

(12)
$$\frac{A_\varkappa}{A_1} = \frac{\bar{A}_{1\varkappa}}{a_{\varkappa 1}} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n).$$

Die Gleichung (9) lehrt also, dass die Verhältnisse der Grössen

$$A_1, A_2, \cdots A_n$$

real sind.

Setzen wir die Ausdrücke (12) in $P_{i\varkappa}$ ein, so ergiebt sich

$$\frac{P_{i\varkappa}}{A_1} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha i} \bar{a}_{\alpha\varkappa} \frac{\bar{A}_{1\alpha}}{a_{\alpha 1}} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n).$$

Nun ist aber nach Gleichung (11)

$$\bar{A}_{\alpha\varkappa} \bar{A}_{\varkappa 1} \bar{A}_{1\alpha} = a_{1\varkappa} a_{\varkappa\alpha} a_{\alpha 1}$$

und folglich

$$\frac{\bar{a}_{\alpha\varkappa} \bar{A}_{1\alpha}}{a_{\alpha 1}} = \frac{\bar{a}_{\alpha\varkappa} a_{1\varkappa} a_{\varkappa\alpha} a_{\alpha 1}}{a_{\alpha 1} \bar{A}_{\alpha\varkappa} \bar{A}_{\varkappa 1}},$$

oder mit Rücksicht auf (9) und (10)

$$\frac{\bar{a}_{\alpha\varkappa} \bar{A}_{1\alpha}}{a_{\alpha 1}} = \frac{A_{\varkappa\alpha}}{a_{\varkappa\alpha}} \cdot \frac{a_{1\varkappa} a_{\varkappa\alpha}}{\bar{A}_{\varkappa 1}} = \frac{A_{\varkappa\alpha} a_{1\varkappa}}{\bar{A}_{\varkappa 1}},$$

d. h. wir erhalten

$$\frac{P_{i\varkappa}}{A_1} = \frac{a_{i\varkappa}}{\bar{A}_{\varkappa 1}} \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha i} A_{\varkappa\alpha} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n).$$

Hieraus folgt

$$P_{i\varkappa} = 0, \quad \text{für } i \neq \varkappa,$$

$$\frac{P_{\varkappa\varkappa}}{A_1} = \frac{a_{1\varkappa}}{\bar{A}_{\varkappa 1}} = \frac{a_{1\varkappa} a_{\varkappa 1}}{\bar{A}_{\varkappa 1} a_{\varkappa 1}},$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen (10)

$$\frac{P_{\varkappa\varkappa}}{A_1} = \frac{\bar{A}_{1\varkappa}}{a_{\varkappa 1}} = \frac{A_\varkappa}{A_1},$$

d. h. wir haben

$$P_{\varkappa\varkappa} = A_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

und folglich

$$\widetilde{\varphi}_1 = \varphi .$$

Wenn wir also die Coefficienten der Form φ durch die Gleichungen (12) bestimmen, so bleibt diese Form ungeändert, wenn die $u_1, u_2, \cdots u_n$ die Substitution S erleiden.

Für die beliebige Substitution

$$T = (b_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

von Θ wird ebenso die Form

$$B_1 u_1 \bar{u}_1 + B_2 u_2 \bar{u}_2 + \cdots + B_n u_n \bar{u}_n$$

mit den realen Coefficientenverhältnissen

$$\frac{B_\varkappa}{B_1} = \frac{\bar{B}_{1\varkappa}}{b_{\varkappa 1}} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n)$$

ungeändert bleiben, wenn auf die $u_1, u_2, \cdots u_n$ diese Substitution T ausgeübt wird; da aber für irgend zwei Substitutionen S, T der Gruppe Θ die Gleichungen (8) gelten, so haben wir

$$\frac{B_{1\varkappa}}{b_{\varkappa 1}} = \frac{a_{1\varkappa}}{\bar{A}_{\varkappa 1}},$$

oder nach (10)

$$\frac{\bar{B}_{1\varkappa}}{b_{\varkappa 1}} = \frac{A_{1\varkappa}}{a_{\varkappa 1}};$$

es ist also

$$\frac{B_\varkappa}{B_1} = \frac{A_\varkappa}{A_1} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n),$$

d. h. die invariante bilineare Form ist für jede Substitution von Θ, abgesehen von einem constanten Factor, dieselbe, oder mit anderen Worten:

Die Form φ bleibt ungeändert, wenn auf die $u_1, u_2, \cdots u_n$ irgend eine Substitution der Gruppe Θ angewandt wird.

Damit ist aber der Beweis des am Schlusse der Nr. 368 (S. 393) ausgesprochenen Fuchs'schen Satzes geliefert.

Wir bemerken, ohne auf den Beweis einzugehen, dass, wie Herr Fuchs gezeigt hat, dieser Satz auch eine Umkehrung zulässt, und dass der Satz sowohl wie seine Umkehrung auch dann gültig bleiben, wenn in der gegebenen Differentialgleichung das Glied mit der $(n-1)$-ten Ableitung nicht fehlt.

Sei nun Θ eine endliche Gruppe homogener linearer unimodularer

Substitutionen und bedeute $S_\varkappa$ eine beliebige Substitution dieser Gruppe. Dann sind (Nr. 367, S. 388) die Wurzeln der zu $S_\varkappa$ gehörigen Fundamentalgleichung ganzzahlige Einheitswurzeln; diejenige Gleichung, die aus der Fundamentalgleichung dadurch hervorgeht, dass man in jedem Coefficienten $+i$ in $-i$ verwandelt, wird demnach durch die reciproken Werthe der Wurzeln der Fundamentalgleichung befriedigt. Wir haben also den Satz:

Wenn unter den Substitutionen einer endlichen und unimodularen Gruppe wenigstens eine enthalten ist, deren Fundamentalgleichung lauter von einander verschiedene Wurzeln besitzt, so giebt es eine bilineare Form der Gestalt

$$A_1 u_1 \bar{u}_1 + A_2 u_2 \bar{u}_2 + \cdots + A_n u_n \bar{u}_n$$

mit realen Coefficientenverhältnissen, die ungeändert bleibt, wenn auf die $u_1, u_2, \cdots u_n$ eine Substitution der Gruppe angewandt wird.

371. Kriterium dafür, dass die Monodromiegruppe einer Differentialgleichung eine bilineare Form mit conjugirten Variabelen ungeändert lässt.

Der am Schlusse der vorigen Nummer bewiesene Satz lehrt, dass ebenso wie für $n=2$ auch für ein beliebiges n die algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung sich in die Classe von linearen Differentialgleichungen einordnen, deren Monodromiegruppe eine aus den Elementen eines Fundamentalsystems und dessen conjugirten Werthen gebildete bilineare Form mit constanten und realen Coefficienten ungeändert lässt. Die hohe Bedeutung dieser Classe von Differentialgleichungen erhellt auch andererseits daraus, dass die Fuchs'schen Differentialgleichungen zweiter Ordnung dieser Classe angehören. Man kann nun nach Herrn Fuchs ein einfaches Kriterium dafür angeben, dass eine vorgelegte Differentialgleichung

$$(1) \qquad p_0 \frac{d^n u}{dz^n} + p_1 \frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}} + \cdots + p_n u = 0$$

der gedachten Classe angehört.

Zerlegen wir nämlich u, z und die Coefficienten $p_\varkappa$ von (1) in ihre realen und imaginären Theile

$$(2) \qquad \begin{cases} u = v + wi, \\ z = x + yi, \\ p_\varkappa = P_\varkappa + Q_\varkappa i, \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n) \end{cases}$$

so sind also v, w, $P_\varkappa$, $Q_\varkappa$ reale Functionen der realen Variabelen x, y, die die partiellen Differentialgleichungen

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial y}, & \dfrac{\partial w}{\partial x} = -\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial x} = \dfrac{\partial Q_\varkappa}{\partial y}, & \dfrac{\partial Q_\varkappa}{\partial x} = -\dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial y} \end{cases}$$

befriedigen. Setzen wir die Werthe (2) in die Differentialgleichung (1) ein und beachten, dass

$$\frac{d^\lambda u}{dz^\lambda} = \frac{\partial^\lambda v}{\partial x^\lambda} + i\,\frac{\partial^\lambda w}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^\lambda w}{\partial y^\lambda} - i\,\frac{\partial^\lambda v}{\partial y^\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots)$$

ist, so zerfällt (1) in die beiden Differentialgleichungen

$$\sum_{\varkappa=0}^{n}\left(P_\varkappa\frac{\partial^{n-\varkappa} v}{\partial x^{n-\varkappa}} - Q_\varkappa\frac{\partial^{n-\varkappa} w}{\partial x^{n-\varkappa}}\right) = 0,$$

$$\sum_{\varkappa=0}^{n}\left(Q_\varkappa\frac{\partial^{n-\varkappa} v}{\partial x^{n-\varkappa}} + P_\varkappa\frac{\partial^{n-\varkappa} w}{\partial x^{n-\varkappa}}\right) = 0,$$

aus denen durch Elimination von v beziehungsweise w die Gleichungen

$$(4)\qquad \sum_{\varkappa=0}^{n-1}\left(M_\varkappa\frac{\partial^{n-\varkappa} v}{\partial x^{n-\varkappa}} - N_\varkappa\frac{\partial^{n-\varkappa} w}{\partial x^{n-\varkappa}}\right) + (P_n^2 + Q_n^2)\,v = 0,$$

$$(5)\qquad \sum_{\varkappa=0}^{n-1}\left(N_\varkappa\frac{\partial^{n-\varkappa} v}{\partial x^{n-\varkappa}} + M_\varkappa\frac{\partial^{n-\varkappa} w}{\partial x^{n-\varkappa}}\right) + (P_n^2 + Q_n^2)\,w = 0$$

hervorgehen, wo

$$M_\varkappa = P_\varkappa P_n + Q_\varkappa Q_n, \quad N_\varkappa = Q_\varkappa P_n - P_\varkappa Q_n \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n-1)$$

gesetzt wurde.

Ersetzen wir in (4)

$$\frac{\partial w}{\partial x} \text{ durch } -\frac{\partial v}{\partial y},$$

und in (5)

$$\frac{\partial v}{\partial x} \text{ durch } \frac{\partial w}{\partial y},$$

so ergiebt sich, dass sowohl v als auch w die partielle Differentialgleichung

$$(6)\qquad \sum_{\varkappa=0}^{n-1}\left(M_\varkappa\frac{\partial^{n-\varkappa}\omega}{\partial x^{n-\varkappa}} + N_\varkappa\frac{\partial^{n-\varkappa}\omega}{\partial x^{n-\varkappa-1}\partial y}\right) + (P_n^2 + Q_n^2)\,\omega = 0$$

befriedigen. Bedeuten umgekehrt v, w den realen Theil und Coefficienten von i einer monogenen Function der complexen Variabeln

$$z = x + yi$$

und befriedigen v, w die partielle Differentialgleichung (6), so folgt, indem man die angegebene Rechnung rückwärts verfolgt, dass $v + wi$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung (1) sein müsse.

Betrachten wir nun ein Fundamentalsystem

$$u_\varkappa = v_\varkappa + w_\varkappa i \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

der Differentialgleichung (1), so befriedigen die $v_\varkappa$, $w_\varkappa$ die Differentialgleichung (6) und folglich die Ausdrücke

$$u_\varkappa \bar{u}_\lambda = v_\varkappa v_\lambda + w_\varkappa w_\lambda - i(v_\varkappa w_\lambda - v_\lambda w_\varkappa), \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots n),$$

diejenige lineare partielle Differentialgleichung, der die Quadrate der Lösungen der Differentialgleichung (6) Genüge leisten.

Wenn also eine aus den

$$u_1, \cdots u_n, \quad \bar{u}_1, \cdots \bar{u}_n$$

gebildete bilineare Form mit constanten Coefficienten bei allen Substitutionen der Monodromiegruppe Θ der Differentialgleichung (1) ungeändert bleibt, so muss die partielle Differentialgleichung, der die Quadrate der Integrale von (6) Genüge leisten, durch eine eindeutige Function der beiden realen Variabeln x, y befriedigt werden.

Fünftes Kapitel.

372. **Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten; mit doppeltperiodischen Coefficienten.**

Wir waren zu Beginn dieses Abschnittes (Nr. 350, S. 329) von dem Probleme ausgegangen, die Darstellung der allgemeinen Lösung y einer linearen Differentialgleichung, deren Coefficienten algebraische Functionen von x sind, in der Form zu geben, dass diese Lösung und die unabhängige Variable x simultan als eindeutige Functionen einer Hülfsvariabeln η erscheinen, haben uns aber dann mit Rücksicht auf eine an früherer Stelle dargelegte Reductionsmethode auf die Betrachtung von Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten beschränkt. Wir nehmen jetzt die Frage in der allgemeineren Fassung wieder auf, wo die Coefficienten der Differentialgleichung algebraische Functionen der unabhängigen Variabeln sind, um eine Reihe von Problemen zu formuliren, deren Bedeutung nicht so klar hervortritt, wenn man die vorgelegte Differentialgleichung mit Hülfe des gedachten Reductionsverfahrens auf eine solche mit rationalen Coefficienten zurückführt.

Wie in der Nr. 187 (Bd. II, 1, S. 213 ff.) bemerkt wurde, können wir die gegebene Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten in der Form

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x, s)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x, s)\, y = 0$$

zu Grunde legen, wo die Coefficienten $p_1(x, s), \cdots p_n(x, s)$ rationale Functionen der durch eine algebraische Gleichung

$$(2) \qquad F(x, s) = 0$$

vom Range p mit einander verknüpften Variabelen (x, s) sind. Wir setzen überdies voraus, dass die Integrale von (1) keine Punkte der Unbestimmtheit besitzen, und fassen diese Bedingung auch in dem vorliegenden allgemeinen Falle in die Aussage zusammen, dass die Differentialgleichung (1) der Fuchs'schen Classe angehören möge.

Es lässt sich dann stets eine Fuchs'sche Function $x = f(\eta)$ finden, die so beschaffen ist, dass sowohl s als auch das allgemeine Integral y von (1) als eindeutige Functionen von η erscheinen, z. B. kann man $f(\eta)$ so wählen, dass diese Function die Verzweigungspunkte der algebraischen Function s von x und diejenigen x-Werthe, zu denen Werthepaare (s, x) gehören, für die die Coefficienten von (1) unendlich werden, auslässt.

Führen wir dann η, beziehungsweise die Grössen

$$u_1 = \sqrt{\frac{dx}{d\eta}}, \quad u_2 = \eta\sqrt{\frac{dx}{d\eta}},$$

in die Differentialgleichung (1) an Stelle von x als unabhängige Variable ein, so sind für die so entstehende Differentialgleichung in ihrer invarianten Gestalt

1. die Coefficienten Fuchs'sche Functionen von η,

2. die sämmtlichen Integrale eindeutige Functionen von η. Wir wollen diese beiden Eigenschaften der gedachten Differentialgleichung gesondert betrachten.

Die erste Eigenschaft hat dieselbe offenbar mit jeder Differentialgleichung gemein, die aus einer Differentialgleichung mit in (x, s) rationalen Coefficienten durch Einführung von η beziehungsweise u_1, u_2 als neuer unabhängiger Variabeln hervorgeht, die zweite Eigenschaft dagegen ist wesentlich bedingt durch die Beschaffenheit der singulären Stellen von (1) und durch die Natur der Monodromiegruppe dieser Differentialgleichung.

Etwas anders gefasst führt diese Ueberlegung zu dem folgenden Problem.

Denken wir uns die durch die Gleichung (2) verknüpften Variabeln x, s auf irgend eine Weise als eindeutige Fuchs'sche oder Klein'sche Functionen einer Hülfsvariabeln t dargestellt, z. B. auf die in der Nr. 324 (S. 242 ff.) beschriebene Art, und sei (1) eine vorgelegte Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe mit in (x, s) rationalen Coefficienten. Führen wir in (1) an Stelle von x die Grösse t als neue unabhängige Variable ein, so erhalten wir eine Differentialgleichung (1a), die in ihrer invarianten Gestalt Coefficienten besitzt, die Fuchs'sche beziehungsweise Klein'sche Functionen von t sind. Wie muss die Differentialgleichung (1) beschaffen sein, damit auch die Integrale von (1a) eindeutige Functionen von t werden?

Die exacte Lösung dieses Problems bietet nicht unerhebliche Schwierigkeiten dar, obwohl eine Anzahl nothwendiger Bedingungen durch Umkehrung der beim Poincaré'schen Principe zur Anwendung

gelangten Ueberlegungen sofort angegeben werden kann. Wir beschränken uns auf die Behandlung der Frage in dem besonderen Falle, wo die algebraische Gleichung (2) vom Range Eins ist, ein Fall, der in der Litteratur ausführlich untersucht worden ist und zu, namentlich für die mathematische Physik, bedeutsamen Resultaten geführt hat.

Wenn $p = 1$ ist, so können wir die zwischen x und s bestehende Gleichung ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Form

$$s^2 = (1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2) \tag{2a}$$

voraussetzen, wo $\varkappa$ eine Constante bedeutet, und dann den Parameter t gleich dem elliptischen Integrale erster Gattung

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2)}}$$

nehmen, so dass also x und s in der Gestalt

$$x = \operatorname{sn} t,$$
$$s = \operatorname{cn} t \cdot \operatorname{dn} t$$

als eindeutige doppeltperiodische Functionen von t mit den Perioden

$$\Omega = 4K, \quad \Omega' = 2K'i$$

erscheinen.

Führen wir in die Differentialgleichung (1) t als unabhängige Variable ein, so erhalten wir

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \pi_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + \pi_n(t)y = 0, \tag{1a}$$

und die $\pi_1(t), \cdots \pi_n(t)$, die sich aus den $p_\varkappa(s, x)$ und den Ableitungen der doppeltperiodischen Function x von t rational zusammensetzen, sind schon selbst eindeutige doppeltperiodische Functionen von t, so dass wir also in diesem Falle gar nicht zu der invarianten Gestalt der Differentialgleichung überzugehen brauchen. Die Bedingungen dafür, dass die Integrale von (1a) eindeutige Functionen von t werden, lassen sich dann in folgender Weise formuliren.

373. Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten und eindeutigem Integral.

Zunächst ist klar, dass wenn, wie wir voraussetzen, die Differentialgleichung (1) der Fuchs'schen Classe angehört, die eindeutigen Functionen, die die Differentialgleichung (1a) befriedigen sollen, nur dort unbestimmt werden können, wo dies für die elliptischen Functionen

$$\operatorname{sn} t, \ \operatorname{cn} t, \ \operatorname{dn} t$$

der Fall ist, d. h. für $t = \infty$. Die Integrale von (1a) müssen also für alle endlichen Werthe von t den Charakter rationaler Functionen haben, und sind folglich nach einem bekannten Satze der Functionentheorie als Quotienten beständig (d. h. für alle endlichen Werthe von t) convergenter Potenzreihen von t darstellbar.

Betrachten wir ferner den Fundamentalbereich der elliptischen Functionen x und s von t, d. h. das zu diesen Functionen gehörige Periodenparallelogramm, so können wir dasselbe dadurch erhalten, dass wir die zu dem elliptischen Gebilde (2a) gehörige zweiblättrige und dreifach zusammenhängende Riemann'sche Fläche T, etwa in der in der Nr. 187 (Bd. II, 1, S. 213) für beliebiges p beschriebenen Weise, durch zwei Querschnitte a, b in eine einfach zusammenhängende $\overline{T}$ zerschneiden (vergl. die Fig. 33) und dann $\overline{T}$ auf die Ebene der complexen Variabeln t abbilden. Dann müssen, damit die Integrale von (1a) eindeutige Functionen von t werden, zunächst die Integrale von (1) in der zerschnittenen Riemann'schen Fläche $\overline{T}$ eindeutig sein. Die Bedingungen

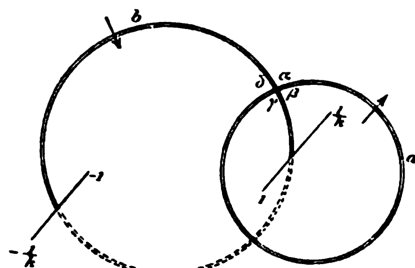


Fig. 33.

hierfür lassen sich in algebraische Bedingungen für die Coefficienten $p_1, \cdots p_n$ umsetzen. Man hat nämlich nur die Bedingungen dafür aufzustellen, dass die Integrale von (1) in der Umgebung der einzelnen singulären Stellen dieser Differentialgleichung den Charakter von rationalen Functionen des durch die Gleichung (2a) definirten algebraischen Gebildes (x, s) besitzen, dann sind die Integrale in der Umgebung jeder Stelle von $\overline{T}$ eindeutig, also unverzweigt innerhalb $\overline{T}$, und folglich, da $\overline{T}$ einfach zusammenhängend ist, innerhalb $\overline{T}$ schlechthin eindeutig.

Die Integrale von (1) müssen aber überdies so beschaffen sein, dass sie, wenn x einen in der unzerschnittenen Fläche T verlaufenden Weg beschreibt, der t zu seinem Ausgangswerthe zurückführt, ebenfalls ungeändert bleiben. Dies ist eine Bedingung für die Monodromiegruppe der Differentialgleichung (1), die sich wie folgt aussprechen lässt. Sei

$$y_1, y_2, \cdots y_n$$

ein Fundamentalsystem von (1), so erfahren diese Integrale, wenn x die Querschnitte a, b im positiven Sinne (vergl. die Pfeile in der Figur 33) überschreitet, beziehungsweise die Substitutionen

$$A = (a_{i\varkappa}), \quad B = (b_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n).$$

Diese beiden Substitutionen mit ihren inversen bilden eine Basis der Monodromiegruppe Θ der Differentialgleichung (1). Das Integral erster Gattung t erleidet, wenn x die Querschnitte a, b im positiven Sinne überschreitet, die Substitutionen

$$t + \Omega, \quad t + \Omega',$$

diese bilden mit ihren inversen eine Basis der doppeltperiodischen Gruppe ϑ. Diejenigen Wege von x in der Fläche T, durch welche t zu seinem Ausgangswerthe zurückgeführt wird, können dann dahin charakterisirt werden, dass ihnen die identische Substitution der Gruppe ϑ entspricht, und die Bedingung für die Monodromiegruppe Θ der Differentialgleichung (1) besagt demnach nichts anderes, als dass die Gruppen ϑ und Θ in dem Sinne isomorph sein müssen, dass jeder Substitution von ϑ eine bestimmte Substitution von Θ entspricht.

Die charakteristische Eigenschaft der Gruppe ϑ besteht nun darin, dass ihre Substitutionen mit einander vertauschbar sind, d. h. dass für die Composition derselben das commutative Gesetz gültig ist. Folglich muss auch die Gruppe Θ so beschaffen sein, dass ihre Substitutionen dem commutativen Gesetze gehorchen. Man sagt von einer Gruppe, die diese Eigenschaft besitzt, sie sei eine Abel'sche Gruppe.

Damit Θ eine Abel'sche Gruppe sei, ist zunächst erforderlich, dass die Substitutionen A, B selbst mit einander vertauschbar seien, d. h. dass

$$AB = BA$$

oder ausführlicher geschrieben

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\varkappa i} b_{ih} = \sum_{i=1}^{n} b_{\varkappa i} a_{ih} \qquad (\varkappa, h = 1, 2, \cdots n)$$

sei. Sind nun zwei Substitutionen B, C mit A vertauschbar, d. h. ist

$$BA = AB, \quad CA = AC,$$

so ist für die aus B, C componirte Substitution

$$BC \cdot A = BAC = A \cdot BC,$$

d. h. auch BC ist mit A vertauschbar. Ferner ist offenbar, wenn B mit A vertauschbar ist, auch B^{-1} mit A^{-1} vertauschbar. Aus diesen beiden Bemerkungen folgt, dass, wenn A mit B vertauschbar ist, auch jede aus

$$A, B, A^{-1}, B^{-1}$$

componirte Substitution mit jeder anderen aus diesen vier Substitutionen componirten Substitution vertauschbar sein muss. Die Vertauschbarkeit von A und B ist also zugleich hinreichend dafür, dass die Gruppe Θ eine Abel'sche sei. D. h. nebst den algebraischen Bedingungen, die die Eindeutigkeit der $y_1, y_2, \cdots y_n$ in der zerschnittenen Fläche $\overline{\overline{T}}$ zur Folge haben, ist für die Eindeutigkeit dieser Integrale als Functionen von t nothwendig und hinreichend, dass die beiden Substitutionen A, B mit einander vertauschbar seien.

Diese letztere Bedingung ist aber stets von selbst erfüllt.

Um dies einzusehen, brauchen wir nur den in der zerschnittenen Fläche $\overline{T}$ verlaufenden Weg zu betrachten, der entlang den beiden Ufern der Querschnitte a, b führt. Gehen wir z. B. mit dem Fundamentalsysteme $[y_\varkappa]$ von β aus (vergl. Fig. 33) das linke Ufer von b entlang nach α, so haben wir in α die Integralwerthe $A[y_\varkappa]$, gehen wir weiter von α längs des linken Ufers von a nach δ, so stellt $AB[y_\varkappa]$ daselbst die Integralwerthe dar; von δ weiter längs des rechten Ufers von b nach γ gelangend haben wir in γ $ABA^{-1}[y_\varkappa]$, und wenn wir endlich längs des rechten Ufers von a nach β zurückkehren, so haben wir in β die Integralwerthe $ABA^{-1}B^{-1}[y_\varkappa]$. Da aber auf einem in $\overline{T}$ verlaufenden geschlossenen Wege die $[y_\varkappa]$ zu ihren Ausgangswerthen zurückgeführt werden, ist

$$ABA^{-1}B^{-1} = 1,$$

d. h. in der That

$$AB = BA.$$

Wir haben also den Satz:

Die Bedingungen dafür, dass die Lösungen von (1) beziehungsweise (1a) eindeutige Functionen von t mit der einzigen Unbestimmtheitsstelle $t = \infty$ seien, fallen mit den Bedingungen dafür zusammen, dass diese Integrale in der Umgebung jeder singulären Stelle (x, s) der Differentialgleichung (1) den Charakter rationaler Functionen von x und s besitzen, und sind folglich stets durch algebraische Gleichungen, denen die Coefficienten von (1) zu genügen haben, ausdrückbar.

374. **Vertauschbare Substitutionen. Bilineare Form mit contragredienten Variabeln.**

Die Eigenschaft der Substitutionen A, B, mit einander vertauschbar zu sein, lässt sich in einer etwas anderen Form darstellen, wenn man die zu der Differentialgleichung (1) adjungirte Differentialgleichung

$$\text{(I)} \qquad \frac{d^n z}{dx^n} - \frac{d^{n-1}(p_1 z)}{dx^{n-1}} + \cdots + (-1)^n p_n z = 0$$

heranzieht. Wir schicken die folgende Hülfsbetrachtung voraus.

Sei

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x=1}^{n} a_{ix} z_i y_x$$

eine bilineare Form in den beiden Variabelnreihen

$$y_1, y_2, \cdots y_n; \quad z_1, z_2, \cdots z_n.$$

Transformiren wir die $[y_x]$ durch die Substitution

$$P y_x = \sum_{i=1}^{n} p_{xi} y_i \qquad (x=1,2,\cdots n),$$

die $[z_x]$ durch die Substitution

$$Q z_x = \sum_{i=1}^{n} q_{xi} z_i \qquad (x=1,2,\cdots n),$$

so lautet die transformirte Form

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{x=1}^{n} a_{ix} \sum_{\alpha=1}^{n} q_{i\alpha} z_\alpha \sum_{\beta=1}^{n} p_{x\beta} y_\beta = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} z_\alpha y_\beta \sum_{i} \sum_{x} q'_{\alpha i} a_{ix} p_{x\beta},$$

wo $q'_{\alpha i} = q_{i\alpha}$ gesetzt wurde. Die Coefficienten der transformirten Form sind also nichts anderes wie die Elemente der Substitution

$$Q' A P,$$

wo

$$Q' = (q'_{\alpha\beta}), \quad A = (a_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n)$$

gesetzt wurde.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die bilineare Form φ bei Anwendung der Substitutionen P, Q auf die Variabeln $[y_x]$, $[z_x]$ ungeändert bleibe, ist also:

$$Q' A P = A.$$

Seien nun die beiden Variabelnreihen $[y_\varkappa]$, $[z_\varkappa]$ contragredient (vergl. Nr. 23, Bd. I, S. 65 ff.), d. h. mögen, wenn die $[y_\varkappa]$ die Substitution P erfahren, die $[z_\varkappa]$ die reciproke Substitution

$$Q = \Pi = (\pi_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n)$$

erfahren, wo $\pi_{\alpha\beta}$ die zu dem Elemente $p_{\alpha\beta}$ gehörige Subdeterminante der Determinante

$$|p_{\alpha\beta}| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n)$$

dividirt durch diese Determinante selbst bedeutet. Setzen wir dann

$$\pi'_{\alpha\beta} = \pi_{\beta\alpha} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n),$$

so ist (vergl. Nr. 30, Bd. I, S. 95)

$$Q' = (\pi'_{\alpha\beta}) = P^{-1}. \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n).$$

Damit also die bilineare Form φ mit den contragredienten Variabelnreihen $[y_\varkappa]$, $[z_\varkappa]$ durch Anwendung der Substitution P in sich selbst übergeht ist erforderlich, dass

$$P^{-1} A P = A$$

sei, d. h. die Substitution P muss mit der aus den Coefficienten der Form φ gebildeten Substitution A vertauschbar sein. Umgekehrt lässt eine Substitution P, die mit A vertauschbar ist, die bilineare Form φ mit contragredienten Variabelnreihen auch stets ungeändert.

Bezeichnen wir nunmehr mit $z_1, z_2, \cdots z_n$ das dem Fundamentalsysteme $y_1, y_2, \cdots y_n$ der Differentialgleichung (1) adjungirte Fundamentalsystem von (I), so sind diese beiden Fundamentalsysteme contragredient; folglich hat die mit den Coefficienten der Substitution A gebildete bilineare Form

$$\varphi = \sum_i \sum_\varkappa a_{i\varkappa} z_i y_\varkappa$$

nach der eben gemachten Bemerkung die Eigenschaft, bei allen Substitutionen der Gruppe Θ ungeändert zu bleiben. Diese Form ist demnach eine in der unzerschnittenen Fläche T eindeutige Function, und folglich, da die Differentialgleichung zur Fuchs'schen Classe gehört, eine rationale Function von x und s.

Betrachten wir nun die lineare Differentialgleichung, der die Producte yz der Lösungen der Differentialgleichungen (1) und (I) Genüge leisten, so ist dieselbe allgemein von der Ordnung n^2; da aber (Nr. 23, Bd. I, S. 62)

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} y_\varkappa z_\varkappa = 0$$

ist, so reducirt sich die Ordnung dieser Differentialgleichung auf $(n^2 - 1)$. Die bilineare Form φ ist eine Lösung der gedachten Differentialgleichung, dieselbe besitzt also ein in x und s rationales Integral, d. h. ein Integral, welches eine eindeutige doppeltperiodische Function von t ist und für alle endlichen Werthe von t den Charakter einer rationalen Function hat.

375. Untersuchung der Fundamentalgleichungen vertauschbarer Substitutionen.

Aus der Vertauschbarkeit der Substitutionen der Gruppe Θ können wir eine Reihe wichtiger Folgerungen ziehen, die den analytischen Charakter der Lösungen der Differentialgleichungen (1) anzugeben gestatten.

Wir haben zu dem Ende nur die Erörterungen des dritten Abschnittes (Bd. I) auf die beiden Substitutionen A, B anzuwenden. Betrachten wir etwa die Substitution A und sei

$$L(\omega) = l_\lambda \omega^\lambda + l_{\lambda-1}\omega^{\lambda-1} + \cdots + l_0$$

ein Factor der zu A gehörigen Fundamentalgleichung

(3) $$F(\omega) = |a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega| = 0 \qquad (h, \varkappa = 1, 2, \cdots n).$$

Bezeichnen wir wie im dritten Abschnitte mit $a_{h\varkappa}^{(i)}$ die Coefficienten der Substitution A^i, dann liefern (Nr. 35, Bd. I, S. 117) die Lösungen des Gleichungssystems

(4) $$\sum_{h=1}^{n} (l_\lambda a_{h\varkappa}^{(\lambda)} + l_{\lambda-1} a_{h\varkappa}^{(\lambda-1)} + \cdots + l_0 \delta_{h\varkappa})\, \xi_h = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

die Coefficienten derjenigen linearen Combinationen der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die der Relation

(5) $$l_\lambda A^\lambda u + l_{\lambda-1} A^{\lambda-1} u + \cdots + l_0 u = 0$$

Genüge leisten, wo durch $A^\varkappa u$ diejenige Function bezeichnet wurde, in welche sich das Integral u der Differentialgleichung (1) verwandelt, wenn auf die $[y_i]$ die Substitution $A^\varkappa$ angewandt wird.

Sei das Gleichungssystem (4) vom Range $n - \tau$, und bedeute

$$\xi_1^{(\nu)},\ \xi_2^{(\nu)},\ \cdots\ \xi_n^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots \tau)$$

ein System linear unabhängiger Lösungen desselben. Bezeichnen wir mit $b_{h\varkappa}^{(\vartheta)}$ die Coefficienten der Substitution B^ϑ und bilden die Ausdrücke

(6) $$\sum_{h=1}^{n} b_{hx}^{(\beta)} \xi_h^{(\nu)} \qquad (\beta = 1, 2, \cdots),$$

so ist zufolge der Vertauschbarkeit von A^α mit B^β

$$\sum_x b_{hx}^{(\beta)} a_{xi}^{(\alpha)} = \sum_x a_{hx}^{(\alpha)} b_{xi}^{(\beta)},$$

und folglich

$$\sum_x (l_\lambda a_{xi}^{(\lambda)} + \cdots + l_0 \delta_{xi}) \sum_h b_{hx}^{(\beta)} \xi_h^{(\nu)}$$

$$= \sum_x \sum_h (l_\lambda a_{hx}^{(\lambda)} b_{xi}^{(\beta)} + \cdots + l_0 \delta_{hx} b_{xi}^{(\beta)}) \xi_h^{(\nu)}$$

$$= \sum_x b_{xi}^{(\beta)} \sum_h (l_\lambda a_{hx}^{(\lambda)} + \cdots + l_0 \delta_{hx}) \xi_h^{(\nu)} = 0,$$

d. h. die Ausdrücke (6) sind für jeden Werth von β ebenfalls Lösungen des Gleichungssystems (4).

Wir können folglich ein System von τ^2 Constanten

$$c_{\nu\mu} \qquad (\nu, \mu = 1, 2, \cdots \tau)$$

so bestimmen, dass insbesondere

$$\sum_{h=1}^{n} b_{hx} \xi_h^{(\nu)} = \sum_{\mu=1}^{\tau} c_{\nu\mu} \xi_x^{(\mu)} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots \tau) \atop (x = 1, 2, \cdots n)$$

ist; aus diesen Gleichungen ergiebt sich aber sofort

(7) $$\sum_{h=1}^{n} b_{hx}^{(\beta)} \xi_h^{(\nu)} = \sum_{\mu=1}^{\tau} c_{\nu\mu}^{(\beta)} \xi_x^{(\mu)} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \cdots \tau, \\ x = 1, 2, \cdots n, \\ \beta = 1, 2, \cdots \end{pmatrix},$$

wo $c_{\nu\mu}^{(\beta)}$ die Elemente der Substitution

$$(c_{\nu\mu})^\beta \qquad (\nu, \mu = 1, 2, \cdots \tau)$$

bedeuten.

Betrachten wir nun die zu der Substitution $(c_{\nu\mu})$ gehörige Fundamentalgleichung

$$|c_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu} \omega| = 0 \qquad (\nu, \mu = 1, 2, \cdots \tau)$$

und denken uns dieselbe nach Potenzen von ω entwickelt:

(8) $$(-1)^\tau \omega^\tau + \gamma_{\tau-1} \omega^{\tau-1} + \cdots + \gamma_0 = 0,$$

so ist nach Nr. 33 (Bd. I, S. 108)

$$(-1)^\tau c_{\nu\mu}^{(\tau)} + \gamma_{\tau-1} c_{\nu\mu}^{(\tau-1)} + \cdots + \gamma_0 \delta_{\nu\mu} = 0 \qquad (\nu, \mu = 1, 2, \cdots \tau);$$

wir haben folglich gemäss den Gleichungen (7)

$$(9)\qquad \sum_{h=1}^{n} \xi_h^{(\nu)} \{(-1)^\tau b_{hx}^{(\tau)} + \gamma_{\tau-1} b_{hx}^{(\tau-1)} + \cdots + \gamma_0 \delta_{hx}\} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \nu=1,2,\cdots\tau, \\ x=1,2,\cdots n \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satze der Nr. 33 (Bd. I, S. 111) schliessen wir hieraus, dass die Gleichung (8) mit der zu der Substitution B gehörigen Fundamentalgleichung

$$(10)\qquad |b_{hx} - \omega \delta_{hx}| = 0 \qquad (h, x=1,2,\cdots n)$$

gewisse Wurzeln gemein haben müsse; bedeute

$$(11)\qquad c_\varrho \omega^\varrho + c_{\varrho-1}\omega^{\varrho-1} + \cdots + c_0 \qquad (0 < \varrho \leq \tau)$$

den grössten gemeinsamen Theiler der linken Seiten der Gleichungen (8) und (10), dann ist nach dem Satze der Nr. 35 (Bd. I, S. 115, 116) das Gleichungssystem

$$(12)\qquad \sum_{h=1}^{n} (c_\varrho b_{hx}^{(\varrho)} + c_{\varrho-1} b_{hx}^{(\varrho-1)} + \cdots + c_0 \delta_{hx}) \xi_h = 0 \qquad (x=1,2,\cdots n)$$

mit dem Gleichungssysteme

$$\sum_{h=1}^{n} \{(-1)^\tau b_{hx}^{(\tau)} + \gamma_{\tau-1} b_{hx}^{(\tau-1)} + \cdots + \gamma_0 \delta_{hx}\} \xi_h = 0 \qquad (x=1,2,\cdots n)$$

aequivalent. Das letztere Gleichungssystem ist aber, da es nach (9) die linear unabhängigen Lösungssysteme

$$(13)\qquad \xi_1^{(\nu)}, \xi_2^{(\nu)}, \cdots \xi_n^{(\nu)} \qquad (\nu=1,2,\cdots\tau)$$

besitzt, höchstens vom Range $n-\tau$, folglich ist auch das Gleichungssystem (12) höchstens vom Range $n-\tau$ und wird durch die Systeme (13) befriedigt. Wir haben demnach den allgemeinen Satz:

Sind A, B irgend zwei mit einander vertauschbare Substitutionen und bedeuten

$$\sum_{x=1}^{n} \xi_x^{(\nu)} y_x \qquad (\nu=1,2,\cdots\tau)$$

diejenigen linear unabhängigen linearen homogenen Functionen der $[y_x]$, die der Relation (5)

$$l_\lambda A^\lambda u + l_{\lambda-1} A^{\lambda-1} u + \cdots + l_0 u = 0$$

Genüge leisten, so befriedigen dieselben Ausdrücke auch die Relation

$$(14)\qquad c_\varrho B^\varrho u + c_{\varrho-1} B^{\varrho-1} u + \cdots + c_0 u = 0 \qquad (0<\varrho<\tau).$$

…er Satz von Picard. Anzahl der Integrale, die doppeltperiodische Functionen zweiter Art sind.

… nun insbesondere ω_α' eine Wurzel der zu B gehörigen Fundagleichung (10), für welche der Theiler (11) der linken Seite … Gleichung verschwindet, dann ist also ω_α' auch eine Lösung der …hung (8). Die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{\tau}(c_{\nu\mu}-\delta_{\nu\mu}\omega_\alpha')\eta_\nu=0 \qquad (\mu=1,2,\dots\tau)$$

…d demnach auflösbar; sei

$$\eta_1,\eta_2,\dots\eta_\tau$$

irgend ein Lösungssystem derselben. Da nach (7)

$$\sum_{\nu=1}^{\tau}\eta_\nu\sum_{h=1}^{n}b_{h\varkappa}\xi_h^{(\nu)}=\sum_{\nu=1}^{\tau}\eta_\nu\sum_{\mu=1}^{\tau}c_{\nu\mu}\xi_\varkappa^{(\mu)}$$

und offenbar auch

$$\sum_{\nu=1}^{\tau}\eta_\nu\sum_{h=1}^{n}\delta_{h\varkappa}\xi_h^{(\nu)}=\sum_{\nu=1}^{\tau}\eta_\nu\sum_{\mu=1}^{\tau}\delta_{\nu\mu}\xi_\varkappa^{(\mu)}$$

ist, so ergiebt sich

$$\sum_{h=1}^{n}(b_{h\varkappa}-\omega_\alpha'\delta_{h\varkappa})\sum_{\nu=1}^{\tau}\eta_\nu\xi_h^{(\nu)}=\sum_{\mu=1}^{\tau}\xi_\varkappa^{(\mu)}\sum_{\nu=1}^{\tau}(c_{\nu\mu}-\delta_{\nu\mu}\omega_\alpha')\eta_\nu=0$$

d. h. die Ausdrücke

$$\sum_{\nu=1}^{\tau}\eta_\nu\xi_h^{(\nu)} \qquad (h=1,2,\dots n)$$

bilden ein simultanes Lösungssystem der Gleichungen (4)

Gleichungen

$$\sum_{h=1}^{n}(b_{h\varkappa}-\omega_\alpha'\delta_{h\varkappa})\xi_h=0 \qquad (\varkappa=1,2,\dots n).$$

Das Integral

$$(15)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{n}y_\varkappa\sum_{\nu=1}^{\tau}\eta_\nu\xi_\varkappa^{(\nu)}$$

…der Differentialgleichung (1) multiplicirt sich also mit … die $[y_\varkappa]$ die Substitution B erfahren.

Nehmen wir nunmehr $\lambda = 1$, d. h. betrachten wir den zu einer Wurzel ω_α der Fundamentalgleichung von A gehörigen linearen Factor

$$L(\omega) = \omega - \omega_\alpha,$$

so haben die Integrale

$$\sum_{x=1}^{n} \xi_x^{(\nu)} y_x \qquad (\nu = 1, 2, \cdots \tau)$$

die Eigenschaft, sich mit der Constanten ω_α zu multipliciren, wenn die $[y_x]$ die Substitution A erfahren. Das Integral (15) multiplicirt sich also, sowohl wenn die Substitution A als auch wenn die Substitution B auf die $[y_x]$ angewandt wird, mit einer Constanten, und hieraus folgt, dass es bei Anwendung irgend einer Substitution der Gruppe Θ auf die $[y_x]$ in sich selbst multiplicirt mit einer Constanten übergeht. Die logarithmische Ableitung dieses Integrales ist demnach in der ganzen Fläche T eindeutig, und zwar, da die Differentialgleichung (1) der Fuchs'schen Classe angehört, eine rationale Function von (x, s), d. h. eine eindeutige doppeltperiodische Function von t, die nur für $t = \infty$ unbestimmt wird. Das Integral (15) selbst besitzt als Function von t die Eigenschaft, für alle endlichen Werthe von t das Verhalten einer rationalen Function zu zeigen und sich bei Vermehrung von t um die Perioden Ω, Ω' mit den constanten Factoren ω_α, ω_α' zu multipliciren. Eine so beschaffene Function von t bezeichnet man nach Herrn Hermite als eine doppeltperiodische Function zweiter Art mit den Perioden Ω, Ω' und den Multiplicatoren ω_α, ω_α'. Wir können somit den folgenden von Herrn Picard herrührenden Satz aussprechen:

Wenn die Integrale der zur Fuchs'schen Classe gehörigen Differentialgleichung (1) eindeutige Functionen von t sind, so giebt es mindestens ein Integral, welches eine doppeltperiodische Function zweiter Art von t ist.

Die Entwicklung, die uns zu diesem Ergebnisse geführt hat, lehrt, dass es unter Umständen auch mehr wie ein Integral der Differentialgleichung (1) geben kann, welches eine doppeltperiodische Function zweiter Art von t ist, und liefert uns zugleich eine obere und eine untere Grenze, sowie eine Anzahl von Sätzen für die Anzahl N der so beschaffenen linearunabhängigen Integrale. In der That, seien

$$\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_\nu$$

die von einander verschiedenen Wurzeln der zu A gehörigen,

$$\omega_1', \omega_2', \cdots \omega_\mu'$$

die von einander verschiedenen Wurzeln der zu B gehörigen Fundamentalgleichung, dann folgt zunächst, dass die Anzahl N nicht kleiner sein kann als die grösste der beiden Zahlen ν, μ.

Sei $n - \tau_{\alpha 1}$ der Rang des Systems

$$(a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega_\alpha) \qquad {\scriptstyle (\alpha = 1, 2, \cdots \nu)} \atop {\scriptstyle (h, \varkappa = 1, 2, \cdots n)}$$

und $n - \tau'_{\alpha 1}$ der Rang des Systems

$$(b_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega_\alpha') \qquad {\scriptstyle (\alpha = 1, 2, \cdots \mu)}, \atop {\scriptstyle (h, \varkappa = 1, 2, \cdots n)}$$

setzen wir ferner

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} \tau_{\alpha 1} = M, \qquad \sum_{\alpha=1}^{\nu} \tau'_{\alpha 1} = M',$$

so kann die Anzahl N nicht grösser sein, wie die kleinere der Zahlen M, M'. Ist insbesondere eine der Zahlen M, M' gleich n, so ist N gleich der anderen.

Ebenso unmittelbar ergiebt sich die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $N = n$ sei, d. h. dass ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1) existirt, dessen Elemente doppeltperiodische Functionen zweiter Art sind. Damit das eintritt, muss nämlich jede der Zahlen $\tau_{\alpha 1}$, $\tau'_{\alpha 1}$ gleich derjenigen Zahl sein, die die Vielfachheit der betreffenden Wurzel ω_α, ω_α' angiebt. Sind also z. B. die sämmtlichen Wurzeln der Fundamentalgleichungen der Substitutionen A, B von einander verschieden, so ist diese Bedingung jedenfalls erfüllt. Da dies so zu sagen der „allgemeine Fall“ ist, so besitzt also die Differentialgleichung (1), wenn ihre Integrale eindeutig in t sind, „im Allgemeinen“ n linearunabhängige doppeltperiodische Functionen zweiter Art von t zu Integralen.

377. Die Integralgruppen. Simultane Differenzengleichungen.

Wenn die Anzahl N derjenigen Integrale, die doppeltperiodische Functionen zweiter Art von t sind, kleiner ist wie n, so hat man, um ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (1) zu erhalten, noch $n - N$ Integrale aufzustellen; es liegt nahe, dieselben z. B. unter den Elementen des zu der Substitution A gehörigen canonischen Fundamentalsystems zu wählen. Dabei liefert uns der am Schlusse der Nr. 375 (S. 413) aufgestellte Satz das folgende bemerkenswerthe Ergebniss.

Denken wir uns das zu der Substitution A gehörige canonische Fundamentalsystem z. B. in der Weise hergestellt, dass wir für den

Theiler $L(\omega)$ der zu A gehörigen Fundamentalgleichung der Reihe nach

$$(\omega - \omega_\alpha)^{\lambda_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots \nu)$$

setzen, wo λ_α den Grad der Vielfachheit der Wurzel ω_α angiebt, so befriedigen die so gewonnenen Integrale auch Relationen von der Form (14), und wir können folglich lineare Combinationen derselben so einrichten, dass diese in gewissem Sinne auch Elemente des zu B gehörigen canonischen Fundamentalsystems sind.

D. h. wir können ein Fundamentalsystem herstellen, welches in Gruppen zerfällt; jede solche Gruppe gehört zu einem Wurzelpaare der den Substitutionen A, B entsprechenden Fundamentalgleichungen, und die Elemente einer Gruppe verwandeln sich sowohl bei Anwendung der Substitution A als auch bei Anwendung der Substitution B auf die $[y_\varkappa]$ nur in lineare homogene Functionen ihrer selbst, so zwar, dass, wenn

$$v_1, v_2, \cdots v_\varrho$$

eine solche Gruppe bilden, die zu der Wurzel ω_α der Fundamentalgleichung von A und zu der Wurzel ω_α' der Fundamentalgleichung von B gehört,

$$\left.\begin{aligned} Av_\varkappa &= \alpha_{\varkappa 1} v_1 + \alpha_{\varkappa 2} v_2 + \cdots + \alpha_{\varkappa\varkappa} v_\varkappa \\ Bv_\varkappa &= \beta_{\varkappa 1} v_1 + \beta_{\varkappa 2} v_2 + \cdots + \beta_{\varkappa\varkappa} v_\varkappa \end{aligned}\right\} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho)$$

wird, wo

$$(16) \qquad \begin{cases} \alpha_{11} = \alpha_{22} = \cdots = \alpha_{\varrho\varrho} = \omega_\alpha \\ \beta_{11} = \beta_{22} = \cdots = \beta_{\varrho\varrho} = \omega_\alpha' \end{cases}$$

ist. Ueberdies bestehen zwischen den $\alpha_{\varkappa i}$, $\beta_{\varkappa i}$ zufolge der Vertauschbarkeit der Substitutionen A, B die Beziehungen

$$\sum_{i=1}^{\varrho} \alpha_{\varkappa i} \beta_{ih} = \sum_{i=1}^{\varrho} \beta_{\varkappa i} \alpha_{ih}$$

oder, mit Rücksicht auf (16), und da für $i > \varkappa$

$$\alpha_{\varkappa i} = 0, \quad \beta_{\varkappa i} = 0$$

sind,

$$(17) \qquad \sum_{i=h+1}^{\varrho-1} \alpha_{\varkappa i} \beta_{ih} = \sum_{i=h+1}^{\varrho-1} \beta_{\varkappa i} \alpha_{ih} \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 3, 4, \cdots \varrho, \\ h = 1, 2, \cdots \varkappa - 2 \end{pmatrix}.$$

Das erste Element v_1 einer solchen Gruppe ist als Function von t betrachtet eine doppeltperiodische Function zweiter Art mit den Mul-

tiplicatoren α_{11}, β_{11}. Um die analytische Beschaffenheit der übrigen Elemente $v_2, \cdots v_\varrho$ feststellen zu können, schicken wir die folgenden Bemerkungen voraus.

Wir bilden mit Hülfe des in der Nr. 352 (S. 337) betrachteten Integrales zweiter Gattung

$$E(t) = \int_0^x \frac{\varkappa^2 x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}},$$

dessen Perioden wir durch

$$\eta = 4E, \quad \eta' = 2E'i$$

bezeichnen, die Ausdrücke

$$(18) \quad \begin{cases} Z_1(t) = \frac{\Omega}{4\pi i}\left\{E(t) - \frac{\eta t}{\Omega}\right\}, \\ Z_2(t) = -\frac{\Omega'}{4\pi i}\left\{E(t) - \frac{\eta' t}{\Omega'}\right\}, \end{cases}$$

dann ist, wie man mit Rücksicht auf die Legendre'sche Relation

$$\Omega\eta' - \Omega'\eta = 4\pi i$$

sofort übersieht,

$$\begin{aligned} AZ_1 &= Z_1(t+\Omega) = Z_1(t), \\ BZ_1 &= Z_1(t+\Omega') = Z_1(t) + 1, \\ AZ_2 &= Z_2(t+\Omega) = Z_2(t) + 1, \\ BZ_2 &= Z_2(t+\Omega') = Z_2(t). \end{aligned}$$

Setzen wir nun (vergl. Nr. 38, Bd. I, S. 130)

$$\begin{aligned} Z_1^{(\varkappa)} &= Z_1(Z_1 - 1)\cdots(Z_1 - \varkappa + 1), \\ Z_2^{(\varkappa)} &= Z_2(Z_2 - 1)\cdots(Z_2 - \varkappa + 1) \end{aligned}$$

und bezeichnen (wie a. a. O.) für eine Function V von t die Ausdrücke

$$\begin{aligned} AV - V &= V(t+\Omega) - V(t), \\ BV - V &= V(t+\Omega') - V(t) \end{aligned}$$

kurz durch

$$(A-1)\,V \text{ beziehungsweise } (B-1)\,V,$$

so ist offenbar

$$\begin{aligned} (A-1)\,Z_1^{(\varkappa)} &= 0, & (B-1)\,Z_1^{(\varkappa)} &= \varkappa Z_1^{(\varkappa-1)}, \\ (A-1)\,Z_2^{(\varkappa)} &= \varkappa Z_2^{(\varkappa-1)}, & (B-1)\,Z_2^{(\varkappa)} &= 0. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun einen Ausdruck von der Form

$$F(Z_1, Z_2) = \varphi_{11} Z_1 + \varphi_{12} Z_2 + \varphi_{21} Z_1^{(2)} + \varphi_{22} Z_1 Z_2 + \varphi_{23} Z_2^{(2)} + \cdots$$
$$+ \varphi_{\varkappa 1} Z_1^{(\varkappa)} + \varphi_{\varkappa 2} Z_1^{(\varkappa - 1)} Z_2 + \cdots + \varphi_{\varkappa, \varkappa+1} Z_2^{(\varkappa)},$$

wo die $\varphi_{i\varkappa}$ Functionen von t bedeuten, die bei Vermehrung von t um Ω, Ω', d. h. wie wir sagen wollen, bei Anwendung der Operationen A, B ungeändert bleiben, und nennen denselben kurz einen Ausdruck $\varkappa$-ten Grades in den Z_1, Z_2, so wird

$$(A - 1) F(Z_1, Z_2) = F_2(Z_1, Z_2)$$

aus $F(Z_1, Z_2)$ nach derselben Regel gebildet, wie der partielle Differentialquotient von $F(Z_1, Z_2)$ nach Z_2 zu bilden wäre, wenn an Stelle von $Z_1^{(\lambda)}$, $Z_2^{(\lambda)}$ die Potenzen Z_1^{λ}, Z_2^{λ} stünden, und ebenso entspricht die Bildungsweise von

$$(B - 1) F(Z_1, Z_2) = F_1(Z_1, Z_2)$$

der Bildung des partiellen Differentialquotienten nach Z_1.

Die $F_1(Z_1, Z_2)$, $F_2(Z_1, Z_2)$ sind demnach Ausdrücke $(\varkappa - 1)$-ten Grades in den Z_1, Z_2, aber nicht beliebige Ausdrücke dieses Grades, denn es stimmen gewisse Coefficienten in den $F_1(Z_1, Z_2)$, $F_2(Z_1, Z_2)$ mit einander überein; dieser specielle Charakter lässt sich am einfachsten durch die Gleichung

$$(A - 1) F_1(Z_1, Z_2) = (B - 1) F_2(Z_1, Z_2)$$

darstellen.

Hat man umgekehrt zwei Ausdrücke $(\varkappa - 1)$-ten Grades

$$G_1(Z_1, Z_2), \quad G_2(Z_1, Z_2)$$

in den Z_1, Z_2, und ist für dieselben die Gleichung

$$(A - 1) G_1(Z_1, Z_2) = (B - 1) G_2(Z_1, Z_2),$$

die wir als **Integrabilitätsbedingung** (vom Standpunkte der Differenzenrechnung aus) bezeichnen können, erfüllt, so lassen die beiden simultanen Differenzengleichungen

$$(A - 1) G(Z_1, Z_2) = G_2(Z_1, Z_2),$$
$$(B - 1) G(Z_1, Z_2) = G_1(Z_1, Z_2)$$

eine Auflösung zu, und $G(Z_1, Z_2)$ ergiebt sich als Ausdruck $\varkappa$-ten Grades in den Z_1, Z_2, der, wenn man $Z_1^{(\lambda)}$, $Z_2^{(\lambda)}$ durch Z_1^{λ}, Z_2^{λ} ersetzt, zu partiellen Ableitungen nach Z_1, Z_2 die Ausdrücke besitzt, die aus

$G_1(Z_1, Z_2)$, $G_2(Z_1, Z_2)$ durch dieselbe Vertauschung hervorgehen, und der noch eine additive willkürliche Function enthält, die ebenso wie die Coefficienten der G_1, G_2 bei den Operationen A, B ungeändert bleibt.

378. Der analytische Charakter der Integrale einer Gruppe. Verallgemeinerung des Problems.

Betrachten wir nun das zweite Integral v_2 unserer Integralgruppe

$$v_1, v_2, \cdots v_\varrho,$$

so haben wir, da

$$Av_1 = \omega_\alpha v_1, \quad Bv_1 = \omega_\alpha' v_1$$

ist, für den Quotienten von v_2 durch v_1 die Gleichungen

$$(A-1)\frac{v_2}{v_1} = \frac{\alpha_{21}}{\omega_\alpha}, \quad (B-1)\frac{v_2}{v_1} = \frac{\beta_{21}}{\omega_\alpha'};$$

wir erhalten demnach als Lösungen dieser simultanen Differenzengleichungen

(19) $$\frac{v_2}{v_1} = \varphi_2(x, s) + \frac{\alpha_{21}}{\omega_\alpha} Z_2 + \frac{\beta_{21}}{\omega_\alpha'} Z_1,$$

wo $\varphi_2(x, s)$ eine bei den Operationen A, B unveränderliche Function, also eine rationale Function von (x, s) bedeutet.

Für das dritte Integral v_3 der Gruppe ist

(20) $$\begin{cases} (A-1)\dfrac{v_3}{v_1} = \dfrac{\alpha_{31}}{\omega_\alpha} + \dfrac{\alpha_{32}}{\omega_\alpha}\dfrac{v_2}{v_1}, \\ (B-1)\dfrac{v_3}{v_1} = \dfrac{\beta_{31}}{\omega_\alpha'} + \dfrac{\beta_{32}}{\omega_\alpha'}\dfrac{v_2}{v_1}, \end{cases}$$

und vermöge der Gleichungen (17) besteht die Relation

(21) $$\alpha_{32}\beta_{21} = \beta_{32}\alpha_{21}.$$

Setzen wir in (20) für $\frac{v_2}{v_1}$ den gefundenen Werth (19) ein, so ergeben sich die beiden simultanen Differenzengleichungen

$$(A-1)\frac{v_3}{v_1} = \frac{\alpha_{31}}{\omega_\alpha} + \frac{\alpha_{32}}{\omega_\alpha}\varphi_2(x, s) + \frac{\alpha_{32}\beta_{21}}{\omega_\alpha\omega_\alpha'} Z_1 + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{\omega_\alpha^2} Z_2,$$

$$(B-1)\frac{v_3}{v_1} = \frac{\beta_{31}}{\omega_\alpha'} + \frac{\beta_{32}}{\omega_\alpha'}\varphi_2(x, s) + \frac{\beta_{32}\beta_{21}}{\omega_\alpha'^2} Z_1 + \frac{\beta_{32}\alpha_{21}}{\omega_\alpha\omega_\alpha'} Z_2,$$

für welche vermöge der Relation (21) die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist.

Wir finden demnach für $\frac{v_3}{v_1}$ den Ausdruck:

$$\frac{v_3}{v_1} = \varphi_3(x, s) + \frac{\beta_{31} + \beta_{32}\varphi_2(x, s)}{\omega_\alpha'} Z_1 + \frac{\alpha_{31} + \alpha_{32}\varphi_2(x, s)}{\omega_\alpha} Z_2$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\beta_{32}\beta_{21}}{\omega_\alpha'^2} Z_1^{(2)} + \frac{\beta_{23}\alpha_{21}}{\omega_\alpha\omega_\alpha'} Z_1 Z_2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{\omega_\alpha^2} Z_2^{(2)},$$

wo auch $\varphi_3(x, s)$ eine rationale Function von (x, s) bedeutet.

In derselben Weise weiter schliessend ergiebt sich schliesslich für $\frac{v_\varrho}{v_1}$ die Darstellung

$$\frac{v_\varrho}{v_1} = F_{\varrho-1}(Z_1, Z_2),$$

wo $F_{\varrho-1}$ eine ganze Function vom höchstens $(\varrho - 1)$-ten Grade in den Z_1, Z_2 mit in (x, s) rationalen Coefficienten bedeutet. Damit ist also der analytische Charakter der Integrale von (1) vollständig festgelegt. Wir fassen das Ergebniss der Untersuchung in den folgenden Satz zusammen:

Wenn das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1), deren Coefficienten rationale Functionen von x und

$$s = \sqrt{(1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2)}$$

sind, eine eindeutige Function des Integrales erster Gattung t ist, die für keinen endlichen Werth von t unbestimmt wird, so kann man ein Fundamentalsystem von Integralen angeben, welches in Gruppen von der folgenden Beschaffenheit zerfällt. Das erste Element jeder Gruppe ist eine doppeltperiodische Function zweiter Art von t, die übrigen Elemente einer aus ϱ Integralen bestehenden Gruppe sind ganze rationale Functionen von den Graden $1, 2, \cdots \varrho - 1$ der Functionen $Z_1(t)$, $Z_2(t)$, deren Coefficienten, abgesehen von dem ersten Elemente der Gruppe als Factor, rationale Functionen von (s, x) sind. Die zwischen diesen Coefficienten bestehenden identischen Beziehungen ergeben sich unmittelbar aus der Methode der Herleitung.

Die Methode, die wir hier für den Fall auseinandergesetzt haben, wo der Rang der Gleichung (2) (Nr. 372, S. 403) gleich Eins ist, lässt sich auch, wenn dieser Rang eine beliebige Zahl p ist, bei der Unter-

suchung der Frage anwenden, wann die Integrale der Differentialgleichung (1) in der durch $2p$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche zerschnittenen Riemann'schen Fläche der Gleichung (2) eindeutig sind, und die Monodromiegruppe Θ dieser Differentialgleichung aus lauter mit einander vertauschbaren Substitutionen besteht. Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so erscheinen die Lösungen von (1) als eindeutige Functionen derjenigen Integralsummen, die bei dem zu der Gleichung (2) gehörigen Jacobi'schen Umkehrprobleme auftreten. Wir versagen es uns, auf eine ausführliche Discussion des hiermit formulirten Problems einzugehen, welches wohl als die naturgemässe Verallgemeinerung des für $p = 1$ behandelten angesehen werden darf, wir wollen vielmehr die für $p = 1$ gefundenen Ergebnisse noch in dem besonderen Falle kurz betrachten, wo die Ordnung der Differentialgleichung $n = 2$ ist.

379. **Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Lamé'sche Differentialgleichung.**

Wenn die Differentialgleichung

$$\text{(II)} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + p_1(x, s)\frac{dy}{dx} + p_2(x, s) y = 0, \quad s = \sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)},$$

als allgemeines Integral eine eindeutige Function von t ohne Unbestimmtheitsstelle im Endlichen besitzt, so existirt ein Fundamentalsystem von der Form:

$$v_1 = \varphi_1(x, s),$$
$$v_2 = \varphi_2(x, s) + \varphi_1(x, s)(\alpha Z_1 + \beta Z_2),$$

wo α, β Constanten, $\varphi_1(x, s)$, $\varphi_2(x, s)$ doppeltperiodische Functionen zweiter Art von t, oder was dasselbe besagt, Functionen, deren logarithmische Ableitungen nach x rational in (x, s) sind, bedeuten, und wo, wenn von den Constanten α, β wenigstens die eine einen von Null verschiedenen Werth hat, der Quotient

$$\frac{\varphi_2(x, s)}{\varphi_1(x, s)}$$

eine rationale Function von x und s ist.

Da die Differentialgleichung (II) ein Integral mit rationaler logarithmischer Ableitung besitzt, so muss sie die in der Nr. 302 (S. 161) angegebene Form haben.

Wenn z. B. die Coefficienten von (II) rationale Functionen von x allein sind, so lassen sich die Bedingungen dafür, dass die Integrale eindeutige Functionen von t ohne Unbestimmtheitsstelle im Endlichen sind, leicht explicite angeben. Die Differentialgleichung muss der Fuchs'schen Classe angehören, kann also (Bd. I, Nr. 70, S. 249) in der Form

$$\psi(x)\frac{d^2y}{dx^2} + F_{\sigma-1}(x)\frac{dy}{dx} + F_{\sigma-2}(x)y = 0$$

vorausgesetzt werden, wo

$$\psi(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_\sigma)$$

lauter verschiedene lineare Factoren enthält und $F_{\sigma-1}$, $F_{\sigma-2}$ ganze Functionen vom Grade $\sigma - 1$ beziehungsweise $\sigma - 2$ in x sind. Die determinirenden Fundamentalgleichungen, die zu den singulären Punkten

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma$$

gehören, besitzen als eine Wurzel die Null, die andere Wurzel muss eine ganze Zahl sein, wenn das betreffende $a_\varkappa$ keine Wurzel der Gleichung

$$(1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2) = 0$$

ist, sie kann gleich der Hälfte einer ganzen Zahl sein für einen singulären Punkt, der mit einem der vier Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche T zusammenfällt. Für $x = \infty$ müssen die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen ganze Zahlen sein; das Auftreten von Logarithmen ist für alle singulären Punkte auszuschliessen.

Betrachten wir den in der Litteratur vielfach behandelten Fall der sogenannten Lamé'schen Differentialgleichung

$$\text{(III)} \qquad R(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}R'(x)\frac{dy}{dx} - (n(n+1)\varkappa^2 x^2 + h)y = 0,$$

wo

$$R(x) = (1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2), \qquad R'(x) = \frac{dR(x)}{dx}$$

ist und n, h Constanten bedeuten, so besitzen die zu den singulären Punkten

$$+1, \; -1, \; +\frac{1}{\varkappa}, \; -\frac{1}{\varkappa}$$

gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen die Wurzeln

$$0, \; \frac{1}{2},$$

während die Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung gleich $-n$ und $n + 1$ sind. Damit die Integrale

von (III) eindeutige Functionen von t seien, ist also nothwendig und hinreichend, dass n eine ganze Zahl sei, und dass die Entwickelungen der Integrale in der Umgebung von $x = \infty$ keine Logarithmen enthalten. Die letztere Bedingung ist aber immer von selbst erfüllt.

Führt man t als unabhängige Variable ein, so nimmt die Differentialgleichung die Gestalt an

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = (n(n+1)\,\varkappa^2 \operatorname{sn}^2 t + h)\,y.$$

Die vollständige Integration dieser für die mathematische Physik äusserst wichtigen Gleichung kann mit Hülfe der Transcendenten der Theorie der elliptischen Functionen geleistet werden; wir verweisen in Bezug hierauf auf Herrn Hermite's Meisterwerk „Sur quelques applications des fonctions elliptiques“.



Zusätze und Berichtigungen.

Zu Band I.

S. XVIII bei Nr. 111 lies Transformirten statt Transformation.

„ 29 muss Gleichung (4) lauten:

$$p_0 : p_1 : \cdots : p_n = \varDelta(x) : -\varDelta_1(x) : \cdots : (-1)^n \varDelta_n(x).$$

„ 30 muss die Gleichung Zeile 8 v. o. lauten:

$$p_1 = -\frac{d \log \varDelta(x)}{dx}.$$

„ 37 Gleichung (3) lies ($\varkappa = 1, 2, \cdots n$) statt ($\varkappa = 0, 1, \cdots n$).

„ 75 in Formel (38) und Zeile 3 v. o. lies p_{m-1} statt p_m.

„ 97 in Formel (9) rechts vom Gleichheitszeichen lies y_h statt $y_\varkappa$.

„ 193 Zeile 15 v. o. lies u_1 statt u_0; das Gleichungssystem Zeile 19 ff. v. o. muss lauten:

$$\begin{aligned}
\Theta u_1 &= \omega_0 u_1 \\
\Theta u_2 &= \alpha_{10} u_1 + \omega_0 u_2 \\
&\cdots\cdots \\
\Theta u_l &= \alpha_{l0} u_1 + \alpha_{l1} u_2 + \cdots + \omega_0 u_l .
\end{aligned}$$

Zu Band II, 1.

„ X bei Nr. 180 Zeile 18 v. o. lies zweiter statt gerader Ordnung.

„ XI bei Nr. 193 Zeile 5 v. u. lies 1885 statt 1889.

„ 35 Zeile 10 v. o. lies r statt n.

„ 68 Zeile 14 v. o. lies Theilgebilde statt Theilgebiete.

„ 80 Zeile 11 v. o. und 1 v. u. lies Transformationsgruppe statt Gruppe.

„ 112 Zeile 11, 10 v. u. sollen lauten: „Fundamentalsubstitutionen $L_1, L_2, \cdots L_s$ und der Substitution L_{s+1}, die einem Umlaufe um alle $a_1, a_2, \cdots a_s$ entspricht, die Beziehung

(2) $$L_1 L_2 \cdots L_s L_{s+1} = 1.$$

S. 128 Zeile 11—9 v. u.; vergl. hierzu eine Bemerkung: **Igel**, Monatshefte für Mathem. u. Physik, Jahrgang IX, S. 47.

„ 141 Zeile 14 v. o. lies $v_{1\varkappa}$ statt $v_{i\varkappa}$.

„ 150 Zeile 9 v. o. lies ($\mathfrak{A}$) statt (A).

„ 179 am Kopfe lies 179 statt 180.

„ 184 Zeile 3 v. o. im Nenner von $\Delta\binom{\eta}{x}$ lies $\eta'(x)^2$ statt $\eta'(x)^3$;

ebenda Zeile 4 v. o. im Nenner von $\Delta\binom{\zeta}{x}$ lies $\zeta'(x)^2$ statt $\zeta'(x)^3$

„ 187 Zeile 15, 16 v. o. lies den Exponenten statt jene Potenz.

„ 243 Zeile 8 v. u. lies $x_{\nu-1}$ statt x_n.

„ 328 Zeile 14 v. o. lies $\bar{v}_0'$ statt v_0.

„ 336 Zeile 15 v. u. lies c statt c_0.

„ 338 Zeile 9 v. u. im Nenner von $\Delta\binom{\eta}{z}$ lies $\left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2$ statt $\left(\frac{d\eta}{dz}\right)^3$.

„ 363 Zeile 8. v. o. rechts vom Gleichheitszeichen lies $-\frac{3}{4}p_2$ statt $3p_2$.

„ 365 Zeile 5 v. o. lies (S. 108) statt (S. 156).

„ 487 Zeile 17 v. o. muss die Definition von J, J' lauten:

$$J = \frac{1}{2}\int_z^0 \frac{x\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}}, \qquad J' = \frac{1}{2}\int_z^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}.$$

Es ist nämlich nach S. 477, Bd. II, 1, Gl. (1)

$$u_1 = 8\int_z^0 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}},$$

also, da (ebendort S. 482) $u_1 = 8\,iK$ ist, so haben wir

$$K = \frac{1}{2}\int_z^0 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}}$$

und ferner

$$K' = \frac{1}{2}\int_z^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}.$$

S. 532 Zeile 14 v. o. rechts vom Gleichheitszeichen lies

$$\Gamma(\varrho)(e^{2\pi i\varrho} - 1) \text{ statt } \Gamma(\varrho).$$

Zu Band II, 2.

S. 180 Zeile 6 v. o. lies M_ν statt M.
„ 184 Zeile 9 v. u. lies „von dem Punkte" statt „von den Punkten".
„ 187 Formel (30) lies

$$\frac{Ke^{-n(m-1)r}}{1-e^{(m-1)r}},$$

statt

$$\frac{Ke^{n(m-1)r}}{1-e^{(m-1)r}}.$$

S. 190 letzte Zeile lies Aggregat statt Agreggat.

„ 205 Zeile 14 v. u. lies $2\pi\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\frac{1}{g_\varkappa}$ statt $2\pi\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\frac{1}{g_{\sigma+1}}$.

Zum Litteraturnachweis.

Zu Nr. 9 Günther (bei Hamburger) Crelle's Journal Bd. 118, S. 351 ff.; (bei Gutzmer) ebenda Bd. 119, S. 82 ff; Fuchs ebenda Bd. 118, S. 354.

„ „ 22 Hirsch, Dissertation (Königsberg i. Pr. 1892) S. 20, 21; Vessiot, Thèses, S. 56, 57.

„ „ 47, 48 Kneser, Mathem. Annalen Bd. 47, S. 408 ff.

„ „ 97, 98 Günther, Crelle's Journal Bd. 119, S. 330 ff.

„ „ 117 Kneser, Crelle's Journal Bd. 116, S. 178 ff.; Bd. 117, S. 72 ff.;
Horn, ebenda Bd. 118, S. 257 ff.; Mathem. Annalen Bd. 49, S. 453 ff.
Picard, Traité d'Analyse Bd. III (1896) S. 360 ff.

„ „ 143—156 vergl. Picard, Traité d'Analyse Bd. III, S. 492 ff.*)
A. Löwy, Monatshefte VIII. Jahrgang S. 225 ff.

*) Aus Anlass einer Bemerkung des Herrn Vessiot im Bulletin des Sciences Mathém. II Sér. T. XXII S. 79, Zeile 4, 5 v. u., sei erwähnt, dass dem Verfasser bei Redaction dieser Nummern der Bd. III des „Traité" des Herrn Picard nicht vorgelegen hat, wie daraus hervorgeht, dass die betreffenden Bogen 4, 5, 6 von Bd. II, 1 am 18. März, 28 März, 7 April 1896 mit „imprimatur" an die Druckerei abgingen, während die Vorrede zum Bd. III des Picard'schen „Traité" vom 25. März 1896 datirt ist. Ebenda (Bulletin a. a. O.) S. 81, Zeile 14 v. u. dürften die Worte „de M. Klein" auf einem Versehen beruhen, auch ist S. 83 Zeile 2 v. o. an Stelle von „M. Fuchs" zu setzen „M. Beke".

Zu Nr. 168, 169 Rados, Mathem. Annalen Bd. 48, S. 417 ff.; Értesitö der ung. Akademie Bd. XIV, S. 166 ff.

" " 185 Gutzmer, Crelle's Journal Bd. 115, S. 79 ff.; A. Fischer, Inaug.-Dissertation (Halle 1891).

" " 227 Ritter, Mathem. Annalen Bd. 48, S. 1 ff.

" " 230 Fuchs, Sitzungsberichte 1898 S. 222 ff.

" " 246 Fuchs, Sitzungsberichte 1897, S. 608 ff.

" " 255 Richard Fuchs, Crelle's Journal, Bd. 119, S. 1 ff. Fuchs, Sitzungsberichte 1898, S. 477 ff.

Nachwort.

Die folgenden Bemerkungen haben den Zweck, den Einfluss, den mein verstorbener Freund und Mitarbeiter Paul Günther auf Plan und Ausführung des nunmehr abgeschlossen vorliegenden „Handbuches“ ausgeübt hat, im Zusammenhange hervortreten zu lassen; sie geben eine detaillirte Aufzählung derjenigen Momente, durch welche Günther in die Entstehung des Werkes eingegriffen.

Im Februar 1891 entwarfen Günther und ich für das zu verfassende „Handbuch“ ein Arbeitsprogramm, zu welchem ein jeder von uns im Wesentlichen dasjenige beitrug, was sich auf die von ihm zu bearbeitenden Theile bezog. Ich gebe zunächst dieses Programm hier dem Wortlaute nach wieder. Die eingeklammerten Anfangsbuchstaben unserer Namen, (G), (S) bezeichnen die einem jeden von uns zugewiesenen Abschnitte; bei denjenigen Theilen, wo keiner der beiden Buchstaben steht (—), war die Entscheidung, wer dieselben bearbeiten sollte, noch vorbehalten. Das in [ ] Stehende habe ich der Deutlichkeit wegen hinzugefügt.

I. Band.

Historische Einleitung mit Motivirung der ausgezeichneten Stellung der linearen Differentialgleichungen; feste Verzweigungspunkte. — Existenzbeweis für homogene [lin. Differential-]Gleichungen nach Fuchs. Fundamentalsystem, lineare Substitution bei jedem Umlauf. — Formale Theorieen: Liouvilles' Sätze, adjungirte Differentialgleichungen, Vertauschung von Parameter und Argument, Appell'sche Determinanten [Fonctions invariantes], Laguerre's Invarianten unter Hinweis auf spätere Behandlung der Classeninvarianten, Irreductibilität, erster Theil der neuen Fuchs'schen Arbeiten [Sitzungsberichte der Berl. Acad. 1888 ff.], Sturm'sche Sätze aus Liouville['s Journal Bd.] I*), Reduction der nicht homogenen Differentialgl. auf homogene. — Functionentheoretische Behandlung: Verhalten der Integrale in der Umgebung eines Punktes, Fall algebraischer Coefficienten, rationaler Coefficienten, Fuchs'sche Classe, Irreguläre Integrale (G.).

---

*) Bemerkung Günther's in seinem Exemplar: „überhaupt wohl nicht ausführen, sondern nur citiren bei Gelegenheit der irregulären Integrale, wo von den Nullstellen derselben die Rede“.

Gruppe der Differentialgleichung; Methoden für numerische Berechnung der Substitutionscoefficienten, Riemann's Classenbegriff, zweiter Theil der neuen Fuchs'schen Arbeiten (Irreductibilität), Invarianten der Classe, Parameter der Gruppe, Constantenabzählungen, Fall, wo die Substitutionen unabhängig sind von einem in der Differentialgl. auftretenden Parameter (dritter Theil der [neuen] Fuchs'schen Arbeiten), Differentialgleichungen zweiter Ordnung möglich ohne ausserwesentlich singuläre Punkte, hypergeometrische Differentialgleichung, ihre allgemeine Integration (S.).

Ueberall convergente Darstellungen der Integrale: 1) Fuchs'sche Iteration [Annali di Matematica Ser. II, Bd. IV], Anwendung auf Bestimmung der Fundamentalgleichung, Poincaré'sche Sätze [Acta Mathem. Bd. IV, S. 212—216], 2) Darstellung durch bestimmte Integrale (Jordan, Pochhammer, Hossenfelder), Differentialgleichung der Perioden, speciell der elliptischen Integrale (I., II., III. Gattung) nach Fuchs [Crelle's Journal Bd.] 83 und neuere Arbeiten, Legendre'sche Relation und ihre Verallgemeinerung für $p = 2$ (G.).

II. Band.

Differentialgleichungen, die durch bekannte Functionen integrirbar: 1) a. mit constanten Coefficienten nebst Anwendungen*), b. Halphén's Gleichungen (G.); 2) algebraisch integrirbare a. nicht homogene (Königsberger), b. homogene (S.); 3) Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten, denen die Appell'schen Fonctions à multiplicateurs genügen, Lamé'sche Differentialgl. etc. in allgemeinster Fassung (—).

Integrale von Lösungen linearer Differentialgleichungen; 1) Fuchs, Crelle['s Journal Bd.] 76 (—); 2) Fuchs'sches Umkehrproblem für Differentialgleichungen II. Ordnung [Crelle's Journal Bd.] 89; 3) Problem der Fuchs'schen Functionen, vorher Beispiele, eindeutige Functionen [die durch Umkehrung des Integralquotienten] aus hypergeometrischen Differentialgl. [entstehen], Modulfunction, Darstellungsprincip für mehrdeutige Functionen mit endlicher Anzahl von Verzweigungspunkten, speciell der Integrale linearer Differentialgleichungen, deshalb Beschränkung auf die für diese Integration ausreichenden und einfachsten Fuchs'schen Functionen, $p = 0$, [determinirende] Fundamentalgleichungen [haben] doppelte Wurzeln, ihre ausführliche Theorie, Fonctions Θ- und Z-Fuchsiennes (S.).

Verallgemeinerung auf Functionen mehrerer Variablen, hyperelliptische Modulfunction nach Fuchs (—).

Für die „historische Einleitung" war (vergl. Bd. I, S. VI) ein Theil der Günther'schen Habilitationsvorlesung in Aussicht genommen. Da in dieser auch von partiellen Differentialgleichungen gehandelt wird, hatte Günther selbst in seinem Manuscripte die Stelle bezeichnet, bis wohin diese Vorlesung verwerthet werden sollte. Ich habe den auf gewöhnliche Differentialgleichungen bezüglichen Theil umgearbeitet,

---

*) Günther hatte namentlich den inzwischen, Crelle's Journal, Bd. 118, S. 351, und Bd. 119, S. 82 durch die Herrn Hamburger und Gutzmer herausgegebenen Existenzbeweis im Auge.

stellenweise auch ergänzt, habe es aber vermieden, über die von Günther in Betracht gezogene Materie wesentlich hinauszugehen. — In den im Vorworte zum ersten Bande erwähnten, in meinen Händen befindlichen Aufzeichnungen, hatte Günther für einige der von ihm zu bearbeitenden Theile die Disposition genauer entworfen und durch Excerpte, denen an manchen Stellen auch eigenartige Beweise hinzugefügt sind, einen Theil des Materials vorbereitet. Ich lasse hier ein Verzeichniss dieser Aufzeichnungen mit Angabe ihres Inhaltes folgen, die von mir herrührenden Bemerkungen sind in [ ] eingeschlossen.

[1]. [Vier beschriebene Quartseiten enthaltend eine Disposition für diejenigen Kapitel, die im Handbuche direct auf die historische Einleitung folgen sollten; darunter ausgeführt ein] directer Beweis des Satzes: „Wenn die Determinante von n Functionen gleich Null ist, besteht eine lineare Relation“ [der Beweis ist ein Inductionsschluss von $n - 1$ auf n, nach ähnlichem Principe wie bei Baltzer, Determinanten (1881), S. 78 ff. von 2 auf 3 geschlossen wird].

[2]. [Ein Heft mit circa 20 beschriebenen Quartseiten enthaltend Disposition und Material für die formalen Theorieen, ich gebe die Ueberschriften mit Inhaltsangabe wieder]:

I. Die Analogieen mit algebraischen Gleichungen.
Schon früh bekannt (Lagrange etc.).

A. Die Coefficienten der linearen Differentialgleichungen ausdrückbar durch die Integrale $y_1, \cdots y_n$ [eine halbe Seite].

B. Der Appell'sche Satz [drei Seiten, nach Appell, Annales de l'École Normale II. Sér. Bd. 10, S. 400, 401, 394, 397].

C. Gemeinsame Lösungen linearer Differentialgleichungen. Irreductibilität [vier Seiten, nach Frobenius, Crelle's Journal Bd. 76, S. 256—258, 243—244].

D. Erniedrigung der Ordnung der Differentialgleichung, wenn einige Integrale bekannt sind [nur wenige Zeilen, beginnt mit:] Setze $y = y_1 \int z\,dx$ [u.s.w., dann folgt eine Formel nach Thomé, Crelle's Journal Bd 75, S. 267].

E. Die symbolische Factorenzerlegung linearer Differentialausdrücke [etwa eine und eine halbe Seite, in eigenartiger Darstellung, vgl. Nr. 19, Bd. I, S. 50—52 Zeile 7 v. o. des Handbuches].

II. Die adjungirte Differentialgleichung [etwa elf Seiten, beginnt mit eigenartigen Betrachtungen, die im Handbuche Bd. I, Nr. 21, S. 56 Zeile 5 v. o. bis S. 57 Zeile 3 v. u., S. 58 Zeile 13 v. o. bis S. 59, Zeile 19 v. u., und hieran anschliessend Nr. 22, S. 61 Zeile 11 v. o. bis Schluss der Nummer verwerthet sind; das Uebrige nach Frobenius, Crelle's Journal Bd. 77, S. 246—249, 256; auf den beiden letzten Seiten wird mit Hülfe des Appell'schen Satzes gezeigt, dass die Coefficienten der adjungirten Differentialgleichung sich rational aus denjenigen der gegebenen Differentialgleichung und ihren Ableitungen zusammensetzen (was im „Handbuche“ ebenfalls verwerthet ist), die explicite rationale Form des adjungirten Differentialausdruckes wird dann in der gewöhnlichen Lagrange'schen Weise hergestellt].

III. [Eine Bemerkung von etwa 6 Zeilen, woraus hervorgeht, dass der erste Theil der Fuchs'schen Arbeiten aus den Sitzungsberichten von 1888 jetzt direct

an die Theorie der adjungirten Differentialgleichung angeknüpft und auch dabei der Appell'sche Satz benützt werden sollte; vergl. für I E, II, III die von mir herausgegebene Notiz, Crelle's Journal Bd. 117, S. 168].

[3]. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen I [ein Heft mit etwa 14 beschriebenen Quartseiten enthält:]

I. Multiplicatoren, adjungirte Differentialausdrücke [etwa drei Seiten, eingelegt ein mit Bleistift beschriebenes Blättchen].

II. Zusammensetzung von Differentialausdrücken [eine halbe Seite, Hinweis auf Floquet, Annales de l'École Normale Sér. II, Bd. 8, Suppl. S. 40 ff.].

III. Die determinirende Function [eine und eine halbe Seite, enthält die Definition der determinirenden Function auch im Falle, wo nicht reguläre Integrale vorhanden sind, Beziehung zwischen den determinirenden Functionen adjungirter Differentialausdrücke und solcher, die aus anderen Differentialausdrücken zusammengesetzt sind, alles nach Frobenius, Crelle's Journal Bd. 80, S. 317 ff.].

IV. Reguläre Integrale [vier Seiten, wesentlich nach Frobenius a. a. O., ferner die Methode von Thomé zur Entscheidung darüber, ob sich ein Differentialausdruck P in der Form $P = AB$ darstellen lässt, wo B ein durchweg regulärer Differentialausdruck ist und A rationale Coefficienten besitzt].

V. Normale Differentialausdrücke und normale Integrale [vier und einhalb Seiten, Begriff des normalen Differentialausdrucks, fundamentalen determinirenden Factors u. s. w.; der determinirende Factor ist eindeutig bestimmt; die Bestimmung der fundamentalen determinirenden Factoren (nur angedeutet), Differentialausdrücke, die aus normalen zusammengesetzt sind, normale Integrale, ihre Werthberechnung, alles nach Thomé angedeutet; auf den letzten anderthalb Seiten, Anwendung eines der Inauguraldissertation Günther's entnommenen Verfahrens auf gewisse aus normalen Differentialausdrücken zusammengesetzte Differentialausdrücke; vergl. hierfür die Nummern 97, 98 des Handbuches sowie den Schluss der von mir herausgegebenen Arbeit Günther's, Crelle's Journal Bd. 119, S. 330 ff.]

[4]. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen II [etwa drei und einhalb beschriebene Quartseiten, enthält:]

I. Zusammensetzung von Differentialausdrücken [eine halbe Seite].

II. Multiplicatoren und adjungirte Differentialausdrücke [etwa drei Seiten, beides wesentlich nach Frobenius, Crelle's Journal Bd. 76].

[5]. Aus Abhandlungen von Frobenius [20 beschriebene Quartseiten, enthält:] a) Ueber Irreductibilität linearer Differentialgleichungen, Crelle's Journal, Bd. 76, pg. 236 [auf sieben und einhalb Seiten, nach S. 236—259 der genannten Abhandlung]; b) Zusammenhang der Differentialgleichung mit der Differentialgleichung ihrer Multiplicatoren [sechs und einhalb Seiten, nach Crelle's Journal Bd. 77, S. 248—257; Bd. 80, S. 319 ff.; Bd. 76, S. 261—263]; c) Ueber die regulären Integrale der linearen Differentialgleichungen [sechs Seiten, nach Crelle's Journal Bd. 80, S. 317 ff.].

[6]. [Excerpt aus] Heun, Americ. Journal, Bd. X, S. 205—224 [vier beschriebene Quartseiten].

[7]. Aus Jordan Cours d'Analyse III. [1887] a) Integralgruppen bei gleichen Wurzeln der Fundamentalgleichung, S. 173 ff. [vier beschriebene Quartseiten und ein eingelegtes Blättchen]; b) Integration linearer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale, S. 241 ff. [etwa drei beschriebene Quartseiten; auf einem eingelegten Blättchen die Bemerkung:]

Nach Euler setzt man an

$$y = P(x) \int_{u_0}^{u_1} e^{u\,Q(x)}\, u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1}\, du.$$

Dann wird

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = \int_{u_0}^{u_1} du \,\{ P''(x) + P'(x)\, (1 + u \cdot Q'(x)) +$$

$$P(x)\, [u \cdot Q''(x) + u^2 \cdot Q'(x)^2] + p(x)\, [P'(x) + u \cdot P(x) \cdot Q'(x)]$$

$$+ q(x) \} \cdot e^{u \cdot Q(x)} \cdot u^{\alpha-1} \cdot (1-u)^{\beta-1}.$$

Dies muss gleich:

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{d}{du} \{ R(x, u)\, e^{u \cdot Q(x)} \cdot u^{\alpha} (1-u)^{\beta} \}\, du$$

werden.

[8]. Herleitung der Bedingungen für den Fortfall der Logarithmen in einer zu gleichen Wurzeln der Fundamentalgleichung gehörigen Integralgruppe für reguläre lineare Differentialgleichungen, nach Andeutung von Hamburger [fünf und einhalb beschriebene Quartseiten; ein wie es scheint nicht ganz zu Ende geführter Ansatz].

[9]. Ungedrucktes aus meiner Dissertation [zehn beschriebene, zum Theil aber wieder durchstrichene Foliospalten, vergl. die von mir herausgegebene Arbeit Günther's in Crelle's Journal, Bd. 119, S. 330ff.].

Als nach dem am 27. September 1891 erfolgten Hinscheiden Günther's die Ausführung auch der ihm zugedachten Abschnitte des Handbuches mir zufiel, konnte ich zwar nicht durchweg, aber doch bei einigen Theilen dieser Abschnitte die Disposition des Arbeitsprogramms innehalten, namentlich auch bei einigen der Kapitel, auf die sich die nachgelassenen Aufzeichnungen beziehen, den Entwürfen Günther's folgen. Die folgende Zusammenstellung wird einerseits diese Theile und Kapitel hervorheben und soll andererseits — nachdem Stellen, wo ich in den nachgelassenen Aufzeichnungen enthaltene, eigenartige Entwickelungen Günther's verwerthet habe, bereits im ersten Bande bezeichnet wurden — auf die Nummern hinweisen, die nach Abhandlungen bearbeitet sind, für welche mir die Excerpte Günther's zu Gebote standen.

In der „Einleitung" und dem „ersten Abschnitte" sind die Nummern 5, 8—12 im Sinne des Arbeitsprogramms gehalten; in der Nr. 5 (Bd. I, S. 13 die 12 letzten Zeilen), Nr. 8 (ebenda, S. 19 Zeile 15 v. o. bis Schluss der Nummer auf S. 20), ferner in den Nummern 11, 12 bei der Begriffsbestimmung eines Fundamentalsystems ist der in [1] und [2] I, A des Günther'schen Nachlasses angedeutete Gedankengang befolgt.

Die „formalen Theorieen" haben im Wesentlichen das Gepräge erhalten, welches ihnen Günther, nach dem Arbeitsprogramme und den Theilen [2], [3] I, II, [4], [5] a), b) des Nachlasses zu geben beabsichtigt hat. Die Nummern 15—19, 21—23 und ein Theil von Nr. 26 (Bd. I, S. 76, 77) sind im Sinne der Günther'schen Disposition ausgeführt; ein Theil des für diese Nummern erforderlichen Materials (Bd. I, Nr. 15, S. 40—42; Nr. 16, S. 43 Zeile 5 v. u. bis Schluss der Nr. 17 auf S. 46; Nr. 19, 21, 22, 23 bis S. 64 Zeile 14 v. o.; Nr. 26, S. 76; Nr. 27, S. 84—85 Zeile 5 v. o.) war in den Aufzeichnungen Günther's auch vollständig vorbereitet.

Von den auf das „Verhalten der Integrale in der Umgebung eines Punktes" bezüglichen Theilen des Günther'schen Nachlasses kamen für die Nummern 92 (bis S. 332 Zeile 16 v. u.) und 93 (bis S. 336 Zeile 8 v. o.) die Theile [3] III, IV, [5] c) in Betracht, ferner sind die Nummern 97 (von S. 348 Zeile 8 v. o. ab) und 98 wesentlich im Anschlusse an [3] V des Nachlasses ausgeführt.

Bei der Ausarbeitung des Abschnittes „über allgemein gültige Darstellungen der Integrale" habe ich der Disposition des Arbeitsplanes nur zum Theil folgen können, indem einerseits die Poincaré'schen Untersuchungen über die Laplace'sche Transformirte aufgenommen werden mussten, und andererseits die inzwischen entstandenen Untersuchungen über die Euler'sche Transformirte einen besonderen Abschnitt (den zwölften) erforderten.

Auf die Beziehungen der übrigen Abschnitte des Handbuches zu der im Arbeitsprogramme vorgesehenen Disposition brauche ich nicht weiter einzugehen, da es nur darauf ankam festzustellen, inwieweit die wesentlich auf Günther's Initiative zurückzuführenden Theile des Programms die Ausführung des Werkes beeinflusst haben.

Klausenburg, im Juni 1898.

Ludwig Schlesinger.

Register der angewandten Bezeichnungen.

